BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1972

MÜNCHEN 1973

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Komission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Einführende Bemerkungen (Ludwig Biermann) zu der Vorlage der nachgelassenen Arbeiten von A. Wilkens über die Bewegungen von Planetoiden

„Zur Theorie der nahezu kommensurablen Bewegungen der Planetoiden des Thule-Typus“

und

„Zur Störungstheorie der Planetoiden des Hilda-Typus nebst Erweiterung auf das System der großen Planeten Pluto – Neptun“.

Zwischen den erdähnlichen Planeten und dem Jupiter bewegt sich eine große Zahl von sogenannten kleinen Planeten, deren innerste die Erdbahn noch schneiden, während die Bahn der äußersten etwa mit der Jupiter-Bahn zusammenfällt. Die letzteren, die Gruppe der sogenannten Trojaner, bilden mit dem Jupiter stets ein ungefähr gleichseitiges Dreieck, d. h. sie gehen dem Planeten entweder um etwa 60° voran oder aber sie folgen ihm in diesem Abstand. Die Theorie dieser Bahnen ist im Zusammenhang mit dem Dreikörperproblem schon von Lagrange behandelt worden, und ihre Stabilität ist schon seit langem bekannt.

Die Gesamtzahl der kleinen Planeten ist von der Größenordnung 10^5 (von denen 1% bekannt sind), bei einer Gesamtmasse von etwa $^1/_{1000}$ der Erdmasse. Die mittleren Radien der meisten dürften also nur von der Größenordnung 10 bis 20 km sein, ähnlich den Kernen großer Kometen.

Zwischen einem Sonnenabstand von etwas über 2 a. E. und etwa $3\frac{1}{2}$ a. E. bilden die kleinen Planeten eine ziemlich dichte Verteilung, die nur bei bestimmten Werten durch eine deutliche Lücke unterbrochen ist oder aber einen Häufungspunkt aufweist. Zur genaueren Beschreibung werden die Bahnen zweckmäßig nicht durch den mittleren Abstand von der Sonne, sondern durch ihre mittlere Bewegung charakterisiert, die für den Planeten Jupiter fast genau 300 (genauer 299,13) Bogensekunden pro Tag beträgt.* Es zeigt sich nun, daß, wenn wir zunächst nach innen gehen, bei dem Dreifachen dieses Wertes, 897 Bogensekunden, eine ausgesprochene Lücke beobachtet wird (mittlerer Abstand von der Sonne 2.5 a. E., Hestia-Lücke): Es gibt keinen bekannten kleinen Planeten mit einer mittleren täglichen Bewegung zwischen 887 und 903 Bogensekunden; in den angrenzenden Intervallen befinden sich z. B. jeweils drei kleine Planeten zwischen 903 und 904 Bogensekunden und 885 und 887 Bogensekunden, etwa entsprechend der mittleren Häufigkeit pro Bogensekundenintervall in der weiteren Umgebung dieser Stellen.** – Die nächste Lücke befindet sich bei einer mittleren Bewegung von etwa 750 Bogensekunden pro Tag, dem $2\frac{1}{2}$-fachen der mittleren Bewegung des Jupiter. Hier handelt es sich allerdings, ebenso wie bei der nächstfolgenden Lücke bei etwa 700 Bogensekunden, das sind 7/3 der mittleren Bewegung des Jupiter, nur um eine tiefe Einsenkung der Verteilungsfunktion, nicht um das vollkommene Fehlen von kleinen Planeten mit Werten der mittleren Bewegung, die zu derjenigen des Jupiter kommensurabel sind. – Die nächste Lücke befindet sich in der Umgebung derjenigen Stelle, bei der die mittlere Bewegung das Doppelte derjenigen des Jupiter beträgt. Diese Lücke wird im allgemeinen als Hecuba-Lücke bezeichnet, nach einem kleinen Planeten, der mit 616 Bogensekunden pro Tag eine etwas größere mittlere Bewegung besitzt. Über diesen Planeten gibt es eine Untersuchung von A. Wilkens, die im Jahre 1960 als Abhandlung unserer Akademie erschienen ist und deren Resultate zum Teil in den beiden Untersuchungen, die ich heute vorlege, wieder mit verwendet worden sind. Auch die Hecuba-Lücke ist in der gesamten Statistik durchaus auffällig, obwohl es einen kleinen Planeten gibt, der fast genau die doppelte mittlere Bewegung wie Jupiter hat.

Beim $1\frac{1}{2}$-fachen der mittleren Bewegung des Jupiter, also um den Wert 450 Bogensekunden pro Tag, gibt es nun in der Folge

---

* Ein ganzzähliges Verhältnis der Perioden oder der mittleren Bewegungen bedeutet offenbar, daß die beiden Planeten nach einer kleinen Zahl von Umläufen wieder dieselbe gegenseitige Stellung einnehmen, so daß die gegenseitigen Störungen im gleichen Sinn wirken können (Resonanz).

** Siehe z. B. die Tabelle auf S. 163, Landolt-Börnstein, neue Serie Band VI/1.

der kleinen Planeten keine Lücke, sondern vielmehr eine Gruppe von 14 kleinen Planeten, die Hilda-Gruppe, die sämtlich Werte zwischen 445 und 454 Bogensekunden pro Tag besitzen. Die eine der beiden heute vorzulegenden Arbeiten A.Wilkens' bezieht sich auf die Theorie dieser Gruppe. Die zweite Arbeit betrifft den Fall der Kommensurabilität von 4 : 3, der bei den kleinen Planeten durch den Planeten Thule mit 400,3 Bogensekunden realisiert ist. Zwischen 444 und 308 Bogensekunden pro Tag (dem größten Wert für einen der Trojaner) ist Thule der einzige Planet in diesem ganzen Bereich. Das Verhältnis 3 : 2 ist übrigens auch deswegen von besonderem Interesse, weil es zufälligerweise das Verhältnis der mittleren Bewegungen von Neptun und Pluto (der eine Art äußerer kleiner Planet ist) wiedergibt.

A.Wilkens hat sich von Beginn seiner wissenschaftlichen Laufbahn an für die Theorie des Planetensystems interessiert; seine bekanntesten Arbeiten gehören ja in dieses Gebiet. Auch nach seiner Rückkehr nach München hat er wieder Themen aus diesem Bereich aufgegriffen. Auch die in den beiden von F. Schmeidler bearbeiteten Manuskripten dargestellten Untersuchungen, die ich Ihnen heute vorlege, werden wohl immer eine wichtige Ausgangsbasis für weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand darstellen, obwohl Wilkens die Frage, warum im einen Fall eine ganze Gruppe von Planeten auf anscheinend stabilen Bahnen umläuft, während in der Mehrzahl der anderen Fälle von Kommensurabilität der Perioden tiefe Lücken in der Verteilungsfunktion vorhanden sind, soweit wir wissen nicht mehr hat klären können. Die nachfolgende Vorbemerkung von Herrn Schmeidler (Universitätssternwarte München), der sich dankenswerterweise mit großer Sorgfalt der nachträglichen Bearbeitung der nachgelassenen Manuskripte angenommen hat, enthält auch eine ausführliche Zusammenfassung der Hauptresultate.

L. B.

Vorbemerkung zu den beiden folgenden Aufsätzen

Von Felix Schmeidler, München

Die Originalmanuskripte der beiden nachfolgenden Arbeiten wurden im Nachlaß des am 27. 1. 1968 verstorbenen Professor Wilkens gefunden und der Bayerischen Akademie der Wissenschaften übergeben; aus schriftlichen Notizen von Herrn Wilkens ging hervor, daß er beabsichtigt hatte, beide Arbeiten in den Schriften der Akademie zu veröffentlichen. Da es sich in beiden Fällen offensichtlich um vorläufige Ausarbeitungen handelte, wurden die Manuskripte zunächst Herrn Kneissl und Herrn Schneider (Technische Hochschule München) zur Bearbeitung übergeben. Beide Herren mußten nach eingehender Prüfung aus Zeitgründen die Aufgabe der Herstellung einer für den Druck geeigneten Formulierung des Textes ablehnen. Daraufhin erklärte sich der Verfasser dieser Zeilen auf Bitte der Herren Schwab und Wellmann zu dieser Aufgabe bereit. Dabei war es mit freundlicher Zustimmung von Herrn Schneider möglich, die von ihm bereits geleisteten Vorarbeiten zu benutzen.

Bei der Bearbeitung wurde der Text zunächst an einigen Stellen stilistisch geändert. Weiter wurden gelegentliche sachliche Wiederholungen ausgemerzt, zu deren Beseitigung Herr Wilkens nicht mehr die Zeit gefunden hatte. Außerdem wurde die Darstellung von entbehrlichen Weitläufigkeiten befreit und hat dadurch, wie ich hoffe, an Verständlichkeit gewonnen. Daß mit diesen Maßnahmen viele technische Arbeiten wie z. B. die Umnumerierung fast sämtlicher Gleichungen verbunden waren, versteht sich von selbst.

Auch in der Sache haften den beiden Arbeiten noch einige Unvollkommenheiten an. So hat Herr Wilkens in der Arbeit über den Thule-Typus nicht mehr die Zeit gefunden, alle drei Fälle der Lösung der entscheidenden Gleichung auszuarbeiten, die die Exzentrizität als Funktion der Zeit angibt. Auch andere kleinere Mängel ähnlicher Art sind stehen geblieben. Bewußt habe ich es unterlassen, diese an sich erforderlichen Ergänzungen von mir aus vorzunehmen. Für das Verständnis des prinzipiellen Gedankengangs sind sie nicht notwendig; wer aber andrerseits die Grundidee von Herrn Wilkens für eigene Untersuchungen anwenden will, wird die fehlenden Ausführungen mit leichter Mühe ergänzen können. An den entsprechenden Stellen des Textes habe ich durch Fußnoten auf fehlende sachliche Überlegungen hingewiesen.

In diesem Zusammenhang scheint es mir nützlich, mit kurzen Worten den Grundgedanken der beiden Aufsätze zu skizzieren, der aus dem von Herrn Wilkens verfaßten Text nur durch ausführliches Studium gefunden werden kann. Sowohl im Fall des Hilda-Typus (genäherte Kommensurabilität 3 : 2) als auch im Fall des Thule-Typus (genäherte Kommensurabilität 4 : 3) werden nur diejenigen Glieder in den Störungsgleichungen berücksichtigt, die von dem langsam veränderlichen Argument ζ abhängen; dabei ist im einen Fall $\zeta = 3l' - 2l - \tilde{\omega}$, im anderen Fall $\zeta = 4l' - 3l - \tilde{\omega}$. Die Koeffizienten der Terme in ζ werden bis zum zweiten Grad der Exzentrizitäten entwickelt. Es werden also alle kurzperiodischen Störungen und unter den langperiodischen Störungen diejenigen vernachlässigt, die von den dritten und höheren Potenzen von e und e' abhängen. Unter diesen Annahmen kann eine Gleichung aufgestellt werden, die die zeitliche Ableitung von e in der Form eines quadratischen Ausdrucks in e selbst darstellt; sie ist also eine Riccati'sche Differentialgleichung. Ihre Lösung ergibt die im Rahmen der Voraussetzungen strenge Darstellung der Exzentrizität als Funktion der Zeit. Die Differentialquotienten der übrigen Bahnelemente werden als Potenzreihen nach e dargestellt, die nach Aufstellung der Integrale über e und über e^2 integriert werden können. Die naheliegende Frage nach der Stabilität der gefundenen Lösungen, die für den Vergleich mit den Beobachtungen wichtig wäre, ist nicht mehr ausdiskutiert worden.

Zur Störungstheorie der Planetoiden des Hilda-Typus nebst Erweiterung auf das System der großen Planeten Pluto-Neptun

Von A. Wilkens †

Vorgelegt am 11. Juni 1971 durch Ludwig Biermann

In dem in der Überschrift genannten Problem der Mechanik des Himmels handelt es sich um diejenigen kritischen Fälle, bei denen das Verhältnis der mittleren Bewegungen n und n' des störenden und gestörten Körpers sehr nahe im Verhältnis der beiden aufeinander folgenden ganzen Zahlen $n : n' = 3 : 2$ steht (Hilda-Typus), so daß größtmögliche Störungen der Elemente entstehen, und zwar auf Grund der Terme der Störungsfunktion mit dem Winkel-Element: $\zeta = 3\,l' - 2\,l - \bar{\omega}$ resp. $\zeta' = 3\,l' - 2\,l - \bar{\omega}'$, wo l und l' die mittleren Längen der beiden Planeten, weiter $\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}'$ die Perihellängen fixieren. Da die mittleren Bewegungen im vorliegenden Fall sehr nahe im Verhältnis zweier aufeinander folgender ganzen Zahlen stehen, so sind die Koeffizienten der genannten kritischen Glieder der Störungsfunktion in e resp. e' mindestens vom 1. Grade der Exzentrizitäten und dann weiter vom 2. und höheren Grade von e und e'. In bezug auf das analoge System der großen Planeten Pluto und Neptun ist das Verhältnis der mittleren Bewegungen sehr nahe $= \frac{3}{2}$, entsprechend dem Winkelargument der Störungsfunktion $\zeta = 3\,l' - 2\,l - \bar{\omega}$ resp. $3\,l' - 2\,l - \bar{\omega}'$, wobei also die kritische Differenz $3\,n' - 2\,n$ sehr klein ist und die Perihel-Längen-Differenz, da bei Pluto die Perihel-Länge $\bar{\omega}' = 220°\,30'$ und bei Neptun $\bar{\omega} = 43°\,41'$, so daß die Perihel-Längendifferenz $\bar{\omega} - \bar{\omega}' = 176°\,49'$, also nahe $= 180°$, als Poincarésche Bedingung für die Existenz einer periodischen Lösung: $\bar{\omega} - \bar{\omega} = 0°$ oder $180°$, neben der Kommensurabilität der mittleren Bewegungen, die bei Neptun-Pluto sehr genähert erfüllt ist. Betrachtet man weiter die räumliche Bewegung im Hinblick auf die Hauptbedingung einer räumlichen periodischen Lösung, so kommt weiter die Bedingung hinzu, daß die Differenz der Knotenlängen $\Omega - \Omega' = 0°$ oder $180°$ betragen muß, was nun überraschenderweise ebenfalls genähert erfüllt ist, indem $\Omega - \Omega' = 21° 19'$, so daß damit nun auch die Möglichkeit der Darstellung des Störungsproblems Pluto-Neptun durch eine periodische Lösung im Raum als Basis-Lösung der Gesamtdarstellung des Pluto-Neptun-Problems nahegelegt wird, nur noch zu erweitern durch eine Variation der periodischen Lösung zwecks Anschlusses der Lösung an die beobachtete Bewegung.

§ 1. Grundgleichungen des Problems.

Zuerst ist nun die Bewegungstheorie für Pluto-Neptun zu untersuchen, zunächst unter Vernachlässigung der gegenseitigen Bahn-Neigung, wobei der kritische Winkel $\zeta = 3l' - 2l - \bar{\omega}$, wo die ungestrichelten Winkel resp. Elemente dem Neptun, die gestrichelten dem Pluto entsprechen.

Dann lautet die Störungsfunktion R, zuerst im Falle der Störungen von Neptun durch Pluto, wie folgt, bis e^4 einschließlich:

$$\begin{aligned}(1)\qquad R = N_0 + N_1 \cdot e^2 + N_1' e^4 + N_2 \cdot e \cos\zeta + N_2' \cdot e^3 \cdot \cos\zeta + \\ + N_3 \cdot e^2 \cdot \cos 2\zeta + N_3' \cdot e^4 \cdot \cos 2\zeta \\ + N_4 \cdot e^3 \cdot \cos 3\zeta + N_5 \cdot e^4 \cdot \cos 4\zeta\end{aligned}$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben, nach Le Verrier in dem 10. Bande der „Annales de l'Observatoire de Paris":

$$N_0 = \frac{1}{2} m' \cdot A^0,\ N_1 = \frac{1}{4} m'(A_1^0 + A_2^0)$$

$$N_1' = \frac{3}{16} m'(A_3^0 + A_4^0),\ N_2 = \frac{1}{2} m'(-6A_0^3 - A_1^3)$$

$$N_2' = \frac{1}{8} m'(66A_0^3 + 9A_1^3 - 8A_2^3 - 3A_3^3)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} m'(57A^6 + 11A_1^6 + 1A_2^6)$$

$$N_3' = \frac{1}{16} m'(-1658A^6 - 331^1/_3 A_1^6 + 14A_2^6 + 24A_3^6 + 4A_4^6)$$

$$N_4 = \frac{1}{8} m'(-606A^9 - 123A_1^9 - 16A_2^9 - 1 \cdot A_3^9)$$

$$N_5 = \frac{1}{16} m'(f_1 \cdot A^{12} + f_2 A_1^{12} + f_3 A_2^{12} + f_4 A_3^{12} + 1 \cdot A_4^{12})$$

wobei noch zu bemerken bleibt, daß die Gaußsche Konstante $= 1$ gesetzt wurde.

Die 4 Variabeln unseres zunächst ebenen Problems sind: $a =$ große Halbachse der Neptuns- resp. Hilda-Bahn, e die Bahn-Exzentrizität, $\bar{\omega}$ die Perihel-Länge und ζ der kritische Winkel: $\zeta = 3l' - 2l - \bar{\omega}$. Die Differential-Gleichungen der durch den großen Planeten Pluto (Jupiter) gestörten Planeten Neptun (Hilda), lauten dann, der Störungstheorie entsprechend, folgendermaßen, im Falle der ebenen Bewegung (ε Länge für $t = 0$):

(2)

$$\frac{d(\sqrt{a})}{dt} = \frac{\partial R}{\partial l}, \quad \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left[\frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} + \left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial l}\right]$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = 3n' - 2n + 4\sqrt{a}\cdot\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left(3 - 2\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial e}$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\cdot\frac{\partial R}{\partial e},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Da nach Definition $\zeta = 3l' - 2l - \bar{\omega}$ und das einzige Winkel-Argument bei unserer Darstellung ist, so folgt hieraus unmittelbar die nützliche Beziehung zwischen den Ableitungen nach l und $\bar{\omega}$:

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{1}{2}\frac{d\sqrt{a}}{dt} \tag{3}$$

gemäß der 1. Gleichung von (2), so folgt bei Substitution der soeben abgeleiteten Ausdrücke für $\frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}}$ und $\frac{\partial R}{\partial l}$ in die Gleichung (2) für $\frac{de}{dt}$:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left[\frac{1}{2}\frac{d(\sqrt{a})}{dt} + \left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)\frac{d(\sqrt{a})}{dt}\right],$$

welche Gleichung wir noch auf die folgende Form bringen wollen:

$$\sqrt{a}\cdot\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{de}{dt} = -\frac{d(\sqrt{a})}{dt}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{1-e^2}\right),$$

so daß bei Umformung der linken Seite entsteht:

$$\sqrt{a}\cdot\frac{d}{dt}\left[\sqrt{1-e^2}\right]=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d(\sqrt{a})}{dt},$$

so daß weiter, rechts beginnend:

$$\frac{3}{2}\frac{d(\sqrt{a})}{dt}=\sqrt{a}\cdot\frac{d(\sqrt{1-e^2})}{dt}+\sqrt{1-e^2}\,\frac{d\sqrt{a}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{a(1-e^2)}\right),$$

so daß bei Integration das folgende Integral erhalten wird:

$$\frac{3}{2}\sqrt{a}=\sqrt{a(1-e^2)}+\text{const.}, \tag{4}$$

in Analogie zum Hecuba-Problem in meiner Abhandlung „Zur Theorie der nahezu kommensurablen Bewegungen der Planeten vom Hecuba-Typus" in den Sitzungsberichten der Bayer. Akademie der Wiss., 1960, pg. 227–249. Da weiter nach (4) bei $e < 1$ unmittelbar ersichtlich ist, daß die Integrationskonstante: const. > 0 sein muß; werde sie gleich $\frac{1}{2}\sqrt{a_*}$ gesetzt, so daß bei Potenzentwickelung nach e bis e^2 entsteht:

$$\sqrt{a}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^2\right)=\frac{1}{2}\sqrt{a_*}, \tag{4a}$$

so daß:

$$\sqrt{a}=\sqrt{a_*}(1-e^2+\cdots),$$

oder auch weiter:

$$a=a_*(1-2e^2+\cdots). \tag{5}$$

Hieraus folgt unmittelbar in bezug auf die mittlere Bewegung:

$$n=\frac{1}{a^{3/2}}=n_*(1+3e^2+\cdots), \tag{5a}$$

so daß die Konstante n_*, ausgedrückt noch durch die mittlere Bewegung n_0 im Zeitpunkt $t = t_0$:

$$n_*=n_0(1-3e_0^2+\cdots). \tag{5b}$$

Analog gilt, der Gleichung (5) entsprechend:

$$a_*=a_0(1+2e_0^2+\cdots).$$

Auf der Suche nach weiteren Integralen geht nun die 2. Gleichung von (2) unter Benutzung der Beziehung (3), in die neue Form über:

$$(6)\qquad \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial l},$$

wo nach (1)

$$(7)\qquad \frac{\partial R}{\partial l} = \varepsilon_1 e \sin\zeta + \varepsilon_2 e^2 \sin 2\zeta + \varepsilon_3 e^3 \sin 3\zeta$$

mit

$$(8)\qquad \varepsilon_1 = 2N_2,\ \varepsilon_2 = 4N_3,\ \varepsilon_3 = 6N_4.$$

Unter Benutzung von (4a) für die Entwicklung von $\sqrt{a}$ ergibt sich:

$$(9)\qquad \frac{de}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{a_*}}\left(\varepsilon_1 \cdot \sin\zeta + e\varepsilon_2 \cdot \sin 2\zeta + \frac{3}{2}\varepsilon_1 e^2 \sin\zeta\right).$$

Da nun weiter gemäß Definition von ζ nach (1), wo noch die mittlere Länge $l = \varepsilon + \int n \cdot dt$ und ε die mittlere Länge der Epoche, so wird die Differentialgleichung für ζ zunächst:

$$(10)\qquad \frac{d\zeta}{dt} = 3n' - 2n - 2\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\bar{\omega}}{dt},$$

wo n bereits nach (5a) als Funktion von a_* resp. n_* und e dargestellt ist, indem

$$(10\text{a})\qquad n = n_*(1 + 3 \cdot e^2 + \ldots).$$

Weiter lauten nun die Darstellungen von $\frac{d\varepsilon}{dt}$ und $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ (s. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste Bd. 1, pag. 169) wie folgt:

$$(11)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 \cdot e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial e}$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 \cdot e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e},$$

so daß die Differential-Gleichung für $\frac{d\zeta}{dt}$ die folgende Form erhält:

$$(12)\qquad \frac{d\zeta}{dt} = z_0 + z_1 \cdot e^2 + \left(z_2 \cdot e + \frac{z_3}{e}\right)\cos\zeta + (z_4 + z_5 \cdot e)\cos 2\zeta$$

mit folgender Bedeutung der Koeffizienten:

(13)

$$z_0 = 3n' - 2n - \frac{2}{\sqrt{a}} N_1 + \frac{2}{na} \frac{\partial N_0}{\partial a}, \; z_1 = -6n_* + \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial a}$$

$$z_2 = \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial a}, \; z_3 = -\frac{1}{\sqrt{a}} N_2, \; z_4 = -\frac{2}{\sqrt{a}} N_3, \; z_5 = \frac{2}{na} \frac{\partial N_3}{\partial a}$$

wobei noch die von a direkt wie indirekt abhängigen Funktionen nebst ihren Ableitungen nach a noch nach Potenzen von e zu entwickeln bleiben, weil nach (5) $a = a_*(1 - 2e^2)$. Folglich wird weiter, da $n = a^{-3/2}$: $n = n_*(1 + 3 \cdot e^2 + \cdots)$, also auch noch zur Definition von n_*: $n_* = n_0(1 - 3e_0^2 + \cdots)$. Analog sind weiter auch die Funktionen N_i resp. deren Ableitung nach a auch noch nach Potenzen von e bis e^2 zu entwickeln, so daß in (13) anstelle von $2n$ treten muß: $2n = 2n(1 + 3 \cdot e^2 + \cdots)$. Ferner lautet der nächste Term in z_0: $-\frac{2}{\sqrt{a}} N_1$, also bei Entwickelung:

$$-\frac{2}{\sqrt{a}} \cdot N_1 = -\frac{2}{\sqrt{a_*}} \left[N_1^* + e^2 \left(N_1^* - 2a_* \left(\frac{dN_1}{da}\right)_*\right)\right].$$

Analog wird weiter in bezug auf den nächsten Term:

(14)

$$\frac{1}{na} \cdot \frac{\partial N_0}{\partial a} = \sqrt{a} \cdot \frac{\partial N_0}{\partial a} = \sqrt{a_*}\,(1 - e^2) \left[\frac{dN_0}{da} + (a - a_*) \frac{d^2 N_0}{da^2}\right],$$

wo weitere Entwickelung unnötig, weil bereits: $a - a_* = -2a_* e^2 + \cdots$, so daß, geordnet nach Potenzen von e^2:

$$\text{(14a)} \quad \frac{2}{na} \frac{dN_0}{da} = 2\sqrt{a_*} \left[\left(\frac{dN_0}{da}\right)_* + e^2 \left(-\frac{dN_0}{da} - 2a_* \left(\frac{d^2 N_0}{da^2}\right)\right)\right].$$

Der nächste Term, der 2. Term in (12): $z_1 \cdot e^2$ benötigt, weil schon vom 2. Grade in e keine weitere Entwickelung nach e, so daß nur formal zu setzen ist:

$$\text{(15a)} \qquad z_1 = -6n_* + \frac{2}{n_* a_*} \left(\frac{dN_1}{da}\right)_*,$$

wobei immer zu beachten ist, daß anstelle von n, $2n'$ in der früheren Abhandlung (1960) zum Hecuba-Problem hier immer $2n$, $3n'$ zu setzen ist, soweit n nur explizit allein ohne Koeffizienten N etc. in der Verbindung $3n' - 2n$ statt früher $2n' - n$

vorkommt. Weiter ist im nächsten Term von (12) mit $\cos\zeta$ als gemeinsamem Faktor der 1. Term $z_2 \cdot e$ nicht zu ergänzen, weil der Zusatz-Term mit e^3 als Faktor wegfällt, so daß:

$$z_2 = 2\sqrt{a_*}\cdot\frac{dN_2^*}{da}. \tag{15b}$$

Dagegen ist in (12) der nächste Summend:

$$\frac{z_3}{e} = -\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}N_2$$

in bezug auf die beiden Faktoren $\frac{1}{\sqrt{a}}$ und N_2 zu entwickeln; aus der obigen Entwickelung (5) von $\sqrt{a}$ nach e folgt zuerst:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_*}}(1 + e^2 + \cdots)$$

und ferner:

$$N_2(a) = N_2(a_*) - 2a_* e^2\left(\frac{dN_2}{da}\right)_* + \cdots,$$

so daß weiter in bezug auf $\frac{1}{e}z_3$, z_4, z_5 in (12) immer bis e^2 einschließlich folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e}z_3 &= -\frac{1}{e}\frac{1}{\sqrt{a_*}}\left\{N_2(a_*) + e^2\left[N_2(a_*) - 2a_*\left(\frac{dN_2}{da}\right)_*\right]\right\}\\
z_4 &= -\frac{2}{\sqrt{a_*}}\left\{N_3(a_*) + e^2\left[N_3(a_*) - 2a_*\left(\frac{dN_3}{da}\right)_*\right]\right\}\\
z_5 &= 2\sqrt{a_*}\left(\frac{dN_3}{da}\right)_*
\end{aligned} \tag{16}$$

womit die Darstellung von (12): $\frac{d\zeta}{dt}$ als Funktion von a, e, beendet ist. Deshalb verbleiben zur Integration die beiden Differentialgleichungen (9) und (12) in bezug auf e und ζ.

Verzichten wir, wie im Falle des Hecuba-Typus, vorübergehend, für einen ersten Überblick, auf alle Potenzen von e, so reduzieren sich die Differential-Gleichungen (9) und (12) auf die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{de}{dt} = \varepsilon_1' \sin\zeta \quad \text{und} \quad e\frac{d\zeta}{dt} = z_3\cdot\cos\zeta, \quad \text{mit}\; \varepsilon_1' = -\frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{a_*}}, \tag{17}$$

so daß also bei Elimination von t zwecks Erlangung eines Integrals bei Division folgt:

$$\frac{d(\ln e)}{d\zeta} = f \cdot \operatorname{tg} \zeta, \text{ wo } f = \frac{\varepsilon_1'}{z_3} = -1,$$

so daß bei Integration folgt: $\ln e = -f \ln(\cos\zeta) + C$, wo C = Integrationskonstante, und weiter folgt

(17a): $$e(\cos\zeta)^f = E^C = C' > 0,$$

wo E die Basis der natürlichen Logarithmen. Da nun $f = -1$ und immer $C' > 0$, wird weiter immer: $e = C' \cdot \cos\zeta > 0$, so daß immer $\cos\zeta > 0$ sein muß, also ζ immer im 1. oder 4. Quadranten liegen muß, im Sinne einer periodischen Lösung um $\zeta = 0°$.

Kehren wir nun zum allgemeinen Falle der Integration der Differential-Gleichungen (9) und (12) zurück, so erhalten wir unter Elimination der nur in dt explizit auftretenden Zeit bei Division der beiden Gleichungen die neue Differential-Gleichung

(18) $$e \cdot \frac{d\zeta}{de} = -\frac{[z_0 e + z_3 \cos\zeta + z_4 e \cos 2\zeta]\, 2\sqrt{a_*}}{\varepsilon_1 \sin\zeta + \varepsilon_2 e \sin 2\zeta},$$

unter Weglassung im Zähler der Terme 2. und höheren Grades in e: $z_1 \cdot e^3$, $z_2 \cdot e^2$ und $z_5 \cdot e^2$. Wird dann weiter der gemeinsame Faktor $\sin\zeta$ aller Terme im Nenner von (18) auf die linke Seite gebracht, so folgt die neue Form von (18):

(19) $$e \cdot \sin\zeta \cdot \frac{d\zeta}{de} = -2\sqrt{a_*}(z_0 e + z_3 \cos\zeta + z_4 e \cos 2\zeta): (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cdot e \cos\zeta);$$

bei Substitution von $\cos\zeta = y$, also $\cos 2\zeta = 2 \cdot y^2 - 1$ folgt nach (19) die neue Gleichung:

(19a) $$e \cdot \frac{dy}{de} = 2e^2 \frac{dy}{de^2} = -2\sqrt{a_*}\,[z_0 \cdot e + z_3 \cdot y + z_4(2y^2 - 1)e]: [\varepsilon_1 + 2e\varepsilon_2 \cdot y]$$

mit der Anmerkung, daß der Faktor e von z_4 in der Abhandlung 1960: Zur Theorie der nahezu kommensurablen Bewegungen der Planeten vom Hecula-Typus, pg. 236, oben in (19a) als vergessen nachzutragen ist. Bei der nun weiteren Entwickelung der rechten Seite von (19a) nach Potenzen von e, unter Beachtung, daß das Verhältnis $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 2\frac{N_3}{N_2}$ als von der Größen-Ordnung 0 zu betrachten ist, folgt weiter, wenn

$$e^2 = x \quad \text{und} \quad \cos\zeta = y \tag{19b}$$

gesetzt wird, die neue Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\varepsilon_1' x}\left[\beta_0(x) + \beta_1(x)y + \beta_2(x)\cdot y^2\right], \tag{19c}$$

wobei

$$\beta_0(x) = (z_0 - z_4)\sqrt{x},\ \beta_1(x) = z_3,\ \beta_2(x) = 2\sqrt{x}\left(z_4 - z_3\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right),$$

oder allgemein

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)\cdot y + \alpha_2(x)y^2, \tag{20}$$

wo die Koeffizienten explizit die folgende Bedeutung haben:

$$\alpha_0(x) = -\frac{1}{2\varepsilon_1}(z_0 - z_4)\frac{1}{\sqrt{x}},\ \alpha_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{z_3}{\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{x}, \tag{21a}$$

$$\alpha_2(x) = -\frac{z_4 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}z_3}{\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Die Grundgleichung (20) hat die typische Form der allgemeinen *Riccatischen Differentialgleichung*, wie sie sich schon in meiner vorhergehenden Abhandlung: „Zur Theorie nahezu kommensurabler Bewegungen im System der Planetoiden des Sonnensystems" in den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1959, pg. 61–101 im Falle des Hestia-Problems präsentierte. In bezug auf die Lösung ist zu bemerken, daß der variable Parameter $x = e^2$ als klein vom 2. Grade betrachtet wird, während $y = \cos\zeta$ jeden Wert $|y| < 1$ annehmen kann.

Vor der Lösung der Differentialgleichung (20) sind noch die Koeffizienten umzuformen, indem zunächst

$$e = \sqrt{x} = \xi \tag{21b}$$

eingeführt wird, so daß die Koeffizienten die folgende neue Form erhalten:

$$\alpha_0(x) = -\frac{1}{2\varepsilon_1}(z_0 - z_4)\cdot\frac{1}{\xi},\ \alpha_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{z_3}{\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{\xi^2}, \tag{21c}$$

$$\alpha_2(x) = -\frac{z_4 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}z_3}{\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{\xi}.$$

Schließlich werde noch gesetzt:

$$y = \cos\zeta = \delta_0 + \eta, \tag{22}$$
$$\text{wo } \delta_0 = \text{const.} = \cos\zeta_0 - \eta_0 \quad \text{für } t = t_0.$$

Durch die Einführung der neuen Variablen ξ, η folgt der Übergang der Differential-Gleichung (20) auf eine neue Form, wobei noch zuerst:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{2\xi} \cdot \frac{d\eta}{d\xi},$$

so daß sich hiernach und weiter nach (20) und (22) die neue Gleichung ergibt:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2\xi \frac{dy}{dx} = 2\xi\left[\alpha_0 + \alpha_1(\delta_0 + \eta) + \alpha_2(\delta_0 + \eta)^2\right], \tag{23}$$

wo die Koeffizienten α_i bereits oben nach (21 c) als Funktionen von ξ dargestellt wurden. Da nun aber die Faktoren $\xi\alpha_0(x)$ und $\xi\alpha_2(x)$ nach (21 c) frei vom Faktor ξ sind, während der Term $\xi\alpha_1$ noch den Nenner ξ enthält, so geht die Gleichung (23) nach Multiplikation mit dem Faktor ξ in die folgende, rechts vom Nenner ξ freie Gleichung über:

$$\xi \frac{d\eta}{d\xi} = k_0 + k_1\xi + k_2\eta + k_3\xi\eta + k_4\xi\eta^2, \tag{24}$$

in welcher die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$k_0 = -\frac{z_3}{\varepsilon_1'}\delta_0, \quad k_1 = -\frac{z_0 - z_4}{\varepsilon_1'} - \frac{2\delta_0^2\left(z_4 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}z_3\right)}{\varepsilon_1'} \tag{25}$$

$$k_2 = -\frac{z_3}{\varepsilon_1'}, \quad k_3 = -\frac{4\delta_0\left(z_4 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}z_3\right)}{\varepsilon_1'}, \quad k_4 = -\frac{2\left(z_4 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}z_3\right)}{\varepsilon_1'}.$$

Die Differentialgleichung (24) läßt sich nun in die typische Form der Briot-Bouquet'schen Differentialgleichung überführen, wenn man den konstanten Term k_0 in (24) durch die Substitution $k_0 + k_2\eta = y$ eliminiert; wird weiter $\xi = e = x$ gesetzt, dann lautet die neue Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = l_1 x + l_2 y + l_3 xy + l_4 xy^2, \tag{26}$$

wobei die neuen Koeffizienten l_i als Funktionen der k_i die folgende Bedeutung haben:

$$l_1 = k_1 k_2 - k_0 k_3 + \frac{k_4}{k_2} k_0^2, \quad l_2 = k_2 \tag{27}$$

$$l_3 = k_3 - \frac{2 k_4 k_0}{k_3}, \quad l_4 = \frac{k_4^2}{k_2}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung (26) ist dann nach dem Theorem von Briot-Bouquet allgemein eine gewöhnliche Potenzreihe nach e, so daß:

$$y = \cos \zeta = \delta_0 + \delta_1 e + \delta_2 e^2 + \cdots, \tag{28}$$

wo

$$\delta_0 = \cos \zeta_0 - \delta_1 \cdot e_0 - \delta_2 \cdot e_0^2$$

und die δ_i nach Substitution von (28) in (26) beim Vergleich der Koeffizienten gleich hoher Potenz von x erhalten werden. Die Lösung (28) unterliegt noch der Bedingung von Briot-Bouquet, daß $k_2 = l_2$ keine positive ganze Zahl sein darf, indem die Lösung sonst einen Pol bei $e = 0$ erhielte. Man kann aber in diesem Fall die Lösung nach Potenzen von $e - e_0$ entwickeln. Multipliziert man die Potenzen von $e - e_0$ aus, dann erhält man eine Darstellung der Lösung durch Potenzen von e, die in der Umgebung von $e = e_0$ richtig ist.

Zur nun weiteren Ableitung von $e = e(t)$ setzen wir abkürzend zunächst, nach (9):

$$-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a_*}} = \varepsilon_1', \quad -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{a_*}} = \varepsilon_2', \tag{29}$$

so daß

$$\frac{de}{dt} = \left[\varepsilon_1' + 2 e \varepsilon_2' \cos \zeta + \frac{3}{2} e^2 \cdot \varepsilon_1'\right] \sin \zeta, \tag{30}$$

wo rechts zuerst:

$$y = \cos \zeta = y_0 + y_0' \tau + \frac{1}{2} y_0'' \tau^2 \tag{30a}$$

mit

$$\tau = e - e_0$$

und analog $\sin \zeta$ in Potenz-Reihen nach e umzuformen sind, um $\frac{de}{dt}$ als eine Potenz-Reihe nach e zu erhalten.

Zuerst ist also, nach oben, zur Bestimmung der Koeffizienten δ_i von (28) in (26) sukzessive $\frac{dy}{dx} = \delta_1 + 2\,\delta_2 \cdot x + 3\,\delta_3 \cdot x^2$, ferner: $x \cdot y = \delta_0 x + \delta_1 x^2 + \delta_2 x^3 + \cdots$, $x \cdot y^2 = x(\delta_0^2 + 2\,\delta_0\delta_1 x + \cdots)$ einzusetzen, so daß nach (26) folgt:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = x(y_0' + \tau y_0'' + \cdots) = l_1 x + l_2(y_0 + \tau y_0' + \cdots) + \\ + l_3 x(y_0 + \tau y_0' + \cdots) + l_4 x(y_0 + \tau y_0' + \cdots)^2,$$

also zusammenfassend nach Potenzen von τ, da $x = e_0 + \tau$:

$$e_0 y_0' = l_1 e_0 + l_2 y_0 + l_3 e_0 y_0 + l_4 e_0 y_0^2$$
$$y_0' + e_0 y_0'' = l_1 + l_2 y_0' + l_3 e_0 y_0' + l_3 y_0 + l_4 y_0^2 + 2\,l_4 e_0 y_0 y_0'$$

Mithin ergeben sich folgende Darstellungen der Koeffizienten δ_i:

(31) $$\delta_0 = y_0 - e_0 y_0' - \frac{1}{2} e_0^2 y_0''$$

$$\delta_1 = y_0' - e_0 y_0'', \quad \delta_2 = \frac{1}{2} y_0''$$

δ_3 ist überflüssig, da $y = \cos\zeta$ nur bis x^2 entwickelt wird, womit nun oben (28) entsprechend, $\cos\zeta$ als Potenzreihe nach e bis e^2 einschließlich dargestellt ist. Es bleibt noch die Darstellung von $\sin\zeta$ als Potenzreihe nach e; von $\cos\zeta$ ausgehend ergibt sich dann:

(32) $$\sin\zeta = \sqrt{1 - \cos^2\zeta} = \sqrt{1 - \delta_0^2}\,(1 + q_1 \cdot e + q_2 \cdot e^2 + \cdots) = \\ = \sigma_0 + \sigma_1 \cdot e + \sigma_2 e^2,$$

wo $$\sigma_0 = \sqrt{1 - \delta_0^2}$$

(33) $$\sigma_1 = q_1 \sqrt{1 - \delta_0^2}, \quad \sigma_2 = q_2 \sqrt{1 - \delta_0^2},$$

und wo noch

$$q_1 = -\frac{\delta_0\delta_1}{1 - \delta_0^2}, \quad q_2 = -\frac{\delta_0\delta_2 + \delta_1^2}{1 - \delta_0^2} - \frac{1}{2} q_1^2$$

und die δ_i in (31) definiert sind.

Als nächster Schritt verbleibt nun die Substitution der Darstellung von $\sin\zeta$ und $\cos\zeta$ in die Differentialgleichung (30) für

$\frac{de}{dt}$, um damit die Ableitung als Potenzreihe nach e zu erhalten, unter Beschränkung der Entwicklung bis zum 2. Grade in e einschließlich, womit dann die neue Differentialgleichung in e erhalten wird:

$$\frac{de}{dt} = g_0 + g_1 e + g_2 e^2, \tag{34}$$

wo so die Koeffizienten g_0, g_1, g_2 die folgende Bedeutung haben:

$$g_0 = \varepsilon_1' \sigma_0,\ g_1 = \varepsilon_1' \sigma_1 + 2\varepsilon_2' \delta_0 \sigma_0,\ g_2 = \varepsilon_1' \sigma_2 + 2\varepsilon_2' \delta_1 \sigma_0 + \\ + 2\varepsilon_2' \delta_0 \sigma_1 + \frac{3}{2} \varepsilon_1' \sigma_0.$$

Die Integration von (34) ergibt dann zunächst:

$$g_2(t - t_0) + C = \int \frac{de}{e^2 + 2be + c}, \quad \text{wo} \quad b = \frac{1}{2}\frac{g_1}{g_2}, \quad c = \frac{g_0}{g_2}, \tag{35}$$

so daß die Form und Eigenschaft des Integrals abhängig ist von der Ungleichheit:

$$b^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{g_1}{g_2}\right)^2 \gtrless c, \tag{35a}$$

so daß im 1. Falle eine logarithmische, im 2. Falle eine arc-tg-Lösung und schließlich im 3. Falle, wo $b^2 = c$, eine algebraische Form der Lösung eintritt. Explizit lauten die Lösungen dann wie folgt, zuerst wo $b^2 > c$, wenn noch $E^{2\sqrt{b^2 - c}\,[g_2(t - t_0) + C]} = F(t)$ gesetzt wird

$$e_1 = \frac{(b + \sqrt{b^2 - c})\,F(t) - b + \sqrt{b^2 - c}}{1 - F(t)}, \tag{36$_1$}$$

so daß bei $e = e_0$ bei $t = t_0$ zur Berechnung von $C = C(e_0)$ folgt:

$$E^{2\sqrt{b^2 - c}\,C} = \frac{b - \sqrt{b^2 - c} + e_0}{b + \sqrt{b^2 - c} + e_0}.$$

Im 2. Falle, wo $b^2 < c$, folgt nach (35):

$$g_2(t - t_0) + C = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{e + b}{\sqrt{c - b^2}},$$

so daß bei Umkehrung:

$$e_2 = -b + \sqrt{c - b^2}\, \operatorname{tg}\left[\sqrt{c - b^2}\, g_2(t - t_0) + \sqrt{c - b^2}\, C\right], \tag{36$_2$}$$

so daß bei $t = t_0$ und Auflösung nach C als Funktion von e_0 folgt:

$$\operatorname{tg}\left[C\sqrt{c-b^2}\right] = \frac{e_0+b}{\sqrt{c-b^2}}.$$

Weiter wird im 3. Falle, wo $b^2 = c$ nach (35):

$$g_2(t-t_0) + C = -\frac{1}{e+b},$$

also bei Auflösung nach e:

$$(36_3) \qquad e_3 = -b - \frac{1}{g_2(t-t_0)+C}.$$

§ 2. Die Perihelbewegung

Die der Perihelbewegung entsprechende Differentialgleichung lautet, von den Gliedern der Bahn-Neigung abgesehen, wie folgt

$$(37) \qquad \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},$$

worin nach Definition von R nach (1) zu substituieren ist:

$$(37\text{a}) \qquad \frac{1}{e}\frac{\partial R}{\partial e} = 2N_1 + \frac{1}{e}N_2\cos\zeta + 2N_3\cos 2\zeta,$$

so daß also auf der rechten Seite alle Terme vom Grade 0 in e sind, außer in bezug auf den 2. Term rechts, der bei Entwicklung von N_2 nach e einen Term in e^2, also in $\frac{1}{e}N_2$ einen Term in e^1N_2 ergeben würde, der aber wegfällt, weil in (37a) Terme höher als e^0 wegfallen sollen; da deshalb die Terme $N_1 = (N_1)_*$, $N_2 = (N_2)_*$ und $N_3 = (N_3)_*$ als Konstanten zu betrachten sind, verbleiben in (37a) als zu integrierende Teile:

$$(38\text{a}) \qquad J_1 = \int\frac{\cos\zeta}{e}\,dt$$

und

$$(38\text{b}) \qquad J_2 = \int\cos 2\zeta\,dt,$$

wobei nach (28): $\cos\zeta = \delta_0 + \delta_1 e + \delta_2 e^2$ und die δ_i nach (31) dargestellt sind. Zuerst werde nun die Integration von (38b): J_2 durchgeführt. Da $\cos 2\zeta = 2\cos^2\zeta - 1$ ist, folgt bei Substitution gemäß (28): $\cos 2\zeta = -1 + 2\,[\delta_0^2 + 2\,\delta_0\delta_1 e + (2\,\delta_0\delta_2 + \delta_1^2)e^2]$, also bei Integration von J_2:

$$(38\text{c})\quad J_2 = \int \cos 2\zeta\, dt = (2\,\delta_0^2 - 1)\,(t - t_0) + 4\,\delta_0\delta_1 \int e\,dt + (4\,\delta_0\delta_2 + 2\,\delta_1^2)\int e^2 dt.$$

Weiter wird nach (38a): $J_1 = \int \frac{\cos\zeta}{e}\,dt = \delta_0 \int \frac{dt}{e} + \delta_1 (t - t_0) + \delta_2 \int e\,dt$. Es verbleibt also die Integration der 3. Integrale: $\int e\,dt$, $\int \frac{1}{e}\,dt$ und $\int e^2 dt$, wo das $\int \frac{dt}{e}$ direkt nach (41) resp. (42a) resp. (42b) der Akademieschrift als Funktion der Zeit dargestellt folgen. Es ist nach (42b):

$$J_1' = \int \frac{dt}{e} = \frac{1}{K}\left[-\frac{K(t - t_0) + A}{\beta} + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\ln\left(\alpha E^{K(t - t_0) + A} - \beta\right)\right],$$

so daß J_1 aus einem Säkular-Term und einem logarithmischen Term in t zusammengesetzt ist. Weiter bleibt das Integral $J_3' = \int e\,dt$, dessen Lösung in (43b) pg. 245 meiner oben genannten Abhandlung gegeben ist; danach ist

$$J_3' = \int e\,dt = \frac{1}{K}\ln\frac{\left[1 - E^{K(t_0 - t_0) + A}\right]^{\beta - \alpha}}{E^{[K(t - t_0) + A]\beta}}.$$

Schließlich verbleibt nach (38b) hier oben das Integral $\int e^2 dt$, dargestellt auf pg. 245 unter (47) dort, so daß die entsprechenden Formeln und Resultate nicht noch einmal aufgeführt zu werden brauchen.[1]

Die obige Darstellung der Störungen der kritischen Planetoiden vom Hilda-Typus durch Jupiter, wo $\frac{n}{n'} = \frac{3}{2}$, ist nun bemerkenswerterweise unter wesentlicher Erweiterung anwendbar auch auf die Bewegungstheorie der beiden großen Planeten Neptun-Pluto, da ihre mittleren Bewegungen n und n' im schon eingangs erwähnten Verhältnis $\frac{n}{n'} = \frac{21''\!.56}{14''\!.25}$ stehen, wobei also strenge $3n' - 2n = -0''\!.31$, also bemerkenswert klein ist. Daher beginnen die kritischen Glieder mit den Termen niedrigsten d. h.

[1] Hinzuzufügen ist an dieser Stelle die Darstellung des Bahnelements ε durch Integration der fünften Gleichung in (2), die mit dem gleichen Verfahren ausgeführt werden kann. F. S.

1. Grades der Exzentrizitäten und treten also weiter in allen folgenden Graden der Exzentrizität, entsprechend den bekannten Eigenschaften der Störungsfunktion.

Unsere weitere, aber konträre Aufgabe konzentriert sich nun auf die Diskussion der auf die Elemente a', e', ε', $\tilde{\omega}'$ von Pluto, gestört durch Neptun, bezüglichen Differentialgleichungen, zunächst aber von den Störungen i', Ω' der Bahnlage absehend. Dabei ist nun der kritische Winkel $\zeta' = 3l' - 2l - \tilde{\omega}'$ insbesondere zuerst zu untersuchen. Die zugehörige Störungsfunktion erhält dann entsprechend die folgende Form:

$$(39) \quad R' = N_0' + N_1' e'^2 + N_1'' e'^4 + N_2' e' \cos \zeta' + N_3' e'^2 \cos 2\zeta' + \\ + N_3'' e'^3 \cos \zeta' + N_4' e'^4 \cos 2\zeta' + N_4'' e'^3 \cos 3\zeta' + N_5'' e'^4 \cos 4\zeta',$$

wozu zu bemerken bleibt, daß vom Komplementärteil her keine kritischen Glieder hinzukommen, sonst aber noch die folgenden neuen Terme darzustellen sind:

$$N_0' = \frac{1}{2} A_1^0, \quad N_1' = \frac{1}{4}(A_1^0 + A_2^0), \quad N_2' = \frac{1}{2}(5A_0^2 + A_1^2),$$

$$N_3' = \frac{1}{4}(52 A_0^4 + 11 A_1^4), \quad N_4' = \frac{1}{16}(-1836 A_0^4 - 300 A_1^4)$$

$$N_1'' = \frac{1}{16}(A_1^0 + 3 A_2^0), \quad N_2'' = \frac{1}{8}(-65.5 A_0^2 - 3.5 A_1^2 + 11 A_2^2 + 3 A_3^2)$$

$$N_3'' = \frac{1}{16}(-1836 A_0^4 - 300 \mathrm{A}_1^4 + 56 A_2^4 + 32 A_3^4 + 4 \mathrm{A}_4^4)$$

$$N_4'' = \frac{1}{8}(609.5 A_0^6 + 131.5 A_1^6 + 17 A_2^6 + A_3^6)$$

$$N_5'' = \frac{1}{16}(7530 A_0^8 + 1641 A_1^8 + 247 A_2^8 + 23 A_3^8 + A_4^8).$$

Alsdann reduziert sich die Darstellung von $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ auf die folgende Form, wenn noch m die Neptun-Masse bedeutet:

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = m(2N_1' + 4N_1'' e'^2 + N_2' e'^{-1} \cos \zeta' + 2N_3' \cos 2\zeta' - \\ - 2e' N_2' \cos \zeta' + 3N_2'' e' \cos \zeta' + 2N_3'' \cos 2\zeta' + 4N_3' e'^2 \cos 2\zeta' + \\ + 3N_4'' e' \cos 3\zeta' + 4N_5'' e'^2 \cos 4\zeta',$$

wo alle Koeffizienten dem 10. Bande der „Annales de l'Observatoire de Paris" speziell auch noch pg. 59 entnommen worden sind.

Da die Störungsfunktion R' nur von dem einzigen kritischen Winkelargument ζ' und dessen Vielfachen abhängig ist, folgt analog zum früheren Falle in bezug auf die Ableitungen von R' die Beziehung:

$$(40) \qquad \frac{\partial R'}{\partial \tilde{\omega}'} = -\frac{1}{3}\frac{\partial R'}{\partial l'} = -\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\sqrt{a'}$$

entsprechend den Differentialgleichungen (2) bei Übertragung auf den Fall der gestörten Elemente: a', e', l', $\tilde{\omega}'$. Diesen letzteren entspricht nun weiter zuerst in bezug auf e' die Differentialgleichung:

$$\frac{de'}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e'^2}}{e'\sqrt{a'}}\left[\frac{\partial R'}{\partial \tilde{\omega}'} + \left(1-\sqrt{1-e'^2}\right)\frac{\partial R'}{\partial l'}\right];$$

Durch Substitution von (40) geht diese Gleichung über in:

$$\frac{de'}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e'^2}}{e'\sqrt{a'}}\left[-\frac{1}{3} + \left(1-\sqrt{1-e'^2}\right)\right]\frac{d}{dt}\sqrt{a'}$$

oder zweckmäßiger für die Integration:

$$\sqrt{a'}\,\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-e'^2}\right) = \left(\frac{2}{3}-\sqrt{1-e'^2}\right)\frac{d}{dt}\sqrt{a'}$$

oder

$$\frac{2}{3}\frac{d}{dt}\sqrt{a'} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{a'(1-e'^2)}\right),$$

woraus das Integral folgt:

$$\frac{2}{3}\sqrt{a'} = \sqrt{a'(1-e'^2)} + \text{const.}$$

Bei Potenz-Entwicklung nach e' bis e'^2 einschließlich folgt weiter:

$$\sqrt{a'}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}e'^2\right) = \text{const} = -\frac{1}{3}\sqrt{a'_*}.$$

Sind a'_0, e'_0 die Anfangswerte für $t = t_0$, so folgt für die Integrationskonstante a'_* die Darstellung:

$$a'_* = a'_0(1-3e'^2_0).$$

Weiter folgt nun die Entwicklung in bezug auf die mittlere Länge der Epoche ε' und die Perihellänge $\tilde{\omega}'$ zur Darstellung der Librationsgröße ζ', wo l' die mittlere Länge von Pluto ist.

Zunächst setzen wir analog zu (12)

(41)
$$\frac{d\zeta'}{dt} = z_0' + z_1' e'^2 + \left(z_2' e' + \frac{z_3'}{e'}\right) \cos \zeta' + (z_4' + z_5' e'^2) \cos 2\zeta' + \cdots$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$z_0' = 3n' - 2n - \frac{2}{\sqrt{a'}} N_1' + \frac{2}{n'a'} \frac{\partial N_0'}{\partial a'}, \quad z_1' = -3n' + \frac{2}{n'a'} \frac{\partial N_1'}{\partial a'},$$

$$z_2' = \frac{2}{n'a'} \frac{\partial N_2'}{\partial a'}, \quad z_3' = -\frac{1}{\sqrt{a'}} N_2', \quad z_4' = -\frac{2}{\sqrt{a'}} N_3', \quad z_5' = \frac{2}{n'a'} \frac{\partial N_3'}{\partial a'},$$

wo zu beachten bleibt, daß der Indexstrich sich auf Pluto als äußeren, durch Neptun gestörten Körper bezieht.

Da weiter nach Definition von R' Gl. (40) gilt, so entsteht:

$$\frac{de'}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e'^2}}{e'\sqrt{a'}} \left[-\frac{1}{3} \frac{\partial R'}{\partial l'} + \left(1 - \sqrt{1-e'^2}\right) \frac{\partial R'}{\partial l'}\right],$$

wobei nun nach (1) und (7) entsprechend:

$$\frac{\partial R'}{\partial l'} = \varepsilon_1' e' \sin \zeta' + \varepsilon_2' e'^2 \sin 2\zeta' + \varepsilon_3' e'^3 \sin 3\zeta'$$

mit

$$\varepsilon_1' = 2N_2', \quad \varepsilon_2' = 4N_3', \quad \varepsilon_3' = 6N_4'.$$

Ferner ist noch zu substituieren

$$\frac{1}{\sqrt{a'}} = \left(1 - \frac{3}{2} e'^2\right) \frac{1}{\sqrt{a_*'}}$$

und

$$\sqrt{1-e'^2} = 1 - \frac{1}{2} e'^2,$$

so daß weiter folgt:

$$\frac{de'}{dt} = -\frac{1-2e'^2}{e'\sqrt{a_*'}} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} e'^2\right)$$
$$\left(\varepsilon_1' e' \sin \zeta' + \varepsilon_2' e'^2 \sin 2\zeta' + \varepsilon_3' e'^3 \sin 3\zeta'\right).$$

Bei Potenzentwicklung nach e' zusammenfassend folgt daraus

(42) $$\frac{de'}{dt} = (\eta_1' + \eta_1'' e'^2) \sin \zeta' + \eta_2' e' \sin 2\zeta' + \eta_3' e'^2 \sin 3\zeta',$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$\eta_1' = \frac{\varepsilon_1'}{2\sqrt{a_*'}}, \quad \eta_1'' = -\frac{7\varepsilon_1'}{6\sqrt{a_*'}}, \quad \eta_2' = \frac{\varepsilon_2'}{3\sqrt{a_*'}}, \quad \eta_3' = \frac{\varepsilon_3}{3\sqrt{a_*'}}.$$

Die weitere Aufgabe ist nun, ζ' als Funktion von e' darzustellen, auf der Grundlage, daß $\frac{d\zeta'}{dt}$ und $\frac{de'}{dt}$ nach (41) und (42) als Funktionen von e' und ζ' dargestellt sind. Gemäß der Darstellung von $\frac{d\zeta'}{dt}$ und $\frac{de'}{dt}$ in (41) und (42) erhalten wir nun bei Division der beiden Gleichungen unter Elimination von t die ζ' und e' entsprechende Differentialgleichung, wobei im Zähler des entsprechenden Bruches Terme in e'^3 vernachlässigt werden:

$$e' \frac{d\zeta'}{de'} = \frac{z_0' e' + (z_2' e'^2 + z_3') \cos \zeta' + z_4' e' \cos 2\zeta'}{(\eta_1' + \eta_1'' e'^2) \sin \zeta' + \eta_2' e' \sin 2\zeta' + \eta_3' e'^2 \sin 3\zeta'}.$$

Substituieren wir hierin $\sin 2\zeta' = 2 \sin \zeta' \cos \zeta'$, ferner $\sin 3\zeta' = \sin \zeta' (\cos 2\zeta' + 2 \cos^2 \zeta')$, so geht der Nenner in die folgende Form über:

$$\sin \zeta' (\eta_1' + \eta_1'' e'^2 + 2\eta_2' e' \cos \zeta' + \eta_3' e'^2 \cos 2\zeta' + 2\eta_3' e'^2 \cos^2 \zeta').$$

Wenn weiter $\cos \zeta' = y'$, also $\cos 2\zeta' = 2y'^2 - 1$ gesetzt wird, entsteht die neue Gleichung:

$$e' \frac{dy'}{de'} = -\frac{z_0' e' + (z_2' e'^2 + z_3') y' + z_4' e' (2y'^2 - 1)}{\eta_1' + 2\eta_2' e' y' + e'^2 (\eta_1'' - \eta_3' + 4\eta_3' y'^2)}. \tag{43}$$

Hier ist rechte Seite noch nach Potenzen von e' bis e'^2 einschließlich zu entwickeln.

Bei der Kompliziertheit der Koeffizienten und infolge der entsprechenden Kompliziertheit einer Lösung nach (43) wird es notwendig, die Lösung in einer Taylor-Potenz-Entwicklung von $y' = \cos \zeta'$ nach e' darzustellen, so daß also:

$$y' = \cos \zeta' = y_0' + (e - e_0) \left(\frac{dy'}{de'}\right)_0 + \frac{(e - e_0)^2}{2} \left(\frac{d^2 y'}{de'^2}\right)_0. \tag{44}$$

Die erste Ableitung ist aus (43) unmittelbar zu entnehmen. Die zweite Ableitung erhält man durch Differentiation der Gl. (43), die man zweckmäßig in der Form:

$$[\eta_1' + 2\eta_2' e' y' + e'^2 (\eta_1'' - \eta_3' + 4\eta_3' y'^2)]\, e' \frac{dy'}{de'} =$$
$$= -[z_0' e' + (z_2' e'^2 + z_3') y' + z_4' e' (2y'^2 - 1)]$$

schreibt. Die Differentiation ergibt dann:

$$(45)\quad [\eta_1' + 2\eta_2' e' y' + e'^2(\eta_1'' - \eta_3' + 4\eta_3' y'^2)]\left[\frac{dy'}{de'} + e'\,\frac{d^2y'}{de'^2}\right] +$$
$$+ [2\eta_2' y' + 2e'(\eta_1'' - \eta_3' + 4\eta_3' y'^2)]\, e'\,\frac{dy'}{de'} + 2\eta_2' e'^2\left(\frac{dy'}{de'}\right)^2 =$$
$$= -(z_0' + 2z_2' e' y' + z_4'(2y'^2 - 1)) - (z_2' e'^2 + z_3')\frac{dy'}{de'} - 4z_4' e' y'\,\frac{dy'}{de'},$$

wo Glieder mit e'^3 und höheren Potenzen weggelassen sind. Aus (43) und (45) können die beiden ersten Ableitungen von y' nach e' für $e = e_0$ berechnet werden, womit y' nach (44) als Potenzreihe nach $e' - e_0'$ dargestellt ist.

Alsdann verbleibt nur noch die Darstellung von e' als Funktion der Zeit t auf Grund der Differentialgleichung (42), zu deren Lösung zuerst $\sin(i\zeta')$, bei $i = 1, 2, 3$ als Funktionen von e' darzustellen sind. Geben wir dazu der Darstellung (44) von $\cos\zeta'$ die Form (30):

$$(46)\qquad y' = \cos\zeta' = f_0 + f_1 e' + f_2 e'^2$$

mit

$$f_0 = y_0' - e_0'\left(\frac{dy'}{de'}\right)_0 + \frac{e_0'^2}{2}\left(\frac{d^2y'}{de'^2}\right)_0,\quad f_1 = \left(\frac{dy'}{de'}\right)_0 - e_0'\left(\frac{d^2y'}{de'^2}\right)_0,$$
$$f_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y'}{de'^2}\right)_0,$$

so erhält man dann die folgende Darstellung von $\sin\zeta'$:

$$\sin\zeta' = \sqrt{1 - f_0^2 + z}\quad\text{mit}\quad z = -2f_0 f_1 e' - (f_1^2 + 2f_0 f_2)e'^2.$$

Daraus ergibt sich

$$\sin\zeta' = \sqrt{1 - f_0^2}\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{z}{1 - f_0^2} - \frac{1}{8}\,\frac{z^2}{(1 - f_0^2)^2}\right].$$

Setzt man hier z ein, dann erhält man:

$$\sin\zeta' = \sqrt{1 - f_0^2}$$
$$\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{2f_0 f_1 e'}{1 - f_0^2} - \frac{1}{2}\,\frac{f_1^2 + 2f_0 f_2}{1 - f_0^2}\,e'^2 - \frac{1}{8}\,\frac{4f_0^2 f_1^2}{(1 - f_0^2)^2}\,e'^2 + \cdots\right].$$

Zur Darstellung von $\sin 2\zeta'$ ist weiter zu entwickeln

$$\sin 2\zeta' = 2\sin\zeta'\cos\zeta' = 2\sqrt{1 - f_0^2}\left[f_0 + \left(f_1 - \frac{f_0^2 f_1}{1 - f_0^2}\right)e' + \cdots\right],$$

wo wegen (42) nur Terme bis zur ersten Potenz von e' berücksichtigt sind. Endlich erhält man für sin $3\zeta'$ den Ausdruck

$$\sin 3\zeta' = \sin\zeta' \cos 2\zeta' + \cos\zeta' \sin 2\zeta' = \sqrt{1-f_0^2}\,(2f_0^2-1) + \\ + 2f_0^2\sqrt{1-f_0^2} = \sqrt{1-f_0^2}\,(4f_0^2-1),$$

wo wegen (42) alle Potenzen von e' vernachlässigt sind. Damit folgt aus (42):

$$\frac{de'}{dt} = g_0' + g_1'e' + g_2'e'^2, \tag{47}$$

wo die Koeffizienten g_0', g_1' und g_2' die folgende Darstellung erhalten:

$$g_0' = \eta_1'\sqrt{1-f_0^2}, \quad g_1' = -\eta_1'\sqrt{1-f_0^2}\,\frac{f_0 f_1}{1-f_0^2} + 2\eta_2' f_0\sqrt{1-f_0^2},$$

$$g_2' = \sqrt{1-f_0^2}\left[-\eta_1'\left(\frac{f_1^2+2f_0f_2}{2(1-f_0^2)} + \frac{f_0^2f_1^2}{2(1-f_0^2)^2}\right) + \eta_1'' - 2\eta_2' \right.\\ \left.\left(f_1 - \frac{f_0^2f_1}{1-f_0^2}\right) + \eta_3'(4f_0^2-1)\right].$$

Die Lösung der Differentialgleichung (47) lautet dann analog zum Falle des Hecuba-Problems (s. meine Abhandlung in den Sitzungsberichten der Bayer. Akademie der Wissenschaften 1960, pg. 227 etc. entsprechend der Gleichung (37) pg. 240) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} g_2(t-t_0) + C &= \frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\ln\frac{e+b-\sqrt{b^2-c}}{e+b+\sqrt{b^2-c}} && \text{für } b^2 > c \\ g_2(t-t_0) + C &= \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{e+b}{\sqrt{c-b^2}} && \text{für } b^2 < c \\ g_2(t-t_0) + C &= -\frac{1}{e+b} && \text{für } b^2 = c, \end{aligned} \tag{48}$$

wobei $b = \frac{1}{2}\frac{g_1'}{g_2'}$ und $c = \frac{g_0'}{g_2'}$ ist.

Es verbleibt jetzt noch die Ableitung der Bewegung des Perihels $\tilde{\omega}'$ von Pluto, definiert durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d\tilde{\omega}'}{dt} = \frac{\sqrt{1-e'^2}}{e'\sqrt{a'}}\,\frac{\partial R}{\partial e'} \tag{49}$$

bei allgemeiner Entwicklung der von e' abhängigen rechten Seite bis zum einschließlich 2. Grade in e', d. h. bei Entwicklung der Störungsfunktion bis zum einschließlich 4. Grade in bezug auf e', weiter ist der Faktor $\sqrt{1-e'^2}$ bis e'^2 einschließlich zu entwickeln. Schließlich bleibt noch die Entwicklung des Faktors $\frac{1}{\sqrt{a'}}$ nach e' bis zum 2. Grade in e', da $a' = a'_*(1+3e'^2)$, womit man erhält:

$$\frac{1}{\sqrt{a'}} = \frac{1}{\sqrt{a'_*}}\left(1 - \frac{3}{2}e'^2\right).$$

Um nun den Ausdruck (49) bis zu den Termen 2. Grades in e' einschließlich darzustellen, sind die Terme bis zum 4. Grade in e' einschließlich zu berücksichtigen, so daß also unter Mitnahme der Terme 4. Grades in e' bei Benutzung von (39) sich ergibt:

$$(50)\quad \frac{1}{e'}\frac{\partial R'}{\partial e'} = 2N_1' + 4N_1'' e'^2 + \frac{1}{e'}N_2'\cos\zeta' + 3N_2'' e'\cos\zeta' + $$
$$+ 2N_3'\cos 2\zeta' + 4N_4' e'^2\cos 2\zeta' + 3N_4'' e'\cos 3\zeta' + 4N_5'' e'^2\cos 4\zeta'.$$

Damit geht der Ausdruck (49) definitiv über in die neue Form:

$$(51)\quad \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a'_*}}\Big(2N_1' + 4N_1'' e'^2 + \frac{1}{e}N_2'\cos\zeta' - 2N_2' e'\cos\zeta' + $$
$$+ 3N_2'' e'\cos\zeta' + 2N_3'\cos 2\zeta' - 4N_3' e'^2\cos 2\zeta' + $$
$$+ 4N_3'' e'^2\cos 2\zeta' + 3N_4'' e'\cos 3\zeta' + 4N_5'' e'^2\cos 4\zeta'\Big),$$

wo die Koeffizienten $\cos\zeta'$, $\cos 2\zeta'$, $\cos 3\zeta'$ und $\cos 4\zeta'$ noch als bekannte Funktionen von e' zu substituieren bleiben, um die rechte Seite von (51) als Potenz-Reihe nach e' zu erhalten; nach (30) war schon $\cos\zeta' = f_0 + f_1\cdot e' + f_2\cdot e'^2 + \cdots$, wo die Koeffizienten f_i dort definiert sind.

Es ergibt sich:

(52)

$$\cos 2\zeta' = 2\cos^2\zeta' - 1 = 2f_0^2 - 1 + 4f_0 f_1 e' + (4f_0 f_2 + 2f_1^2)e'^2 + \cdots$$
$$\cos 3\zeta' = 4\cos^3\zeta' - 3\cos\zeta' = f_0(4f_0^2 - 3) + 3f_1(4f_0^2 - 1)e' + \cdots$$

hinreichend genau, weil in (51) der Koeffizient $\cos 3\zeta'$ schon an $(e')^1$ gebunden ist. Schließlich ist der Koeffizient $\cos 4\zeta'$ in (51) an $(e')^2$ gebunden, so daß

$$\cos 4\zeta' = 8\cos^4\zeta' - 8\cos^2\zeta' + 1 = 8 f_0^2 (f_0^2 - 1) \tag{53}$$

gesetzt werden kann.

Setzt man die Ausdrücke (52) und (53) in (51) ein, dann nimmt die rechte Seite von (51) die Form einer Potenzreihe nach e' an. Bei ihrer Integration treten die drei Integrale

$$\int \frac{1}{e'}\, dt, \quad \int e'\, dt \quad \text{und} \quad \int e'^2\, dt$$

auf. Dabei ist e' als Funktion der Zeit, je nachdem, welcher der drei möglichen Fälle vorliegt, durch (48) gegeben.

Die explizite Darstellung dieser Terme erübrigt sich, da die analogen Terme nach p. 245 meiner erwähnten Akademie-Schrift aus dem Jahre 1960 zu behandeln sind. Die Resultate aller Integrationen sind dort angegeben.