

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1978

MÜNCHEN 1979

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über Kegelschnittbüschel mit gegebenen metrischen Eigenschaften¹

Von Georg Rost

Vorbemerkung¹

Die nachstehend behandelten Fragestellungen sind u. W. neuartig insofern nämlich als es sich bei ihnen um die Existenz und Anzahl von Kegelschnittbüscheln handelt, die nicht durch vier Grundpunkte eindeutig festgelegt werden, sondern durch gewisse vorgegebene metrische Daten: Die gleichseitige Hyperbel, die Gestalt des extremen Kegelschnittes und die durch die ausgearteten Kegelschnitte des Büschels bestimmten Winkel. In § 1 werden drei Sätze formuliert, deren Beweise im § 2 analytisch und im § 3 geometrisch geführt werden.

Bezeichnungen: KS = Kegelschnitt; KSB = Kegelschnittbüschel; H_g = gleichzeitige Hyperbel; K_e = extremer KS im KSB ². – Einige Formeln aus [1] auf die im § 2 Bezug genommen wird, sind zur Erleichterung der Lektüre hier noch zusammengestellt und, soweit erforderlich, erläutert; dabei bedeutet [1] (*i*) soviel wie Formel (*i*) in [1] (es bezieht sich [1] auf das Literaturverzeichnis). – Wählt man die Asymptoten der – nach Voraussetzung einzigen – H_g des KSB als die x - bzw. y -Achse, so lautet die Gleichung des allgemeinsten in Betracht kommenden KSB

$$1 \quad Ax^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2dx + 2ey + (f - \lambda b^2) = 0, \\ \text{mit } -1 < A \leq 1;$$

dabei ist λ der Parameter des KSB und b die, später auch als *Hauptachsenlänge* bezeichnete, Halbachsenlänge der H_g . Je nachdem $A = a^2 > 0$ bzw. $A = 0$ bzw. $A = -a^2 < 0$ ist, enthält der KSB zwei bzw. eine bzw. keine Parabel. Der Tangens des Asymptotenwinkels $\varphi = \varphi(\lambda)$ des zum Parameterwert λ gehörigen KS ist dann

$$[1](2) \quad tg\varphi = \pm 2(1 + A)^{-1} (\lambda^2 - A)^{1/2} =: t(\lambda), \quad 0 \leq \varphi < \pi.$$

Das einzige Extremum von $(t(\lambda))^2$ wird durch $\lambda = 0$ geliefert und ergibt den K_e , dessen Achsenverhältnis gleich $|A|^{1/2}$ ist. Die zu den ausgearteten KS des KSB gehörigen Werte von λ , sie seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sind die Nullstellen von

$$[1] \quad (5) \quad b^2 \lambda^3 - f \lambda^2 + (2de - Ab^2) \lambda - (d^2 + Ae^2 - Af) = b^2 (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) (\lambda - \lambda_3), \text{ so daß}$$

$$[1] \quad (6a) \quad f = b^2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$

$$(6b) \quad 2de - Ab^2 = b^2 (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1),$$

$$(6c) \quad d^2 + Ae^2 - Af = b^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

§ 1. Drei Existenzsätze

Satz I. Es seien beliebig vorgegeben die reellen Zahlen e_j , $j = 1, 2, 3$, mit $0 < e_j < \pi/2$ und $e_j \neq e_k$, $j \neq k$; $j, k = 1, 2, 3$; ferner $b > 0$ und a mit $0 < a \leq 1$.

Dann existieren zu einer (beliebig vorgegebenen) gleichseitigen Hyperbel H_g mit der Hauptachsenlänge b für $0 < a < 1$ genau 8 verschiedene, diese Hyperbel H_g enthaltenden KSB mit je zwei Parabeln derart, daß für diese KSB $e_j, e'_j = \pi - e_j$, $j = 1, 2, 3$, die Winkel der ausgearteten KS sind und a das Achsenverhältnis der extremen Ellipse E_e ist; die E_e dieser 8 KSB sind kongruent, ihre großen Achsen sind parallel zu einer und der nämlichen Asymptote der H_g .

Für $a = 1$ fallen die 8 KSB paarweise zusammen; in diesem Falle gibt es daher nur 4 verschiedene KSB der geforderten Art; die in diesen 4 KSB auftretenden Kreise besitzen gleiche Radien.

Satz II. Es seien beliebig vorgegeben die reellen Zahlen e_j , $j = 1, 2, 3$, mit $0 < e_j < \pi/2$ und $e_j \neq e_k$; $j \neq k$; $j, k = 1, 2, 3$; ferner $b > 0$.

Dann existieren zu einer (beliebig vorgegebenen) gleichseitigen Hyperbel H_g mit der Hauptachsenlänge b genau 4 verschiedene, diese Hyperbel H_g enthaltenden KSB mit je einer Parabel derart, daß für diese KSB $e_j, e'_j = \pi - e_j$, $j = 1, 2, 3$, die Winkel der ausgearteten KS sind: die Parabeln in diesen 4 KSB be-

sitzen gleiche Parameter und ihre Achsen sind parallel zu einer und der nämlichen Asymptote der H_g .

Satz III. Es seien beliebig vorgegeben die reellen Zahlen α , e_j , $j = 1, 2, 3$, mit $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < e_j < \pi/2$, $\alpha < e_j$; $e_j \neq e_k$, $j \neq k$; $j, k = 1, 2, 3$; ferner $b > 0$.

Dann existieren zu einer (beliebig vorgegebenen) gleichseitigen Hyperbel H_g mit der Hauptachsenlänge b je genau 4 verschiedene diese H_g enthaltende KSB ohne Parabeln derart, daß für diese KSB die e_j , $e'_j = \pi - e_j$, $j = 1, 2, 3$, die Winkel der ausgearteten KS sind und in welchen KSB die extreme Hyperbel H_e als Asymptotenwinkel φ_e den spitzen Winkel α bzw. den stumpfen Winkel $\alpha' = \pi - \alpha$ besitzt.

Für $\varphi_e = \alpha$ sind die H_e dieser 4 KSB untereinander kongruent; ihre Hauptachsen sind parallel zu einer und der nämlichen Asymptoten der H_g .

Für $\varphi_e = \alpha'$ sind die H_e der 4 KSB untereinander und zu derjenigen Hyperbel kongruent, welche konjugiert ist zur H_e des Falles $\varphi_e = \alpha$: die Nebenachsen der H_e des Falles $\varphi_e = \alpha'$ sind parallel zu den Hauptachsen der H_e des Falles $\varphi_e = \alpha$.

§ 2. Analytische Beweise

Betr. Satz I. Zunächst muß sein $A = a^2 > 0$. Zur Vereinfachung setzen wir $d = ac$. Da die e_j reell sind, muß jedes der gesuchten KSB vier reelle Grundpunkte besitzen und es ist daher die extreme Ellipse reell, d. h. es muß sein³

$$(1) \quad d^2 + Ae^2 - Af = a^2(c^2 + e^2 - f) > 0.$$

Nun ergibt die Auflösung von [1] (2) nach λ für die ausgearteten KS die Parameterwerte

$$(2) \quad \lambda_j = \pm (a^2 + [2^{-1}(1 + a^2) \operatorname{tge}_j]^2)^{1/2}, j = 1, 2, 3;$$

insbesondere ist also $|\lambda_j| \neq |\lambda_k|$ für $j \neq k$, sowie $|\lambda_j| > a > 0$.

Wegen (1) und [1](6c) sind immer nur für zwei der λ_j die Vorzeichen beliebig wählbar, so daß im ganzen 4 verschiedene Tripel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zulässig sind.

Mit Hilfe der λ_j sind alle Tripel reeller Zahlen d, e, f bzw. c, e, f zu bestimmen, für welche [1](6a)–(6c) oder, was das Gleiche, für welche [1](5) für alle λ erfüllt ist. Dazu genügt, daß [1](5) für drei verschiedene λ gilt, als solche wählen wir $\lambda = \pm a$ und $\lambda = 0$. Dann ergibt sich

$$(3a) \quad a^2(c + e)^2 = b^2(a + \lambda_1)(a + \lambda_2)(a + \lambda_3),$$

$$(3b) \quad a^2(c - e)^2 = b^2(-a + \lambda_1)(-a + \lambda_2)(-a + \lambda_3),$$

$$(3c) \quad a^2(f - c^2 - e^2) = -b^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Wegen $a < |\lambda_j|$ sind die rechten Seiten in (3a) und (3b) positiv; man erhält daher aus diesen beiden Gleichungen vier verschiedene Wertepaare c, e etwa $c_0, e_0; -c_0, -e_0; e_0, c_0$ und $-e_0, -c_0$ mit $|c_0| \neq |e_0|$ bei gegebenen λ_j . Da aber genau vier verschiedene Tripel λ_j zulässig sind, so ergeben sich genau 16 verschiedene reelle Lösungen c, e . Durch c, e ist dann f eindeutig bestimmt. Nun liefern aber c_0, e_0 und $-c_0, -e_0$ ebenso wie e_0, c_0 und $-e_0, -c_0$ den gleichen Wert von f und sogar das gleiche KSB^4 . Hingegen liefern c_0, e_0 und e_0, c_0 zwar den gleichen Wert von f , aber verschiedenen KSB nur für $0 < a < 1$, dagegen gleiche⁵ KSB für $a = 1$. Schließlich entsprechen verschiedenen Tripeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ verschiedene Werte f wegen $f = b^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, also auch verschiedene KSB . – Daß die extremen Ellipsen der 8 KSB kongruent sind und die behauptete Lage bezüglich H_g besitzen, folgt aus ihrer Gleichung

$$(ax + c)^2 + (y + e)^2 + (f - c^2 - e^2) = 0,$$

worin $f - c^2 - e^2 = -a^{-2}b^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ für alle 8 Lösungen den gleichen negativen Wert besitzt. Damit ist alles bewiesen.

Betr. Satz II. Analog wie zu I. Es ist $A = 0$ zu setzen. Einer der Grundpunkte der gesuchten KSB muß uneigentlich sein. An Stelle von (3a)–(3c) verwenden wir zur Bestimmung der d, e, f , die Gleichungen [1](6a)–(6c). Wegen $d^2 = b^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ und $|\lambda_j| > 0$, $j = 1, 2, 3$, muß $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$ sein; daher sind wieder genau vier verschiedene Tripel λ_j zulässig. Jedes solche Tripel liefert zwei von Null verschiedene Werte d , die sich nur im Vorzeichen unterscheiden; diese beiden Werte liefern aber, wie aus [1](6a)–(6c) zu entnehmen, den gleichen Wert von f sowie entgegengesetzte

Werte von e , sie liefern also⁴ das gleiche KSB . Hingegen führen verschiedene Tripel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zu verschiedenen KSB . Daß die Parabeln der 4 KSB gleiche Parameter und gleiche Achsenrichtung (parallel einer Asymptote von H_e) besitzen, ergibt sich aus ihrer Gleichung $(y + e)^2 + 2dx - e^2 + f = 0$, worin $d = \pm b\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ für alle 4 KSB den gleichen absoluten Betrag hat.

Betr. Satz III. Die zu I. angestellten Überlegungen modifizieren sich wie folgt: Man hat zu setzen $A = -a^2 = -(tg \alpha/2)^2$, ferner $d = ac$ und erhält aus [1](2)

$$\lambda_j = \pm 2^{-1} (1 - (tg \alpha/2)^2) \sqrt{(tg e_j)^2 - (tg \alpha)^2}, j = 1, 2, 3,$$

wobei die Wurzel rechterhand (zufolge der Voraussetzung über α und über die e_j) sicher reell sowie von Null verschieden ist und wobei $|\lambda_j| \neq |\lambda_k|, j \neq k$. Je nachdem $\alpha < \pi/2$ oder $\alpha' > \pi/2$ für φ_e eingesetzt wird, je nachdem also die extreme Hyperbel spitz- oder stumpfwinklig ist, muß dann (vgl. [1](6c)) $a^2(c^2 - e^2 + f) > 0$ oder < 0 sein⁶, also $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ bzw. < 0 . In jedem Falle ergeben sich mithin genau vier verschiedene reelle zulässige Tripel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Für c und e ergeben sich aus [1](6a)–(6c) bei gegebenem Tripel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ eindeutig reelle Werte von $f, c^2 - e^2$ und ce . Somit sind c und e zweideutig (reell) bestimmt und zwar die beiden Wertepaare von entgegengesetztem Vorzeichen: c_0, e_0 und $-c_0, -e_0$. Wie früher ergibt sich, daß zu jedem Tripel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ genau ein KSB gehört und zu verschiedenen Tripeln verschiedene KSB .

Bemerkt sei noch, daß c und e sich unmittelbar aus der Gleichung $a^2(c + ie)^2 = b^2 (ia + \lambda_1) (ia + \lambda_2) (ia + \lambda_3)$ berechnen lassen. Die Gleichung der extremen Hyperbeln lautet $-(ax - c)^2 + (y + e)^2 + (c^2 - e^2 + f) = 0$, worin $c^2 - e^2 + f = b^2 a^{-2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. Beachtet man noch, daß die zum Falle $\varphi_e = \alpha$ gehörigen H_e in die zum Falle $\varphi_e = \alpha'$ gehörigen übergehen, indem man c, e, f durch $e, c, -f$ ersetzt, so ergeben sich auch die Behauptungen bezüglich der H_e . Damit ist alles bewiesen.

Anmerkung: Die vorstehenden drei Existenzsätze beziehen sich auf Fall der KSB mit vier reellen verschiedenen Grundpunkten. In der nämlichen Weise kann man für alle übrigen Arten

von Grundpunktvierecken, insbesondere also für die Grenzfälle, sowie für die speziellen Fälle, in welchen H_e oder E_e oder beide ausgeartet sind, entsprechende Existenzsätze beweisen und die Gleichungen der zugehörigen KSB aufstellen.

§ 3. Geometrische Beweise.

Die in § 1 formulierten Existenzsätze lassen sich auch auf rein geometrischem Wege aus der Steinerschen Beweisfigur⁷ ableiten. Dieser Weg eröffnet tiefere Einblicke in die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Lösungen, die bei der analytisch-geometrischen Behandlung verborgen geblieben sind; er soll daher kurz skizziert werden.

Die fundamentale, vom Punkte Z ausgehende Involution⁸ der Asymptotenrichtungen der KS des Büschels ist bei jedem der 3 Existenzsätze durch die gegebenen Stücke bestimmt⁹, nämlich

- 1) durch das von den Asymptotenrichtungen der gleichseitigen Hyperbel H_g gebildete *Rechtwinkelpaar*;
- 2) *im Falle des Satzes I* durch die mit den Richtungen der gleichlangen konjugierten Durchmesser der extremen Ellipse E_e identischen Achsenrichtungen der beiden Parabeln als Doppelstrahlen,¹⁰ deren Winkel $\alpha = 2 \arctg a$ ($0 < a \leq 1$) durch die Strahlen des Rechtwinkelpaares halbiert werden¹¹;
- 3) *im Falle des Satzes II* durch den in den Achsenrichtungen der extremen Parabel verlaufenden einzigen Doppelstrahl, der sich mit einem der beiden Strahlen des Rechtwinkelpaares deckt und allen Paaren entsprechender Strahlen als Strahl angehört¹²;
- 4) *im Falle des Satzes III* durch das von den Asymptotenrichtungen der extremen Hyperbel H_e gebildete Paar, dessen Winkel α durch die Strahlen des Rechtwinkelpaares halbiert werden¹³.

Der Steinersche Hilfskreis K durch Z wird zweckmäßig so gewählt, daß sein Mittelpunkt M auf dem einen Strahl (im Falle II dem Doppelstrahl) des Rechtwinkelpaares liegt und der andere Strahl Tangente an K ist. Das Zentrum⁷ L der von den Strahlen der Involution Z auf K ausgeschnittenen Punktinvolution und

seine Polare l in bezug auf K , ebenso der Bildpunkt^{7, 10} P_e des extremen KS lassen sich in jedem der 3 Fälle leicht ermitteln.

Um für $j = 1, 2, 3$ diejenigen Strahlenpaare der Involution Z zu erhalten, deren Strahlen die vorgegebenen Winkel $e_j, e'_j = \pi - e_j$ bilden, zeichne man über einem Radius r von K als Kathete das rechtwinkelige Dreieck, das bei M den Winkel e_j hat. Der Kreis um M mit der Hypotenuse als Radius schneidet auf l die Bildpunkte $P_j, \bar{P}_j$ derjenigen beiden KS des Büschels aus, deren Asymptotenwinkel die vorgegebenen Werte e_j, e'_j besitzen. Die um P_j und $\bar{P}_j$ mit der zweiten Kathete als Radius beschriebenen Kreise schneiden aus K die Punktepaare j, j' bzw. $\bar{j}, \bar{j}'$ aus, die mit Z verbunden die beiden Strahlenpaare Zj, Zj' bzw. $Z\bar{j}, Z\bar{j}'$ liefern, bei denen $\sphericalangle jZj' = \sphericalangle \bar{j}Z\bar{j}' = e_j$ ist. Die Bildpunkte $P_j, \bar{P}_j$ liegen auf l symmetrisch zum Bildpunkt P_e des extremen KS .

Den Forderungen der drei Sätze können nur solche KSB genügen, bei denen die Bildpunkte A_1, A_2, A_3 der ausgearteten KS den 3 Paaren $P_1, \bar{P}_1; P_2, \bar{P}_2; P_3, \bar{P}_3$ bzw. entnommen sind. Für das Tripel $(A_1A_2A_3)$ ergeben sich demnach die folgenden 8 Möglichkeiten:

$$\begin{array}{cccc} (P_1P_2P_3), & (P_1\bar{P}_2\bar{P}_3), & (\bar{P}_1P_2\bar{P}_3), & (\bar{P}_1\bar{P}_2P_3), \\ (\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3), & (\bar{P}_1P_2P_3), & (P_1\bar{P}_2P_3), & (P_1P_2\bar{P}_3). \end{array}$$

Die Möglichkeiten der 2. Zeile und die zugehörigen Strahlenpaare Zj, Zj' bzw. $Z\bar{j}, Z\bar{j}'$ ($j = 1, 2, 3$) gehen aus den darüberstehenden Möglichkeiten der 1. Zeile und den zugehörigen Strahlenpaaren der Involution Z hervor durch Umklappen um die Achse ZMP_e ; sie liefern also keine wesentlich verschiedenen Lösungen¹⁴: es genügt, aus je 2 in der gleichen Kolonne stehenden Möglichkeiten eine zu betrachten.

Die zu den Bildpunkten der ausgearteten KS gehörigen Strahlenpaare der Involution Z geben die Richtungen der Paare von Gegenseiten des vollständigen Vierecks der Grundpunkte. Am Beispiel der 1. Möglichkeit $(A_1A_2A_3) = (P_1P_2P_3)$ soll die Konstruktion der zugehörigen Grundpunktvierecke näher erläutert werden.

Bezeichnet man die Richtung Zj kurz als Richtung j , so handelt es sich darum, Vierecke zu konstruieren, bei denen die 3 Paare

von Gegenseiten in den Richtungen 1, 1' bzw. 2, 2' bzw. 3, 3' verlaufen. Um ein solches Viereck zu erhalten, verfähre man nach der Vorschrift $\triangle 123 \mid * 1'2'3'$, d. h. man zeichne ein Dreieck mit den Seitenrichtungen 123, ziehe durch die Gegenecke von 1 die Gerade von der Richtung 1', durch die Gegenecke von 2 die Gerade von der Richtung 2', endlich durch die Gegenecke von 3 die Gerade von der Richtung 3'; dann schneiden sich, da 11', 22', 33' Paare einer Involution sind, die in den Richtungen 1'2'3' gezogenen Geraden in einem Punkt. Die Ecken des Dreiecks und dieser 4. Punkt sind die Ecken eines Grundpunktvierecks der verlangten Art. Dieser 4. Punkt ist in den Fällen der Sätze I und III ein eigentlicher Punkt, im Fall des Satzes II dagegen der den Richtungen 1'2'3' gemeinsame uneigentliche Punkt: an Stelle des Zeichens * der Konvergenz tritt in der Vorschrift das Zeichen $\equiv$ des Parallelismus. Hält man bei der beschriebenen Konstruktion eine Dreiecksseite, etwa $0 = 1 \times 2$ fest und unterwirft die Seite 3 der Bedingung, daß $\triangle 123$ immer in demselben Winkelraum 12 (nicht im Scheitelwinkelraum!) liegt, daß also die Gerade 3 immer denselben Halbstrahl 01 und denselben Halbstrahl 02 schneidet, so bilden die entstehenden Dreiecke 123 und die aus ihnen hervorgehenden Grundpunktvierecke, einschließlich der zugehörigen *KSB* ein System von gleichsinnig ähnlichen und direkt ähnlich liegenden Figuren mit dem äußeren Ähnlichkeitspunkt o . Das Gleiche gilt für die im Scheitelwinkelraum liegenden Dreiecke; da diese aus den erstgenannten Dreiecken durch eine Drehung in der Ebene um o um 180° hervorgehen, liefern sie keine neuen Lösungen¹⁴. Durchläuft der Abschnitt auf 01 stetig wachsend alle positiven reellen Werte von beliebig kleinen zu beliebig großen Werten, so nimmt die Hauptachsenlänge der gleichseitigen Hyperbel H_g stetig wachsend alle positiven reellen Werte an. Unter den in angegebener Weise nach der Vorschrift $\triangle 123 \mid * 1'2'3'$ erhaltenen *KSB* befindet sich also eines, bei dem die Hauptachsenlänge von H_g den vorgegebenen Wert b besitzt. – Im Falle des Satzes II ist die nach der Vorschrift $\triangle 123 \mid \equiv 1'2'3'$ erhaltene Lösung die einzige, deren Grundpunktviereck Gegenseitenpaare von den Richtungen 11', 22', 33' aufweist. Im Falle des Satzes I und des Satzes III dagegen gibt es im allgemeinen (d. h. abgesehen vom Unterfall

$a = 1$ des Satzes I) noch eine zweite Lösung mit einem derartigen Grundpunktviereck, die man nach der Vorschrift $\triangle 1'2'3' \mid * 123$ erhält¹⁵. Im Unterfall $a = 1$ des Satzes I erkennt man aus der zugehörigen Steinerschen Beweisfigur die ungleichsinnige Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle 123$, $\triangle 1'2'3'$ und damit die ungleichsinnige Kongruenz der beiden Lösungen¹⁶.

Behandelt man in gleicher Weise die 3 übrigen Möglichkeiten für $(A_1A_2A_3)$, nämlich $(P_1\bar{P}_2\bar{P}_3)$, $(\bar{P}_1P_2\bar{P}_3)$, $(\bar{P}_1\bar{P}_2P_3)$, so erhält man schließlich

im Fall des Satzes I und im Fall des Satzes III

8 Lösungen nach den Vorschriften:

$$\begin{aligned}
 &\triangle 123 \mid * 1'2'3', \triangle 1\bar{2}\bar{3} \mid * 1'\bar{2}'\bar{3}', \\
 &\triangle \bar{1}2\bar{3} \mid * \bar{1}'2'\bar{3}', \triangle \bar{1}\bar{2}3 \mid * \bar{1}'\bar{2}'3', \\
 &\triangle 1'2'3' \mid * 123, \triangle 1'\bar{2}'\bar{3}' \mid * 1\bar{2}\bar{3}, \\
 &\triangle \bar{1}2'\bar{3}' \mid * \bar{1}2\bar{3}, \triangle \bar{1}'\bar{2}'3' \mid * \bar{1}\bar{2}3;
 \end{aligned}$$

im Fall des Satzes II

4 Lösungen nach den Vorschriften:

$$\begin{aligned}
 &\triangle 123 \mid \equiv 1'2'3', \triangle 1\bar{2}\bar{3} \mid \equiv 1'\bar{2}'\bar{3}', \\
 &\triangle \bar{1}2\bar{3} \mid \equiv \bar{1}'2'\bar{3}', \triangle \bar{1}\bar{2}3 \mid \equiv \bar{1}'\bar{2}'3'.
 \end{aligned}$$

Damit ist die *Existenz und Unität* der in den Sätzen I, II, III behaupteten 8 bzw. 4 bzw. 8 *Lösungen bewiesen*¹⁷.

Zwischen den zu dem gleichen Satze I oder II oder III gehörigen 8 bzw. 4 bzw. 8 Lösungen bestehen sehr einfache Zusammenhänge. Diese ermöglichen es, *aus der ersten*, nach der Vorschrift $\triangle 123 \mid * 1'2'3'$ oder $\triangle 123 \mid \equiv 1'2'3'$ erhaltenen *Lösung alle übrigen* zum gleichen Satze gehörigen *Lösungen abzuleiten*.

Fall des Satzes I (*KSB* mit 2 Parabeln)

Man konstruiere zunächst in beliebigem Maßstab ein Grundpunktviereck nach der Vorschrift $\triangle 123 \mid * 1'2'3'$. Für die H_g des Büschels sind die Richtungen $j, \bar{j}$ und die Richtungen $j', \bar{j}'$ ($j = 1, 2, 3$) Paare konjugierter Durchmesserrichtungen¹⁸; der Mittelpunkt M_g von H_g ergibt sich demnach als Schnitt der 2. Diagonalen jener Rechtecke, deren 1. Diagonale zwei Grundpunkte verbindet und deren Seiten in den vorgegebenen Asym-

ptotenrichtungen von H_g verlaufen. Es ist zweckmäßig, hierfür die zu einem Paare von Gegenseiten j, j' gehörigen Rechtecke zu benutzen; dann hat man, da für die extreme Ellipse E_e des Büschels die Richtungen j, j' und die Richtungen j', j konjugierte Durchmesserrichtungen sind¹⁹, nur noch durch die Mitte eines jeden der beiden Rechtecke die Parallele zur 2. Diagonale des anderen Rechtecks zu ziehen, um den Mittelpunkt M_e der extremen Ellipse E_e zu erhalten. Die Scheiteltangenten der H_g erhält man auf Grund des Satzes von der Konstanz der durch eine bewegliche Hyperbeltangente aus dem Asymptotenwinkel abgeschnittenen Dreiecksfläche wie folgt: Man zeichne in einem der 4 Grundpunkte die Tangente von H_g und trage auf den beiden Asymptoten von M_g aus Strecken ab gleich der Länge des geometrischen Mittels aus den beiden durch die Tangente auf den Asymptoten bestimmten Abschnitten. Die in den Winkelräumen des eigentlichen Asymptotenwinkels liegenden Verbindungslinien der Endpunkte dieser Strecken sind die beiden Scheiteltangenten von H_g . Durch ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung von M_g als Ähnlichkeitspunkt aus kann man dann leicht dasjenige Grundpunktviereck finden, dessen H_g die vorgegebene Hauptachsenlänge b hat.

Aus dieser ersten Lösung erhält man 3 weitere zu derselben H_g gehörige Lösungen, indem man die beiden auf einer Seite j ($j = 1, 2, 3$) des vollständigen Vierecks der Grundpunkte liegenden Ecken beibehält, dagegen die auf der Gegenseite j' liegenden beiden Ecken durch die diametral gegenüberliegenden Punkte von H_g ersetzt. Die Vertauschung von Seite mit Gegenseite ergibt eine kongruente um 180° in der Ebene gedrehte Lösung. Daß die 3 so erhaltenen Lösungen die den Vorschriften $\triangle 1\bar{2}\bar{3} \mid * 1'2'3', \triangle \bar{1}2\bar{3} \mid * \bar{1}'2'3', \triangle \bar{1}\bar{2}3 \mid * \bar{1}'\bar{2}'3'$ entsprechenden Lösungen sind, ergibt sich aus dem Satze, daß bei einem KS die Verbindungslinie eines Kurvenpunktes mit den Endpunkten eines Durchmessers die Richtungen konjugierter Durchmesser angeben. Verläuft also bei einer H_g die eine Verbindungslinie in der Richtung k , so verläuft die andere in der Richtung $\bar{k}$. Bei dieser Darstellung haben die 4 Lösungen eine gemeinsame gleichseitige Hyperbel H_g . – Wie aus der Konstruktion folgt, hat die j^{te} abgeleitete Lösung ein Paar Gegenseiten j, j' , das mit

einem Paar Gegenseiten der Ausgangslösung nach Länge und Richtung übereinstimmt. Man zeigt leicht: auch je 2 der abgeleiteten Lösungen stimmen in einem Paar von Gegenseiten nach Länge und Richtung überein. Die 4 Lösungen sind also gleichberechtigt; aus jeder können die 3 anderen durch das gleiche Verfahren abgeleitet werden.

Aus der ersten Lösung erhält man dieselben 3 weiteren Lösungen, indem man die beiden auf einer Seite j ($j = 1, 2, 3$) liegenden Ecken beibehält, dagegen die auf der Gegenseite j' liegenden beiden Ecken durch die diametral gegenüberliegenden Punkte von E_e ersetzt. Verläuft nämlich bei einer E_e die Verbindungslinie eines Kurvenpunktes mit einem Durchmesserendpunkt in der Richtung k , so verläuft die Verbindungslinie mit dem anderen Durchmesserendpunkt in der Richtung $\bar{k}'$. Bei dieser Darstellung haben demnach die 4 Lösungen eine gemeinsame extreme Ellipse E_e . – Wie am Schluß des vorigen Absatzes, so kann man auch hier auf die Gleichberechtigung der 4 Lösungen schließen.

Aus der ersten Lösung erhält man endlich dieselben 3 weiteren Lösungen auch durch die folgende, besonders aufschlußreiche Betrachtung: Man ziehe durch M_g der Ausgangslösung eine Strecke von der Länge und Richtung der Seite j ($j = 1, 2, 3$), die in M_g ihren Mittelpunkt hat, ferner durch M_e eine Strecke von der Länge und Richtung der Seite j' , die in M_e ihren Mittelpunkt hat. Die Endpunkte der beiden Seiten bestimmen das Grundpunktviereck der j^{ten} abgeleiteten Lösung: dies folgt aus der Konstruktion von M_g und M_e in Verbindung mit dem Satze: „Die Parallelen durch die Eckpunkte eines Dreiecks zu den Gegenseiten bilden ein Dreieck von der doppelten Seitenlänge.“ Der Mittelpunkt $M_g^{(j)}$ der gleichseitigen Hyperbel $H_g^{(j)}$ (bzw. der Mittelpunkt $M_e^{(j)}$ der extremen Ellipse $E_e^{(j)}$) der j^{ten} abgeleiteten Lösung liegt im Mittelpunkt der Seite j (bzw. der Seite j') der Ausgangslösung. Sind k, l die beiden von j verschiedenen Zahlen der Reihe 1, 2, 3, so gehen durch $M_g^{(j)}$ (bzw. durch $M_e^{(j)}$) auch noch die Seiten $\bar{k}$ der l^{ten} und $\bar{l}$ der k^{ten} abgeleiteten Lösung (bzw. $\bar{k}'$ der l^{ten} und $\bar{l}'$ der k^{ten} abgeleiteten Lösung) derart, daß sie in $M_g^{(j)}$ (bzw. in $M_e^{(j)}$) ihren Mittelpunkt haben²⁰. Die $4 \times 6 = 24$ Seiten der Ausgangslösung und der 3 abgeleiteten Lösungen gehen also zu je 3 durch die 8 Punkte $M_g, M_g^{(j)}, M_e,$

$M_e^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) und werden in ihnen halbiert. Bei dieser Darstellung haben demnach die 4 Lösungen eine gemeinsame Mittelpunktshyperbel H_0 ²¹. Auch bei dieser 3. Darstellung kann man auf die Gleichberechtigung der 4 Lösungen schließen: aus jeder von ihnen können die 3 übrigen Lösungen durch das angegebene Verfahren abgeleitet werden. Die 4 Durchmesser von H_0 ($M_g M_e$, $M_g^{(j)} M_e^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$) spielen hier eine ausgezeichnete Rolle; wir wollen sie daher *Hauptdurchmesser* nennen. Nennt man noch die Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten j, j' oder $\bar{j}, \bar{j}'$ die j^{te} *Mittellinie* des Vierecks, so ergibt sich aus dem Vorstehenden: Der Hauptdurchmesser $M_g M_e$ der Ausgangslösung deckt sich für $j = 1, 2, 3$ mit der j^{ten} Mittellinie der j^{ten} abgeleiteten Lösung; der Hauptdurchmesser $M_g^{(j)} M_e^{(j)}$ der j^{ten} abgeleiteten Lösung deckt sich mit der j^{ten} Mittellinie der Ausgangslösung, ferner mit der k^{ten} Mittellinie der l^{ten} , endlich mit der l^{ten} Mittellinie der k^{ten} abgeleiteten Lösung. Bei allgemeiner Lage der 4 Lösungen hat man die Worte „deckt sich“ durch „stimmt nach Länge und Richtung überein“ zu ersetzen.

Die 4 weiteren, den Vorschriften $\triangle 1'2'3' \mid * 123$, $\triangle 1'\bar{2}'\bar{3}' \mid * 1\bar{2}\bar{3}$, $\triangle \bar{1}'2'\bar{3}' \mid * \bar{1}2\bar{3}$, $\triangle \bar{1}'\bar{2}'3' \mid * \bar{1}\bar{2}3$ entsprechenden Lösungen ergeben sich in den drei Darstellungen aus den 4 bisher erhaltenen Lösungen durch eine einfache perspektive, involutorisch-affine Transformation, deren Affinitätsachse bei der 1. Darstellung durch M_g , bei der 2. Darstellung durch M_e und bei der 3. Darstellung durch M_0 parallel zur Richtung des einen Doppelstrahls der Involution Z verläuft, während die Affinitätsrichtung mit der Richtung des zweiten Doppelstrahls übereinstimmt. Durch diese Transformation werden für $j = 1, 2, 3$ die Richtungen $j, j', \bar{j}, \bar{j}'$ in die Richtungen $j', j, j'', \bar{j}$ bzw. übergeführt: bei der 1. Darstellung geht die H_g , bei der 2. die E_e in sich über, während bei der 3. Darstellung die spitz- oder stumpfwinklige Mittelpunktshyperbel H_0 in die stumpf- oder spitzwinklige konjugierte Hyperbel $\bar{H}_0$ übergeht²². — Im Fall $a = 1$ steht die Affinitätsrichtung auf der Affinitätsachse senkrecht, affine Figuren sind kongruent und lassen sich durch Umklappen um die Affinitätsachse zur Deckung bringen. Die für $0 < a < 1$ gewonnenen 8 bzw. im Fall $a = 1$ gewonnenen 4 Lösungen sind die einzigen Lösungen.

Fall des Satzes II (KSB mit 1 Parabel)

Man konstruiere zunächst, wie im Fall des Satzes I, das der Vorschrift $\triangle 123 \mid \equiv 1'2'3'$ entsprechende Grundpunktviereck, dessen H_g die vorgegebene Hauptachsenlänge b hat.

Aus dieser ersten Lösung erhält man die 3 weiteren, zu derselben H_g gehörigen Lösungen, indem man die beiden auf einer Seite j' ($j = 1, 2, 3$) liegenden Ecken beibehält, dagegen die auf der Gegenseite j liegenden beiden Ecken durch die diametral gegenüberliegenden Punkte von H_g ersetzt. Bei dieser Darstellung haben die 4 Lösungen eine gemeinsame gleichseitige Hyperbel H_g . — Auch hier zeigt man leicht: Je 2 der Lösungen stimmen in einer Seite des Dreiecks der eigentlichen Grundpunkte nach Länge und Richtung überein; aus jeder der 4 Lösungen können die 3 übrigen Lösungen durch das gleiche Verfahren abgeleitet werden.

Aus der ersten Lösung erhält man dieselben 3 weiteren, den Vorschriften $\triangle 1\bar{2}\bar{3} \mid \equiv 1'\bar{2}'\bar{3}'$, $\triangle \bar{1}2\bar{3} \mid \equiv \bar{1}'2'\bar{3}'$, $\triangle \bar{1}\bar{2}3 \mid \equiv \bar{1}'\bar{2}'3'$ entsprechenden Lösungen, indem man die beiden auf einer Seite j ($j = 1, 2, 3$) liegenden Ecken beibehält, aber die dritte eigentliche Ecke durch den Konvergenzpunkt K von $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ aus $\triangle 123 \mid \equiv \bar{1}\bar{2}\bar{3}$ ersetzt. Bei dieser Darstellung haben die Lösungen eine gemeinsame extreme Parabel P_e . — Wie am Schluß des vorigen Absatzes kann man auch hier auf die Gleichberechtigung der 4 Lösungen schließen.

Aus der ersten Lösung erhält man endlich dieselben 3 weiteren Lösungen auch auf folgende Weise: Man ziehe durch M_g der Ausgangslösung eine Strecke von der Länge und Richtung der Seite j ($j = 1, 2, 3$), die in M_g ihren Mittelpunkt hat, und verbinde die Endpunkte dieser Strecke mit der Mitte der Seite k bzw. mit der Mitte der Seite l der Ausgangslösung. Die beiden Endpunkte der Strecke und der Schnittpunkt der Verbindungslinien sind die eigentlichen Grundpunkte der j^{ten} abgeleiteten Lösung²³. Der Mittelpunkt $M_g^{(j)}$ der gleichseitigen Hyperbel $H_g^{(j)}$ der j^{ten} abgeleiteten Lösung liegt im Mittelpunkt der Seite j der Ausgangslösung. Durch $M_g^{(j)}$ gehen auch noch die Seiten k der l^{ten} und l der k^{ten} abgeleiteten Lösung derart, daß sie in $M_g^{(j)}$ ihren Mittelpunkt haben. Die $4 \times 3 = 12$ die eigentlichen

Grundpunkte verbindenden Seiten der Ausgangslösung und der 3 abgeleiteten Lösungen gehen also zu je 3 durch die 4 Punkte $M_g, M_g^{(j)}, j = 1, 2, 3$ und werden in ihnen halbiert. Bei dieser Darstellung haben demnach die 4 Lösungen eine gemeinsame Mittelpunktsparabel P_0^{21} . Aus jeder von ihnen können die 3 übrigen durch das angegebene Verfahren abgeleitet werden. – Die 4 durch $M_g, M_g^{(j)} (j = 1, 2, 3)$ gehenden Hauptdurchmesser von P_0 stehen zu den Mittellinien (d. h. zu den Geraden durch die Seitenmitten in der Richtung der Parabelachse) in der gleichen Beziehung wie beim Satze I; man hat nur $M_e, M_e^{(j)} (j = 1, 2, 3)$ als im uneigentlichen Grundpunkt des Grundpunktviereckes liegend anzusehen.

Die gewonnenen 4 Lösungen sind die einzigen Lösungen.

Fall des Satzes III (KSB ohne Parabeln)

Man konstruiere zunächst, wie im Fall des Satzes I, das der Vorschrift $\triangle 123 \mid * 1'2'3'$ entsprechende Grundpunktviereck, dessen H_g die vorgegebene Hauptachsenlänge b hat.

Aus dieser ersten Lösung erhält man, ebenso wie im Falle des Satzes I, 3 weitere zu derselben H_g gehörige, den Vorschriften $\triangle 1\bar{2}\bar{3} \mid * 1'\bar{2}'\bar{3}', \triangle \bar{1}2\bar{3} \mid * \bar{1}'2'\bar{3}', \triangle \bar{1}\bar{2}3 \mid * \bar{1}'\bar{2}'3'$ entsprechende Lösungen, indem man die beiden auf einer Seite j ($j = 1, 2, 3$) des vollständigen Vierecks der Grundpunkte liegenden Ecken beibehält, dagegen die auf der Gegenseite j' liegenden beiden Ecken durch die diametral gegenüberliegenden Punkte von H_g ersetzt. Bei dieser Darstellung haben die 4 Lösungen eine gemeinsame gleichseitige Hyperbel H_g . – Auch hier kann man, wie bei Satz I, auf die Gleichberechtigung der 4 Lösungen schließen.

Aus der ersten Lösung erhält man dieselben 3 weiteren Lösungen, indem man die beiden auf einer Seite j ($j = 1, 2, 3$) liegenden Ecken beibehält, dagegen die auf der Gegenseite j' liegenden beiden Ecken durch die diametral gegenüberliegenden Punkte von H_e ersetzt. Bei dieser Darstellung haben die 4 Lösungen eine gemeinsame extreme Hyperbel H_e . – Auch hier kann man auf die Gleichberechtigung der 4 Lösungen schließen.

Aus der ersten Lösung erhält man endlich dieselben 3 weiteren Lösungen durch das beim Satz I angegebene Verfahren. Alles dort Gesagte gilt auch hier; man hat nur anstelle der „extremen Ellipsen $E_e, E_e^{(j)}$ “ die „extremen Hyperbeln $H_e, H_e^{(j)}$ “ und anstelle der „Mittelpunktshyperbel H_0 “ die „Mittelpunktsellipse E_0 “ zu setzen. Bei dieser Darstellung haben die 4 Lösungen eine gemeinsame Mittelpunktsellipse E_0 ²¹.

Während im Falle des Satzes I eine einfache Transformation die Vertauschung der gestrichelten mit den nichtgestrichelten Größen bewirkte, bewirkt im Falle des Satzes III die entsprechende Transformation nicht nur diese Vertauschung der gestrichelten mit den nichtgestrichelten Größen, sondern gleichzeitig die Vertauschung der überquerten mit den nichtüberquerten Größen. Die 4 den Vorschriften $\triangle \bar{1}'\bar{2}'\bar{3}' \mid * \bar{1}\bar{2}\bar{3}$, $\triangle \bar{1}'2'3' \mid * \bar{1}23$, $\triangle 1'\bar{2}'3' \mid * 1\bar{2}3$, $\triangle 1'2'3' \mid * 12\bar{3}$ entsprechenden Lösungen ergeben sich in den drei Darstellungen aus den 4 bisher erhaltenen Lösungen durch die perspektive involutorische affine Transformation, deren Affinitätsachse bei der 1. Darstellung durch M_g , bei der 2. Darstellung durch M_e , bei der 3. Darstellung durch M_0 parallel zur Richtung der einen Asymptote der extremen Hyperbel H_e verläuft, während die Affinitätsrichtung mit der Richtung der anderen Asymptote übereinstimmt. Durch diese Transformation²⁴ werden für $j = 1, 2, 3$ die Richtungen $j, j', \bar{j}, \bar{j}'$ in die Richtungen $\bar{j}', \bar{j}, j', j$ übergeführt; bei der 1. Darstellung geht H_g in sich über, während bei der 2. Darstellung die spitz- oder stumpfwinklige extreme Hyperbel H_e in die stumpf- oder spitzwinklige konjugierte Hyperbel $\bar{H}_e$, endlich bei der 3. Darstellung E_0 in sich übergeht²².

Die gewonnenen 8 Lösungen sind die einzigen Lösungen.

Literatur

- [1] G. Rost, Algebraische Ableitung des Steinerschen Satzes über Paare ähnlicher Kegelschnitte in Kegelschnittbüscheln. Sitz.-Ber. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Kl. 1947, 115–118. Vgl. dort auch die Fußnote 1.
- [2] O. Haupt, Über die Paare ähnlicher Kegelschnitte in Kegelschnittbüscheln. Sitz.-Ber. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Kl. 1947, 81–114.

- [3] J. Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie II. Teil. Die Theorie d. Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. Bearbeitet von H. Schröter, 3. Aufl. durchgesehen von R. Sturm. Lpz. 1898. Weitere Literaturangaben in [2]. Fußnote 1 und 4.

Anmerkungen

¹ Krankheit und Tod verhinderten unser ordentliches Mitglied G. Rost (1870–1958) an der Verwirklichung seiner (schriftlich geäußerten) Absicht, seine nachstehend abgedruckte Note in unseren Sitzungsberichten zu veröffentlichen. Eine vor einiger Zeit aufgefundene Abschrift des verloren gegangenen Originalmanuskriptes wurde im Rahmen eines von Herrn Prof. Karl Strambach (Erlangen-Nürnberg) abgehaltenen Seminars von Frau Angelika Mohyla und Herrn Rudolf Großmann durchgearbeitet. Die beiden Letztgenannten haben die am Ende der Note beigefügten Erläuterungen zu einigen Stellen des unverändert abgedruckten Textes beigesteuert. Ihnen und nicht minder Herrn Kollegen Strambach gilt herzlicher Dank für ihre Bemühungen. Eine Vorbemerkung, enthaltend eine kurze Inhaltsangabe sowie eine Zusammenstellung der von Rost benutzten Bezeichnungen, sind der Note vorangestellt. Die Wahl des Titels, die Vorbemerkung sowie die Einteilung der Note in Paragraphen rühren vom Unterzeichneten her.

Otto Haupt (Erlangen)

² Der K_e ist, je nachdem im KSB 2 bzw. 1 bzw. keine Parabel enthalten ist, diejenige (reelle oder imaginäre) Ellipse E_e , welche „einem Kreis am nächsten kommt“ bzw. die einzige im KSB enthaltene Parabel bzw. diejenige Hyperbel H_e , welche „am meisten von der gleichseitigen Hyperbel abweicht“ (vgl. [2]).

³ Vgl. die Gleichung der E_e unten.

⁴ Die KSB sind paarweise kongruent (Spiegelung am Koordinatenursprung).

⁵ Die KSB sind kongruent (Spiegelung an der Geraden $x = y$).

⁶ Je nach dem Vorzeichen von $c^2 - e^2 + f$ ist die H_e spitz- oder stumpfwinklig, wie die Gleichung der H_e zeigt (wegen $0 < \alpha < \pi/2$ ist $-1 < a < 1$).

⁷ Vgl. [2], S. 101, 3.2.

⁸ Die vom KSB auf der uneigentlichen Geraden induzierte Involution wird mit der auf dem Steinerschen (Hilfs-)Kreis identifiziert.

⁹ [3], S. 56.

¹⁰ [3], S. 255.

¹¹ [3], S. 167.

¹² [3], S. 54.

¹³ [3], S. 252.

¹⁴ Lösungen, die kongruent sind, gelten als gleich.

¹⁵ Die Konstruktionsvorschriften $\triangle 1'2'3' \mid * 1'2'3$, $\triangle 1'2'3' \mid * 1'2'3$, $\triangle 1'2'3 \mid * 1'2'3'$ liefern das gleiche Grundpunktviereck wie $\triangle 1'2'3 \mid * 1'2'3'$. Entsprechendes gilt für $\triangle 1'2'3 \mid * 1'2'3$, $\triangle 1'2'3 \mid * 1'2'3'$, $\triangle 1'2'3 \mid * 1'2'3'$ und $\triangle 1'2'3' \mid * 1'2'3$.

¹⁶ Es sind R, S die Schnittpunkte des Steinerkreises mit seiner Symmetrieachse l , daher $\sphericalangle j'ZR = \sphericalangle RZj$ und Richtung j symmetrisch zu j' bzgl. RZ . Da RZ senkrecht zu SZ ($\alpha = \pi/2$), folgt die ungleichsinnige Ähnlichkeit der Dreiecke.

¹⁷ Daß die (höchstens) 8 bzw. 4. bzw. 8 Lösungen verschieden sind, ergibt sich aus der folgenden Konstruktion.

¹⁸ [3], S. 158.

¹⁹ Die Verknüpfung der Involutionen $-$ und $'$ liefert die von den Paaren konjugierter Durchmesser der E_e gebildete Involution (zu ihr gehört das Paar der Asymptotenrichtungen der H_e).

²⁰ Zufolge Konstruktion.

²¹ [3], S. 291.

²² [3], S. 253.

²³ Siehe Satz I.

²⁴ Diese Transformation entspricht der Involution $-'$.