BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1974

MÜNCHEN 1975

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ein Minimalproblem der Flächentheorie

Von **Alfred Schönhofer** in Berlin

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 7. Juni 1974

I

Die einzigen reellen, dreimal stetig differenzierbaren Flächen, welche nur aus Nabelpunkten bestehen, sind bekanntlich die Kugeln und Ebenen.[1] Durch eine vorgegebene reelle, geschlossene (doppelpunktfreie und stückweise hinreichend oft differenzierbare) Raumkurve und erst recht durch einen zu ihr gehörigen vorgegebenen Streifen läßt sich im allgemeinen keine solche Fläche legen. Es erhebt sich dann die Frage nach der Gestalt eines Flächenstücks, das die gegebenen Randbedingungen erfüllt und dem unerreichbaren „Ideal", aus lauter Nabelpunkten zu bestehen, in irgendeinem Sinn möglichst nahe kommt. Eine naheliegende Präzisierung dieser Forderung ist die Frage nach einem einfach zusammenhängenden Flächenstück, für welches das Flächenintegral

$$I = \int A^2 \, dO \tag{1}$$

einen Minimalwert annimmt, wobei

$$A = \varkappa_1 - \varkappa_2 = 2\sqrt{H^2 - K} \tag{2}$$

die Differenz der beiden Hauptkrümmungen im jeweiligen Flächenpunkt ist. H ist die mittlere, K die Gaußsche Krümmung; A könnte man mit einem Ausdruck aus der geometrischen Optik den Flächenastigmatismus nennen. Durch die Vorgabe eines Randstreifens ist übrigens nach dem Satz von Gauß und Bonnet die Gesamtkrümmung $\int K \, dO$ des Flächenstücks bereits fest-

---

[1] *Bezüglich der hier benützten differentialgeometrischen Sätze und Formeln vgl. z. B.* W. Blaschke/K. Leichtweiß: Elementare Differentialgeometrie. 5. Aufl. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1973. Wie dort wird im folgenden die Einsteinsche Summenschreibweise gebraucht.

gelegt. Somit ist in diesem Fall die Forderung $\int A^2 dO = \mathrm{Min}$ äquivalent der Forderung $\int H^2 dO = \mathrm{Min}$.

II

Die (im folgenden als hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzte) Fläche $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ werde variiert durch infinitesimale Verschiebung ihrer Punkte längs der Flächennormalen $\mathfrak{n}$ gemäß

$$\bar{\mathfrak{x}}(u^1, u^2) = \mathfrak{x}(u^1, u^2) + \eta\, w(u^1, u^2)\, \mathfrak{n}(u^1, u^2), \tag{3}$$

wobei die Randkurve bzw. der Randstreifen des Flächenstücks festgehalten sei. Notwendig für $I = \mathrm{Min}$ ist das Verschwinden der ersten Variation dieses Integrals. Sie läßt sich berechnen aus den ersten Variationen von H und K.[1] Da aber gelegentlich (etwa für die Untersuchung hinreichender Minimalbedingungen) auch die zweiten Variationen dieser Größen interessieren, sei nachfolgend die Entwicklung bis einschließlich η^2 durchgeführt.

Mit der Bezeichnung $\mathfrak{x}_{ij\ldots} = \frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j} \ldots \mathfrak{x}$ $(i, j, \ldots = 1, 2)$, analog für $\mathfrak{n}$ und w, gilt

$$\bar{\mathfrak{x}}_i = \mathfrak{x}_i + \eta\,(w_i\, \mathfrak{n} + w\, \mathfrak{n}_i), \tag{4}$$

$$\bar{\mathfrak{x}}_{ij} = \mathfrak{x}_{ij} + \eta\,(w_{ij}\, \mathfrak{n} + w_i\, \mathfrak{n}_j + w_j\, \mathfrak{n}_i + w\, \mathfrak{n}_{ij}). \tag{5}$$

Aus (4) folgen die bekannten Gleichungen für die Variation des Maßtensors $g_{ij} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_j$ und des Oberflächenelements $dO = \sqrt{g} \cdot du^1\, du^2$ mit $g = Det\,(g_{ij})$,

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} - 2\eta w L_{ij} + \eta^2 (w_i w_j + w^2 e_{ij}) \tag{6}$$

und

$$\overline{dO} = \left\{1 - 2\eta w H + \eta^2 \left(\frac{1}{2}\, w_i w^i + w^2 K\right)\right\} dO. \tag{7}$$

Hierbei sind $L_{ij} = -\mathfrak{x}_i \mathfrak{n}_j = \mathfrak{x}_{ij} \mathfrak{n}$ und $e_{ij} = \mathfrak{n}_i \mathfrak{n}_j = 2HL_{ij} - K g_{ij}$ die Tensoren der zweiten und dritten Grundform. Mit den gemischten Tensorkoordinaten $L_i{}^j = L^j{}_i = L_{ik} g^{kj}$ gilt $e_{ij} = L_i{}^k L_{kj}$ und

---

[1] Letztere sind (in anderer Schreibweise als hier) angegeben bei W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie. 4. Aufl. Springer-Verlag Berlin 1945.

$$H = \frac{1}{2} L_i^i = \frac{1}{2} Spur(L_i^j), K = \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varepsilon_{jl} L_i^j L_k^l = Det(L_i^j), \quad (8)$$

wo $\varepsilon_{jl} = (\mathfrak{r}_j \times \mathfrak{r}_l)\mathfrak{n}$ die kovarianten (und ε^{ik} die kontravarianten) Koordinaten des Diskriminantentensors sind. Für $w_i w^i$ mit den kontravarianten Vektorkoordinaten $w^i = g^{ij} \frac{\partial w}{\partial u^j}$ kann mit dem ersten Beltramischen Differentiator auch ∇w geschrieben werden. Schließlich ergibt (6) für die kontravarianten Koordinaten des Maßtensors der variierten Fläche

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} + 2\eta w L^{ij} + \eta^2(-w^i w^j + 3 w^2 L^{ik} L_k^j). \quad (9)$$

Aus (4), dem in (7) gegebenen Ausdruck für $\sqrt{\bar{g}}$, den Weingartenschen Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{n}_i = - L_i^j \mathfrak{r}_j \quad (10)$$

und (8) folgt weiterhin nach einiger Zwischenrechnung die Beziehung

$$\bar{\mathfrak{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \bar{\mathfrak{r}}_1 \times \bar{\mathfrak{r}}_2 = \mathfrak{n} - \eta w^i \mathfrak{r}_i - \\ - \eta^2 \left(\frac{1}{2} w^i w_i \mathfrak{n} + w w^i L_i^j \mathfrak{r}_j\right). \quad (11)$$

Mit Hilfe von (10) und den Gaußschen Ableitungsformeln

$$\mathfrak{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{\ \ k} \mathfrak{r}_k + L_{ij}\mathfrak{n} \quad (12)$$

ergibt sich dann aus (5) und (11)

$$\bar{L}_{ij} = L_{ij} + \eta(w_{i|j} - L_i^k L_{kj} w) + \eta^2(L_{ij|k} w w^k + \\ + L_{ik} w_j w^k + L_{jk} w_i w^k - \frac{1}{2} L_{ij} w_k w^k). \quad (13)$$

Dabei bedeutet der Index nach dem Strich jeweils die kovariante Ableitung, und es wurden die aus $\mathfrak{n}\mathfrak{r}_k = 0$ resultierenden Gleichungen $\mathfrak{n}_{ij}\mathfrak{r}_k + L_{ij|k} + L_{kl}\Gamma_{ij}^{\ \ l} = 0$ benützt. Aus (9) und (13) folgt endlich, wenn man berücksichtigt, daß die kovariante Ableitung des Maßtensors verschwindet,

$$\bar{L}_i^j = L_i^j + \eta(w^j{}_{|i} + L_i^k L_k^j w) + \eta^2(L_i^j{}_{|k} w w^k + 2 L_k^j w w^k{}_{|i} + \\ + L_k^j w_i w^k - \frac{1}{2} L_i^j w_k w^k + L_i^k L_k^l L_l^j w^2). \quad (14)$$

Hieraus lassen sich gemäß (8) die Entwicklungen von H und K berechnen. Man erhält nach einigen Umformungen

$$\bar{H} = H + \eta \left\{\frac{1}{2} w^i{}_{|i} + (2H^2 - K) w\right\} + \eta^2 \left\{H_i w w^i + \right. \tag{15}$$

$$\left. + L^{ij} \left(w w_{|ij} + \frac{1}{2} w_i w_j\right) - \frac{1}{2} H w_i w^i + (4H^3 - 3HK) w^2\right\}$$

und

$$\bar{K} = K + \eta \{\varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} L_{ij} w_{|kl} + 2HKw\} + \eta^2 \left\{K_i w w^i + \varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} \cdot \right. \tag{16}$$

$$\left. \cdot \left(\frac{1}{2} w_{|ij} w_{|kl} + 2 H L_{ij} w w_{|kl}\right) + K w w^i{}_{|i} + (4H^2 K - K^2) w^2\right\}$$

mit $H_i = \frac{\partial H}{\partial u^i}$, $K_i = \frac{\partial K}{\partial u^i}$. Dabei wurde benützt, daß die kovariante Ableitung des Diskriminantentensors gleichfalls Null ist. Wegen dieser Tatsache, der Gleichungen von Codazzi/Mainardi $L_{ij|k} = L_{ik|j}$, der Identität von Ricci $w_{i|jk} - w_{i|kj} = w_l R^l{}_{ijk}$ und des theorema egregium $R_{1212} = gK$ kann für (16) auch geschrieben werden

$$\bar{K} = K + \eta \{(\varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} L_{ij} w_k)_{|l} + 2HKw\} + \eta^2 \left\{(K w w^i)_{|i} + \right. \tag{17}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} w_{|ij} w_k\right)_{|l} + 2 H \varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} L_{ij} w w_{|kl} - \frac{1}{2} K w_i w^i +$$

$$\left. + (4H^2 K - K^2) w^2\right\}.$$

III

Nach (15), (17) und (7) ist

$$\bar{I} = \int \bar{A}^2 \, \overline{dO} = I +$$

$$+ 4\eta \int \left\{H w^i{}_{|i} + \frac{1}{2} A^2 H w - (\varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} L_{ij} w_k)_{|l}\right\} dO + \tag{18}$$

$$+ \eta^2 \int \left\{(w^i{}_{|i})^2 + 4 H L^{ij} (2 w w_{|ij} + w_i w_j) + (A^2 - 8H^2) w w^i{}_{|i} - \right.$$

$$- 6 H^2 w_i w^i + \left(\frac{1}{4} A^4 + 3 A^2 H^2\right) w^2 + (A^2 w w^i)_{|i} -$$

$$\left. - 2 (\varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} w_{|ij} w_k)_{|l}\right\} dO.$$

In den Integranden auf der rechten Seite treten einige Glieder auf, die Divergenzen von Vektoren sind. Diese Anteile der Flächenintegrale können nach dem Gaußschen Satz

$$\int v^i{}_{|i}\, dO = \oint \varepsilon_{ik} v^i \dot{u}^k ds \tag{19}$$

durch Randintegrale ersetzt werden ($\dot{u}^k = \frac{du^k}{ds}$ Ableitung nach der Bogenlänge der Randkurve). Wie es nach dem Satz von Gauß und Bonnet sein muß, sind hierin die Beiträge von $\bar{K}$ enthalten. Das Integral $\int H w^i{}_{|i}\, dO = \int H g^{ij} w_{|ij}\, dO$ läßt sich mit Hilfe des zweiten Greenschen Satzes

$$\int (\varphi \psi_{|ij} - \psi \varphi_{|ij})\, g^{ij} dO = \oint (\varphi \psi_{|i} - \psi \varphi_{|i})\, \varepsilon^i{}_k \dot{u}^k ds \tag{20}$$

umformen. So wird aus (18)

$$\bar{I} = I + 4\eta \int \left\{ g^{ij} H_{|ij} + \frac{1}{2} A^2 H \right\} w\, dO + \tag{21}$$

$$+ 4\eta \oint \{(H w_i - H_i w)\, \varepsilon^i{}_k + \varepsilon^{ij} L_{ik} w_j\} \dot{u}^k ds + \ldots .$$

Soll $I =$ Min sein, so muß der Koeffizient von η für alle zugelassenen Funktionen $w(u^1, u^2)$ verschwinden, insbesondere auch bei vorgegebenem Randstreifen, d. h. $w = 0$ und $w_i = 0$ auf dem Rand. In diesem Fall ist das Randintegral in (21) gleich Null, und nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung[1] folgt

$$\boxed{\Delta H + \frac{1}{2} A^2 H = 0} \tag{22}$$

als notwendige Bedingung für eine Fläche mit der genannten Minimaleigenschaft. Dabei ist Δ der zweite Beltramische Differentiator; $\Delta H = g^{ij} H_{|ij}$.

Ist in Wirklichkeit auf dem Rand oder einem Teil desselben nicht ein Randstreifen, sondern nur die Randkurve vorgegeben ($w = 0$), so liefert die Forderung, daß auch das Randintegral in (21) verschwinden muß, noch eine weitere notwendige Bedingung.

---

[1] Vgl. z. B. R. Courant u. D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I. 3. Aufl. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1968.

Für den Randstreifen der variierten Fläche gilt $\bar{\mathfrak{n}}\,\dot{\bar{\mathfrak{r}}} = 0$; daraus folgt mit (11) und $\dot{\bar{\mathfrak{r}}} = \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_k \dot{u}^k$

$$w_k \dot{u}^k = 0. \tag{23}$$

Wegen $(\dot{u}^1)^2 + (\dot{u}^2)^2 \neq 0$ ist dies stets nach einem w_i auflösbar. Nach Einsetzen in

$$\oint (H \varepsilon^i_k + \varepsilon^{ij} L_{jk})\, w_i \dot{u}^k ds = 0 \tag{24}$$

muß wegen der Beliebigkeit der anderen Funktion w_j hier wiederum der Integrand gleich Null sein. Die Ausrechnung ergibt $(H g_{ij} - L_{ij})\, \dot{u}^i \dot{u}^j = 0$ oder mit $g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = \dot{\mathfrak{r}}^2 = 1$, $L_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = \varkappa_n$

$$\boxed{\varkappa_n(s) = H} \tag{25}$$

als die zum Problem gehörige „natürliche Randbedingung": Die Normalkrümmung des Randstreifens muß gleich der mittleren Flächenkrümmung sein. Nach der Eulerschen Formel $\varkappa_n = \varkappa_1 \cos^2\varphi + \varkappa_2 \sin^2\varphi$ bedeutet dies, daß in einem Randpunkt die Tangente der Randkurve Winkelhalbierende zwischen den Hauptkrümmungsrichtungen ist.

IV

Selbstverständlich lassen sich ohne weiteres nur mehr oder weniger triviale Lösungen der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung (22) angeben. Solche Lösungsflächen sind die Kugeln ($H = \text{const}$, $A = 0$), aber auch die Minimalflächen ($H = 0$). Damit bei letzteren die Randbedingung (25) erfüllt ist, muß der Randstreifen Schmiegstreifen, die Randkurve also Asymptotenlinie sein.

Für einen Zylinder vereinfacht sich (22) zu

$$\ddot{\varkappa} + \frac{1}{2}\varkappa^3 = 0, \tag{26}$$

wo $\varkappa(s)$ die Krümmung des Normalschnitts senkrecht zu den Mantellinien ist. Als natürliche Gleichung der ebenen Schnittkurve folgt

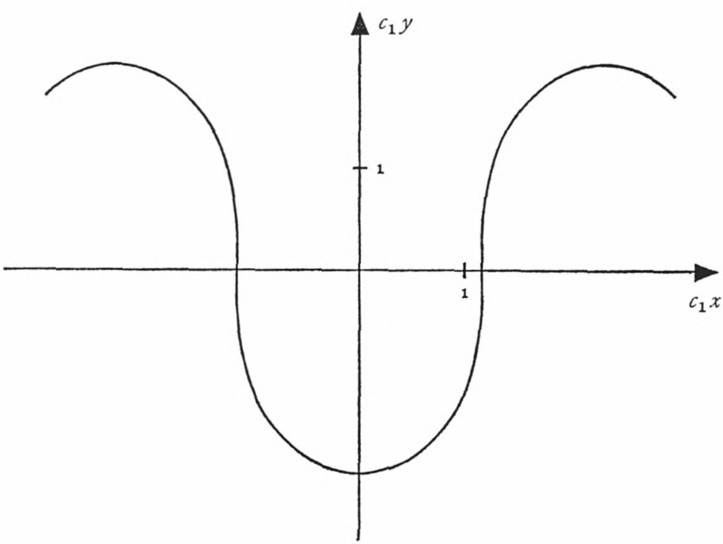
$$\varkappa(s) = c_1 \operatorname{cn}\left(\frac{c_1}{\sqrt{2}} s + c_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{27}$$

Auch die weitere Integration gelingt mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen.[1] Gemäß $\alpha(s) = \alpha_0 + \int_{s_0}^{s} \varkappa ds'$, $x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\alpha ds'$, $y(s) = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\alpha ds'$ ergibt sich für die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten der Kurve mit $\frac{c_1}{\sqrt{2}} s + c_2 = u$ (und unter Weglassung der belanglosen Integrationskonstanten, welche nur deren Lage bestimmen)

$$x = \frac{\sqrt{2}}{c_1}\left\{2\,\mathrm{zn}\,u + \left(\frac{2\mathbf{E}}{\mathbf{K}} - 1\right)u\right\} \tag{28}$$

$$y = -\frac{2}{c_1}\mathrm{cn}\,u.$$

Die vollständigen elliptischen Normalintegrale $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{E}(k)$ haben für den Modul $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ die Werte[2] $\mathbf{K} = 1{,}8541$, $\mathbf{E} = 1{,}3506$. $y(x)$ ist periodisch mit der Periode $\frac{4\sqrt{2}}{c_1}(2\mathbf{E} - \mathbf{K})$. Die Kurve wird durch das nachstehende Bild wiedergegeben.



[1] Entsprechende Formeln finden sich z. B. bei F. Tricomi: Elliptische Funktionen. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1948.

[2] E. Jahnke u. F. Emde: Tafeln höherer Funktionen. 5. Aufl. Teubner Leipzig 1952.

Andere Lösungen von (22) als die genannten aufzufinden, dürfte schwieriger sein. Jedenfalls wäre es aber interessant, die Lösungsgesamtheit dieser Gleichung genauer zu untersuchen sowie aus (18) auch hinreichende Bedingungen für die geforderte Minimaleigenschaft herzuleiten.