BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1976

MÜNCHEN 1977

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Relative Probleme von Poincaré und Cousin auf nicht-reduzierten komplexen Räumen

Günther Kraus

Vorgelegt von Hern Prof. Dr. Karl Stein

Sei X ein komplexer Raum über einen komplexen Raum S – es sei also eine holomorphe Abbildung $p: X \to S$ ausgezeichnet – und sei Σ eine Teilmenge von S. In dieser Arbeit werden meromorphe Funktionen auf X betrachtet, deren meromorphe Beschränkung auf jede Faser X_s, $s \in \Sigma$, definiert ist; diese Funktionen werden meromorphe Funktionen relativ Σ genannt. Ferner wird der Begriff des Divisors relativ Σ eingeführt. Für $\Sigma = \emptyset$ erhält man die klassischen Begriffe.

Unter dem relativen Problem von Poincaré verstehe ich die folgende Frage: Gegeben sei eine meromorphe Funktion f relativ Σ. Gibt es eine globale Quotientendarstellung $f = g/h$, die durch analytische Beschränkung auf die Fasern X_s, $s \in \Sigma$, eine globale Quotientendarstellung von $f \mid X_s$ induziert? Gesucht wird also ein „Nichtnullteiler relativ Σ“ h, derart, daß $h \cdot f$ holomorph ist. Es wird bewiesen:

1. Ist Σ diskret und gilt in X Theorem A, so ist das Poincaré-Problem relativ Σ lösbar (Satz 4.4).

2. Ist X eine Steinsche Mannigfaltigkeit mit $H^2(X, \mathbf{Z}) = 0$, so ist das Poincaré-Problem relativ S lösbar (Satz 4.5).

Als relatives Cousin-II-Problem sehe ich an, notwendige und hinreichende Bedingungen für die „Lösbarkeit“ relativer Divisoren zu finden. Ein Divisor D relativ Σ wird dabei lösbar genannt, wenn D der durch eine invertierbare meromorphe Funktion f, deren meromorphe Beschränkungen auf die Fasern X_s, $s \in \Sigma$, definiert und invertierbar sind, bestimmte Hauptdivisor ist. Im Fall $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit eines relativen Divisors D das Verschwinden der durch D bestimmten Cohomologieklasse $\gamma(D) \in$ $\in H^2(X, \mathbf{Z})$ – es liegt also die gleiche topologische Charakterisierung vor wie im klassischen Fall. Insbesondere ist $H^2(X, \boldsymbol{Z}) = 0$ bei Räumen mit $H^1(X, \mathrm{O}_X) = 0$ eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit aller relativen Divisoren auf X. Um die Notwendigkeit dieser Bedingung zu beweisen, muß man prüfen, ob jede Cohomologieklasse $c \in H^2(X, \boldsymbol{Z})$ Bild eines Divisors relativ Σ ist. Sei $\mathrm{D}_{X/\Sigma}$ die Garbe der Divisoren relativ Σ auf X, $\mathrm{D}^+_{X/\Sigma}$ die Untergarbe der positiven Divisoren relativ Σ. Es wird gezeigt:

1. Ist Σ diskret und gilt in X Theorem A, so ist die kanonische Abbildung
$$\mathrm{D}^+_{X/\Sigma}(X) \to H^1(X, \mathrm{O}^*_X)$$
surjektiv (Satz 5.3).

2. Ist $X = S \times T$ mit Steinschen komplexen Räumen S, T und gilt $H^2(S, \boldsymbol{Z}) = 0$, so ist die kanonische Abbildung
$$\mathrm{D}_{X/\Sigma}(X) \to H^1(X, \mathrm{O}^*_X)$$
surjektiv (Satz 5.5).

Mit diesen Sätzen ist das relative Cousin-II-Problem in den betrachteten Fällen vollständig gelöst.

Für den Spezialfall $\Sigma = \emptyset$ ergeben sich aus den Sätzen 4.4 und 5.3 Verschärfungen von [1, Teorema 2 bzw. 1]; die dortigen Fallunterscheidungen können unterbleiben.

1. Bezeichnungen

In dieser Arbeit sei stets X ein komplexer Raum über einem komplexen Raum S; es ist also eine holomorphe Abbildung $p: X \to S$ ausgezeichnet. Die komplexen Räume werden nicht als reduziert vorausgesetzt, jedoch Hausdorffsch und mit einer abzählbaren Basis der Topologie.

Ist Y ein komplexer Raum, so sei

O_Y die Strukturgarbe von Y,

O^*_Y die Garbe der Einheiten von O_Y,

S_Y die Garbe der Nichtnullteiler von O_Y,

$\mathfrak{m}_y$ $(y \in Y)$ das maximale Ideal von $\mathrm{O}_{Y,y}$.

Eine offene Teilmenge $V \subset Y$ wird als komplexer Raum mit der Strukturgarbe $\mathrm{O}_V := \mathrm{O}_Y \mid V$ aufgefaßt. Für $f \in \mathrm{O}_Y(V)$ und $y \in V$ sei f_y der Keim von f im Punkt y und $\mathrm{f}(y) := f_y + \mathfrak{m}_y \in \mathrm{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y \cong C$ der Funktionswert von f im Punkt y.

Sind $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ kohärente analytische Garben auf Y, so ist die Idealgarbe

$$\mathbf{G} :_{O_Y} \mathbf{F} = \mathbf{G} : \mathbf{F} \subset \mathbf{O}_Y,$$

definiert durch $(\mathbf{G} : \mathbf{F})_y : = \mathbf{G}_y : \mathbf{F}_y : = \{f \in \mathbf{O}_{Y,y} : f \cdot \mathbf{F}_y \subset \mathbf{G}_y\}$ für alle $y \in Y$, ebenfalls kohärent; wir verwenden die Abkürzungen $0 : \mathbf{F} : = 0 \cdot \mathbf{O}_Y : \mathbf{F}$, $0 : f : = 0 \cdot \mathbf{O}_Y : f \cdot \mathbf{O}_Y$ $(f \in \mathbf{F}(Y))$. Sei ferner

$$|\mathbf{F}| : = \{y \in Y : \mathbf{F}_y \neq 0\}.$$

Eine abgeschlossene Teilmenge A von Y heißt analytisch dünn, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ der Beschränkungshomomorphismus $\mathbf{O}_Y(V) \to \mathbf{O}_Y(V \setminus A)$ injektiv ist.

Sei $s \in S$, $U \subset X$ offen, $f \in \mathbf{O}_X(U)$ und $\mathbf{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X. Dann sei

$X_s : = p^{-1}(s) : = \{s\} \times {}_S X$ die Faser im Punkt s,

$\mathbf{J}_s$ die definierende Idealgarbe von X_s,

$U_s : = U \cap X_s$,

f_s die analytische Beschränkung von f auf U_s, also $f_s = f \circ j_s$, wobei $j_s : U_s \to U$ die Einbettungsabbildung ist.

2. *Ein Lemma*

In X gelte Theorem A (vgl. [3, § 2, Satz 4]). Sei $\mathbf{F}$ eine kohärente $\mathbf{O}_X$-Modulgarbe. Zu jedem $x \in X$ existiere eine offene Umgebung $U^{(x)}$, eine Idealgarbe $\mathbf{J}^{(x)} \subset O_X \mid U^{(x)}$ und ein Garbenisomorphismus $\varphi^{(x)} : \mathbf{F} \mid U^{(x)} \to \mathbf{J}^{(x)}$.

Für alle $x \in X$ und $f \in \mathbf{F}(U^{(x)})$ sei dann

$$f(x) = 0 : \Leftrightarrow \varphi^{(x)}(f)_x \in \mathfrak{m}_x.$$

2.1 *Lemma.* Sei $R \subset X$ eine diskrete Teilmenge; für alle $x \in R$ sei $\mathbf{F}_x \cong \mathbf{O}_{X,x}$. Dann existiert ein $f \in \mathbf{F}(X)$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in R$.

Beweis. Da X abzählbare Topologie hat, ist R endlich oder abzählbar unendlich, also gibt es eine Teilmenge $M \subset \mathbf{N}$ und eine bijektive Abbildung $M \to \mathrm{R}$, $n \mapsto x_n$. Für jedes $n \in M$ sei $\mathbf{J}_n$ die Idealgarbe der analytischen Menge $R \setminus \{x_n\}$; wegen $(\mathbf{J}_n\mathbf{F})_{x_n} \cong O_{X,x_n}$ gibt es dann nach Theorem A ein $f_n \in \mathbf{J}_n\mathbf{F}(X)$

mit $f_n(x_n) \neq 0$. Sei $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Seminormen, welche die kanonische Fréchetraum-Topologie auf $\mathrm{F}(X)$ definiert; man kann o. E. voraussetzen: $p_k \leq p_{k+1}$ für alle k. Für $n \in M$ sei $a_n := \max\{1, p_n(f_n)\}$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \in M} \frac{2^{-n}}{a_n} f_n$$

gegen ein $f \in \mathrm{F}(X)$, und für alle $n \in M$ ist $f(x_n) = \frac{2^{-n}}{a_n} f_n(x_n) \neq 0$.

3. *Relativ analytisch dünne Mengen und relative Nichtnullteiler*

Sei Σ eine Teilmenge von S, und sei $A \subset X$ eine analytisch dünne Teilmenge. A heißt analytisch dünn relativ Σ, wenn für alle $s \in \Sigma$ gilt: $A_s := A \cap X_s$ ist analytisch dünn in X_s.

Die Garbe $\mathrm{S}_{X/\Sigma}$ der Nichtnullteiler relativ Σ ist definiert durch $\mathrm{S}_{X/\Sigma}(U) := \{f \in \mathrm{S}_X(U)$: Für alle $s \in \Sigma$ ist $f_s \in \mathrm{S}_{X_s}(U_s)\}$ für offene Mengen $U \subset X$. Es gilt $\mathrm{S}_{X/\emptyset} = \mathrm{S}_X$.

3.1 Lemma. Für ein kohärente Idealgarbe $\mathrm{J} \subset \mathrm{O}_X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

3.1.1 $|\mathrm{O}_X/\mathrm{J}|$ ist analytisch dünn relativ Σ.

3.1.2 $(\mathrm{J} \cap \mathrm{S}_{X/\Sigma})_x \neq \emptyset$ für alle $x \in X$.

3.1.3 $0 :_{\mathrm{O}_X} \mathrm{J} = 0$ und $0 :_{\mathrm{O}_{X_s}} \mathrm{J} = 0$ für alle $s \in \Sigma$.

Der Beweis benutzt den Nullstellensatz; er darf hier übergangen werden.

Für unsere Zwecke ist noch eine weitere Charakterisierung von „analytisch dünn" wichtig. Für einen komplexen Raum Y und alle $n \in N$ sei $\mathrm{O}_{[n]} \subset \mathrm{O}_Y$ die n-te Lückengarbe der Nullidealgarbe; für alle $y \in Y$ ist

$$\mathrm{O}_{[n],y} := \{s \in \mathrm{O}_{Y,y} : \text{Es gibt eine offene Umgebung } V \text{ von } y, \text{ eine analytische Menge } B \text{ in } V \text{ mit } \dim B \leq n \text{ und ein } t \in \mathrm{O}_Y(V) \text{ mit } t \mid V \setminus B = 0 \text{ und } t_y = s\}.$$

Nach Thimm [6] ist $O_{[n]}$ kohärent und daher $E_n := |O_{[n]}|$ analytisch. Das Komponentensystem $\mathfrak{M}_Y$ sei die Menge aller irreduziblen Komponenten der Mengen E_n, $n \in N$. Dann gilt [5, Lemma 2.3]:

3.2 *Lemma.* Eine analytische Menge $B \subset Y$ ist genau dann analytisch dünn, wenn sie keine der Mengen $A \in \mathfrak{M}_Y$ umfaßt.

3.3 *Korollar.* Sei $f \in O(X)$. Genau dann gilt $f \in S_{X/\Sigma}(X)$. wenn $|O_X/fO_X|$ keine analytische Menge des Systems

$$\mathfrak{M}_X \cup \bigcup_{s \in \Sigma} \mathfrak{M}_{X_s}$$

umfaßt.

3.4 *Lemma.* In X gelte Theorem A. Sei $\Sigma \subset X$ eine diskrete Teilmenge und $J \subset O_X$ eine kohärente Idealgarbe, derart, daß $|O_X/J|$ analytisch dünn relativ Σ ist. Dann gilt:

$$J(X) \cap S_{X/\Sigma}(X) \neq \emptyset.$$

Beweis. Wegen Lemma 3.2 und wegen der Voraussetzungen gibt es in X eine diskrete Punktmenge R mit folgenden Eigenschaften:

i) $R \cap |O_X/J| = \emptyset$.

ii) R trifft jede analytische Menge des Systems $\mathfrak{M}_X \cap \bigcup_{s \in \Sigma} \mathfrak{M}_{X_s}$

Nach 2.1 gibt es ein $f \in J(X)$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in R$; nach 3.3 gilt $f \in S_{X/\Sigma}(X)$.

4. *Relative meromorphe Funktionen und das relative Poincaré-Problem*

4.1 *Lemma.* Sei $S \subset O_X$ eine Untergarbe von Mengen. Es gibt eine O_X-Modulgarbe $S^{-1}O_X$ von lokalen Ringen und einen Garbenhomomorphismus $h: O_X \to S^{-1}O_X$ mit folgenden Eigenschaften:

4.1.1 Für jede offene Menge $U \subset X$ sind die Elemente von $h_U(S(U))$ invertierbar in $S^{-1}O_X(U)$.

4.1.2 Ist F eine weitere O_X– Modulgarbe von lokalen Ringen und $k: O_X \to F$ ein Garbenhomomorphismus, derart, daß für jede offene Menge $U \subset X$ die Elemente von $k_U(S(U))$ invertierbar in $\mathbf{F}(U)$ sind, so existiert genau ein Garbenhomomorphismus $l : \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{O}_X \to \mathbf{F}$ mit $k = l \circ h$.

Die Garbe $\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{O}_X$ ist als Lösung eines universellen Problems eindeutig bestimmt bis auf kanonische Isomorphie.

Der Beweis dieses Lemmas ist eine einfache Folgerung z. B. von [2, chap. II, § 2, N° 1, Prop. 1]. Man erhält $\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{O}_X$ als die der durch

$$U \mapsto \mathbf{O}_X(U)\,[\mathbf{S}(U)^{-1}]$$

definierten Prägarbe zugeordnete Garbe.

4.2 *Definition.* Sei Σ eine Teilmenge von S. $\mathbf{M}_{X/\Sigma} := \mathbf{S}_{X/\Sigma}{}^{-1}\mathbf{O}_X$ heißt die Garbe der meromorphen Funktionen relativ Σ.

Wir schreiben $\mathbf{M}_X$ an Stelle von $\mathbf{M}_{X/\emptyset}$. Die folgende Aussage ist leicht zu zeigen:

4.3 Sei $f \in \mathbf{M}_X(X)$. Dann ist die Idealgarbe $\mathbf{P}_f \subset \mathbf{O}_X$, definiert durch $\mathbf{P}_{f,x} := \{h \in \mathbf{O}_{X,x} : h \cdot f_x \in \mathbf{O}_{X,x}\}$ für $x \in X$, kohärent.

4.4 *Satz.* In X gelte Theorem A. Sei Σ eine diskrete Teilmenge von S. Dann gilt

$$\mathbf{M}_{X/\Sigma}(X) = \mathbf{S}_{X/\Sigma}(X)^{-1}\,\mathbf{O}_X(X),$$

d. h.: Zu jeder meromorphen Funktion $f \in \mathbf{M}_{X/\Sigma}(X)$ gibt es holomorphe Funktionen $g \in \mathbf{O}_X(X)$, $h \in \mathbf{S}_{X/\Sigma}(X)$ mit $f = g/h$.

Beweis. Für alle $\in X$ gibt es Funktionskeime $\tilde{g}_x \in \mathbf{O}_{X,x}$, $\tilde{h}_x \in \mathbf{S}_{X/\Sigma,x}$ mit $\tilde{h}_x \cdot f_x = \tilde{g}_x$, also $\tilde{h}_x \in \mathbf{P}_{f,x} \cap \mathbf{S}_{X/\Sigma,x}$. Nach 3.1 ist daher $|\,\mathbf{O}_X/\mathbf{P}_f\,|$ analytisch dünn relativ Σ. Nach 3.4 existiert ein $h \in \mathbf{P}_f(X) \cap \mathbf{S}_{X/\Sigma}(X)$, und es ist $g := h \cdot f \in \mathbf{O}_X(X)$.

Unter speziellen Voraussetzungen an X bleibt die Aussage von Satz 4.4 auch richtig für $\Sigma = S$. Es gilt nämlich:

4.5 *Satz.* Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $H^1(X, \mathbf{O}_X^*) = 0$[1]. Dann gilt

$$\mathbf{M}_{X/S}(X) = \mathbf{S}_{X/S}(X)^{-1}\,\mathbf{O}(X).$$

[1]) Diese Voraussetzung ist für Steinsche Mannigfaltigkeiten mit $H^2(X, \mathbf{Z}) = 0$ erfüllt.

Der Beweis ist eine Folgerung von Satz 5.1 über die Lösbarkeit des relativen Cousin-II-Problems und wird im Anschluß an Satz 5.1 gegeben.

5. *Relative Divisoren und das relative Cousin-II-Problem*

Sei Σ eine Teilmenge von S. Dann definieren wir:

$\mathbf{M}^*_{X/\Sigma} \subset \mathbf{M}_{X/\Sigma}$ durch $\mathbf{M}^*_{X/\Sigma,x} := \{f \in \mathbf{M}_{X/\Sigma,x}$: Es gibt $g, h \in \mathbf{S}_{X/\Sigma,x}$ mit $f = g/h\}$ für alle $x \in X$ (Garbe der invertierbaren (oder regulären) meromorphen Funktionen relativ Σ),

$\mathbf{D}_{X/\Sigma} := \mathbf{M}^*_{X/\Sigma}/\mathbf{O}^*_X$ (Garbe der Divisoren relativ Σ); dies ist eine Garbe abelscher Gruppen, die Verknüpfung wird als Addition geschrieben.

$\mathbf{D}^+_{X/\Sigma}$ sei das Bild von $\mathbf{S}_{X/\Sigma}$ unter dem kanonischen Garbenhomomorphismus $\pi_\Sigma : \mathbf{M}^*_{X/\Sigma} \to \mathbf{D}_{X/\Sigma}$; $\mathbf{D}^+_{X/\Sigma}$ heißt Garbe der positiven (oder effektiven) Divisoren relativ Σ.

Wir schreiben wieder $\mathbf{M}^*_X$, $\mathbf{D}_X$ und $\mathbf{D}^+_X$ an Stelle von $\mathbf{M}^*_{X/\emptyset}$, $\mathbf{D}_{X/\emptyset}$ bzw. $\mathbf{D}^+_{X/\emptyset}$. Die exakte Sequenz

$$0 \to \mathbf{O}^*_X \to \mathbf{M}^*_{X/\Sigma} \xrightarrow{\pi_\Sigma} \mathbf{D}_{X/\Sigma} \to 0$$

liefert die exakte Cohomologiesequenz

$$0 \to \mathbf{O}^*_X(X) \to \mathbf{M}^*_{X/\Sigma}(X) \xrightarrow{\overset{\circ}{\pi}_\Sigma} \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X) \xrightarrow{\overset{\circ}{\delta}_\Sigma} H^1(X, \mathbf{O}^*_X) \to \dots$$

Ein relativer Divisor $D \in \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X)$ heißt lösbar (oder Hauptdivisor relativ Σ), wenn er im Bild der Abbildung $\overset{\circ}{\pi}_\Sigma$ liegt. Wegen der Exaktheit ist dies äquivalent mit $\overset{\circ}{\delta}_\Sigma(D) = 0$. Gilt $H^1(X, \mathbf{O}_X) = 0$, so hat man einen Monomorphismus $\delta^1 : H^1(X, \mathbf{O}^*_X) \to H^2(X, \mathbf{Z})$[2]) und erhält somit (es sei $\gamma_\Sigma := \delta^1 \circ \overset{\circ}{\delta}_\Sigma$):

5.1 Satz. Gilt $H^1(X, \mathbf{O}_X) = 0$, so ist ein relativer Divisor $D \in \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X)$ genau dann lösbar, wenn $\gamma_\Sigma(D) = 0$ ist.

Wir können nun den Beweis von Satz 4.5 nachtragen: Sei $f \in \mathbf{M}_{X/S}(X)$. Für jedes $x \in X$ gibt es dann eine teilerfremde

---

[2]) δ^1 ist der „verbindende Homomorphismus" in der exakten Cohomologiesequenz, die aus der folgenden exakten Sequenz $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{O}_X \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{O}^*_X \to 0$ abgeleitet ist: Sei U eine offene Teilmenge von X und $f \in \mathbf{O}_X(U)$. Dann sei $\varepsilon(f) := e \circ f$ mit e: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$, $z \mapsto \exp(2\pi i z)$. Ist X Steinsch, also auch $H^2(X, \mathbf{O}_X) = 0$, ist δ^1 ein Isomorphismus.

Darstellung $f = g/h$ mit $g \in \mathrm{O}_{X,x}$, $h \in \mathrm{S}_{X/S,x}$; wegen der Teilerfremdheit folgt $\mathrm{P}_{f,x} = h \cdot \boldsymbol{O}_{X,x}$. Es gibt eine offene Umgebung $U^{(x)}$ von x und einen Repräsentanten $H^{(x)} \in \mathrm{S}_{X/S}(U^{(x)})$, der P_f über $U^{(x)}$ erzeugt. Für $x, y \in X$ folgt hieraus $(H^{(x)} \mid U^{(x)} \cap U^{(y)}) \cdot (H^{(y)} \mid U^{(x)} \cap U^{(y)})^{-1} \in \boldsymbol{O}_X^*(U^{(x)} \cap U^{(y)})$; die Familie $(U^{(x)}, H^{(x)})_{x \in X}$ definiert also einen positiven relativen Divisor $P_f \in \mathrm{D}^+_{X/S}(X)$. Wegen $H^1(X, \mathrm{O}_X^*) = 0$ gibt es ein $H \in \mathrm{M}^*_{X/S}(X)$ mit $\mathring{\pi}_S(H) = P_f$; für alle $x \in X$ folgt $H_x \in \mathrm{P}_{f,x} \cap \mathrm{S}_{X/S,x}$; daraus ergibt sich $H \in \mathrm{P}_f(X) \cap \mathrm{S}_{X/S}(X)$, also $F = G/H$ mit $G := H \cdot F \in \mathrm{O}_X(X)$.

Bemerkung: Die Funktionen G, H in dem obigen Beweis sind teilerfremd in $\mathrm{O}_X(X)$.

Nach Satz 5.1 ist das Verschwinden der Cohomologiegruppe $H^2(X, \boldsymbol{Z})$ bei Räumen mit $H^1(X, \mathrm{O}_X) = 0$ eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit aller relativen Divisoren auf X. Die Frage nach der Notwendigkeit dieser Bedingung führt auf die Frage nach der Surjektivität der Abbildung $\gamma_\Sigma : \mathrm{D}_{X/\Sigma}(X) \to H^2(X, \boldsymbol{Z})$. Ist X Steinsch, so gilt $H^1(X, \mathrm{O}_X^*) \cong H^2(X, \boldsymbol{Z})$, und γ_Σ ist genau dann surjektiv, wenn $\mathring{\delta}_\Sigma : \mathrm{D}_{X/\Sigma}(X) \to H^1(X, \mathrm{O}_X^*)$ es ist. Der folgende Satz gibt eine Antwort auf diese Frage.

5.2 *Satz.* In X gelte Theorem A. Sei Σ eine diskrete Teilmenge von S. Dann ist die Abbildung

$$\mathring{\delta}_\Sigma \mid \mathrm{D}^+_{X/\Sigma}(X) \to H^1(X, \mathrm{O}_X^*)$$

surjektiv.

Beweis. Sei $z \in H^1(X, \mathrm{O}_X^*)$. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X, so daß z repräsentiert wird durch eine Familie $(h_{ij})_{i,j \in I}$ mit $h_{ij} \in \boldsymbol{O}_X^*(U_i \cap U_j)$, $h_{ij} h_{jk} = h_{ik}$ über $U_i \cap U_j \cap U_k$ $(i, j, k \in I)$. Für $i \in I$ sei $\mathrm{F}_i := \mathrm{O}_X \mid U_i$. Die Zuordnung $\varphi \mapsto h_{ij}\varphi$ definiert dann Isomorphismen von Modulgarben.

$$\Theta_{ij} : \mathrm{F}_j \mid U_i \cap U_j \to \mathrm{F}_i \mid U_i \cap U_j \quad (i, j \in I)$$

mit $\Theta_{ij} \circ \Theta_{jk} = \Theta_{ik}$ über $U_i \cap U_j \cap U_k$ $(i, j, k \in I)$. Es gibt daher (vgl. [4,0,3.3.1]) eine O_X-Modulgarbe F und eine Familie $(\eta_i)_{i \in I}$ von Isomorphismen von O_{U_i}-Modulgarben $\eta_i : \mathrm{F} \mid U_i \to \mathrm{F}_i$ mit $\eta_i \circ \eta_j^{-1} = \Theta_{ij}$ über $U_i \cap U_j$ $(i, j \in I)$.

Man wähle eine diskrete Punktmenge $R \subset X$, die jede analytische Menge des Systems $\mathfrak{M}_X \cup \bigcup_{s \in \Sigma} \mathfrak{M}_{X_s}$ trifft. Nach Lemma 2.1 gibt es ein $g \in \mathrm{F}(X)$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in R$. Setzt man $f_i := \eta_i(g \mid U_i)$ für $i \in I$, so folgt $f_i \in \mathrm{S}_{X/\Sigma}(U_i)$.

Denn für jedes $A \in \mathfrak{M}_X$ gibt es ein $x \in R \cap A$; aus $g(x) \neq 0$ folgt $(0 : g)_x = 0$; für $h \in \mathbf{O}_{X,x}$ ist nämlich $hg_x = 0$ äquivalent mit $hf_{i,x} = 0$ ($i \in I$ so gewählt, daß $x \in \mathrm{U}_i$), also mit $h = 0$. Nach 3.2 ist $|\, 0 : g \,|$ analytisch dünn in X; daraus folgt $0 : g = \mathrm{O}$. Für alle $i \in I$ folgt hieraus $f_i \in \boldsymbol{S}_X(U_i)$.

Ebenso gibt es für alle $s \in \Sigma$ und $A \in \mathfrak{M}_{X_s}$ ein $x \in R \cap A$, also mit $g(x) \neq 0$. Hieraus folgt auf analoge Weise $(\boldsymbol{J}_s\mathrm{F} : {}_{\mathbf{O}_X}g)_x = \boldsymbol{J}_{s,x}$, also $(0 : {}_{\mathbf{O}_{X_s}} g_s)_x = 0$, also wie oben $0 : {}_{\mathbf{O}_{X_s}} g_s = 0$ und somit $f_{i,s} \in \mathrm{S}_{X_s}(U_{i,s})$ für alle $i \in I$.

Für alle $i, j \in I$ gilt $(f_i \mid U_i \cap U_j)(f_j \mid U_i \cap U_j)^{-1} = h_{ij} \in \mathbf{O}_X^*(U_i \cap U_j)$; daher wird durch die Familie $(U_i, f_i)_{i \in I}$ ein positiver Divisor $D \in \mathrm{D}_{X/\Sigma}^+(X)$ mit $\mathring{\delta}_\Sigma(D) = z$ definiert.

5.3 *Corollar.* Für einen Steinschen komplexen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

5.3.1 Es gibt eine diskrete Teilmenge Σ von S, derart, daß jeder positive Divisor relativ Σ lösbar ist.

5.3.2 Für jede Teilmenge Σ von S ist jeder Divisor relativ Σ lösbar.

3.3.3 $H^1(X, \mathbf{O}_X^*) = 0$.

Die Aussage von Satz 5.2 ist nicht völlig zufriedenstellend. Es interessiert insbesondere, ob es zu jedem $z \in H^1(X, \mathbf{O}_X^*)$ einen Divisor relativ S gibt, der auf z abgebildet wird. Die Antwort auf diese Frage ist schwieriger und kann in dieser Arbeit nur für den Fall $X = S \times T$ gegeben werden, wobei S und T Steinsche komplexe Räume sind und $H^2(S, \boldsymbol{Z}) = 0$ gelten muß; zum Beweis wird das Ergebnis von Satz 5.2 verwendet werden. Zunächst benötigen wir weitere Hilfsaussagen über relative Divisoren.

Ein relativer Divisor $D \in \mathrm{D}_{X/\Sigma}(X)$ definiert eine Familie $(U_i, f_i)_{i \in I}$, wobei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist und $f_i \in \boldsymbol{M}_{X/\Sigma}^*(U_i)$ ($i \in I$) relative meromorphe Funktionen sind mit $(f_i \mid U_i \cap U_j)(f_j \mid U_i \cap U_j)^{-1} \in \mathbf{O}^*_X(U_i \cap U_j)$ für alle $i, j \in \mathrm{I}$; umgekehrt definiert jede solche Familie einen relativen Divisor. Wir können nun eine invertierbare Untergarbe $\mathbf{O}_X(D)$ von $\mathbf{M}_{X/\Sigma}$ definieren: Für $x \in U_i$ sei $\mathbf{O}_X(D)_x := f_{i,x}^{-1}\, \mathbf{O}_{X,x}$. Diese Zuordnung bildet $\mathbf{D}_{X/\Sigma}(X)$ bijektiv auf die Menge der invertierbaren Untergarben von $\mathbf{M}_{X/\Sigma}$ ab.

Sei $|D| := \{x \in X$: Ist $i \in I$ mit $x \in U_i$, so gilt $f_{i,x} \notin \mathbf{O}^*_{X,x}\}$; diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Familie $(U_i, f_i)_{i \in I}$; ferner ist $|D| = |(\mathbf{O}_X(D) + \mathbf{O}_X) / (\mathbf{O}_X(D) \cap \cap \mathbf{O}_X)|$ und daher analytisch (mit $\mathbf{O}_X(D)$ ist auch $\mathbf{O}_X(D) + \mathbf{O}_X$ eine Untergarbe endlichen Typs von $\mathbf{M}_{X/\Sigma}$ und daher, wie man leicht sieht, kohärent).

5.4 Lemma. Sei Σ eine diskrete Teilmenge von S, und sei $D \in \mathbf{D}_X(X)$ ein Divisor. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

5.4.1 $D \in \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X)$.

5.4.2 $|D|$ ist analytisch dünn relativ Σ.

Beweis. Sei $x \in X$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x und ein $f \in \mathbf{M}^*_X(U)$ mit $D \mid U = \pi_U(f)$, und es ist zu zeigen: $f \in \mathbf{M}^*_{X/\Sigma}(U) \Leftrightarrow |D| \cap U$ analytisch dünn relativ Σ.

5.4.1 $\Rightarrow$ 5.4.2: Sei $f \in \mathbf{M}^*_{X/\Sigma}(U)$. Nach eventueller Verkleinerung von U findet man $g, h \in \mathbf{S}_{X/\Sigma}(U)$ mit $f = g/h$. Es ist $|D| \cap U \subset |\mathbf{O}_U/(g)| \cup |\mathbf{O}_U/(h)|$ und daher nach 3.1 analytisch dünn relativ Σ.

5.4.2 $\Rightarrow$ 5.4.1: U sei Steinsch gewählt, und $|D| \cap U$ sei analytisch dünn relativ Σ. Sei R eine diskrete Teilmenge, die mit $|D|$ leeren Durchschnitt hat, aber jede analytische Menge des Systems $\mathfrak{M}_X \cup \bigcup_{s \in \Sigma} \mathfrak{M}_{X_s}$ trifft. Nach 2.1 gibt es ein $h \in \mathbf{P}_f(U)$ mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in R$. Sei $g := fh$; nach 3.3 folgt $g, h \in \mathbf{S}_{X/\Sigma}(U)$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Im Beweis des nächsten Satzes wird folgende Bemerkung benutzt: Sei $\Sigma \subset S$ eine Teilmenge, $s \in \Sigma$ und $D \in \mathbf{D}_{X/\Sigma}(X)$. Dann induziert D in kanonischer Weise einen Divisor $D_s \in \boldsymbol{D}_{X_s}(X_s)$: Wird D in $x \in X$ durch $f \in \mathbf{M}^*_{X/\Sigma, x}$ gegeben, so wird D in x durch $f_s \in \mathbf{M}^*_{X_s, x}$ definiert. Ist D positiver Divisor, so auch D_s.

5.5 *Satz.* Es seien S und T Steinsche komplexe Räume, $X := S \times T$ und $p: X \to S$, $q: X \to T$ die Projektionsabbildungen. Ferner gelte $H^2(S, \mathbf{Z}) = 0$. Dann ist der Homomorphismus

$$\overset{\circ}{\delta}_S : \mathrm{D}_{X/S}(X) \to H^1(X, \mathrm{O}_X^*) \cong H^2(X, \mathbf{Z})$$

surjektiv.

Beweis. X wird als komplexer Raum über S (bzgl. p) und über T (bzgl. q) aufgefaßt. Es gibt abzählbare, diskrete Punktmengen $\Sigma \subset T$ und $R \subset X$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Σ trifft jede analytische Menge des Komponentensystems $\mathfrak{M}_T$.

2. R trifft jede analytische Menge des Komponentensystems $\mathfrak{M}_X$, die nicht in einer Faser X_t, $t \in \Sigma$, enthalten ist.

3. $R \cap X_t = \emptyset$ für alle $t \in \Sigma$.

Sei $\mathrm{J}_0 \subset \mathrm{O}_X$ die kohärente Idealgarbe aller auf R verschwindenden holomorphen Funktionen, $\mathrm{J}_1 := \bigcap_{t \in \Sigma} \mathrm{J}_t$ und $\mathrm{J} := \mathrm{J}_0 \cap \mathrm{J}_1$; dann ist J kohärent. Sei Y der durch J definierte komplexe Unterraum von X. Der kanonische Homomorphismus $\tau : \mathrm{O}_X(X) \to \to \mathrm{O}_Y(Y)$ ist nach Theorem B surjektiv.

Sei nun $z \in H^1(X, \mathrm{O}_X^*)$. Nach Satz 5.2 gibt es einen positiven relativen Divisor $D' \in \mathrm{D}_{X/\Sigma}^*(X)$ mit $\overset{\circ}{\delta}_\Sigma(D') = z$.

a) Sei $t \in \Sigma$, und sei D'_t der durch D' auf X_t induzierte positive Divisor. Wegen $H^2(X_t, \mathbf{Z}) = H^2(S, \mathbf{Z}) = 0$ gibt es nach Satz 5.1 ein $f^{(t)} \in \mathrm{S}_{X_t}(X_t)$ mit $\overset{\circ}{\pi}(f^{(t)}) = D'_t$, und man sieht – da D' ein Divisor ist – leicht: Ist $A \in \mathfrak{M}_X$ mit $A \subset X_t$, so gibt es ein $x \in A$ mit $f^{(t)}$ $(f^{(t)}(x) \neq 0$.

Da X_t Zusammenhangskomponente von Y ist, gibt es ein $g^{(t)} \in \mathrm{O}_Y(Y)$ mit $g^{(t)} \mid X_t = f^{(t)}$ und $g^{(t)} \mid Y \backslash X_t = 0$. Wähle $G^{(t)} \in \mathrm{O}_X(X)$ mit $\tau(G^{(t)}) = g^{(t)}$.

b) Sei $x \in R$. Dann gibt es ein $h^{(x)} \in \mathrm{O}_Y(Y)$ mit $h^{(x)}(x) \neq 0$ und $h^{(x)} \mid Y \backslash \{x\} = 0$. Sei $H^{(x)} \in \mathrm{O}_X(X)$ mit $\tau(H^{(x)}) = h^{(x)}$.

Man wähle nun Teilmengen M und N von $\boldsymbol{N}$ und bijektive Abbildungen $M \to \Sigma$, $m \mapsto t_m$, und $N \to R$, $n \mapsto x_n$. Wie im Beweis von Lemma 2.1 kann man nun positive reelle Faktoren a_m, b_n definieren, derart, daß die Reihe

$$\sum_{m \in M} \frac{2^{-m}}{a_m} G^{(t_m)} + \sum_{n \in N} \frac{2^{-n}}{b_n} H^{(x_n)}$$

in der Fréchetraum-Topologie von $\mathrm{O}_X(X)$ gegen ein $F \in \mathrm{O}_X(X)$ konvergiert, welches folgende Eigenschaften hat:

i) Zu jedem $A \in \mathfrak{M}_X$ existiert ein $x \in A$ mit $F(x) \neq 0$.

ii) Für jedes $t \in \Sigma$ gilt $F = \alpha_t f^{(t)}$ mit $\alpha_t \in \boldsymbol{R}$, $\alpha_t \neq 0$.

Aus i) folgt $F \in \mathrm{S}_X(X)$ (zusammen mit ii) ergibt sich $F \in \mathrm{S}_{X/\Sigma}(X)$). Sei $D'' = \overset{\circ}{\pi}(F)$ der durch F bestimmte Hauptdivisor, und sei $D := D' - D''$. Dann gilt $\delta^\circ(D) = \delta^\circ(D') = z$, und zum Beweis des Satzes genügt es zu zeigen: $D \in \mathrm{D}_{X/S}(X)$.

Aus $D_t = 0$ für jedes $t \in \Sigma$ folgt, da Σ alle analytischen Mengen von $\mathfrak{M}_T$ trifft, daß $|D_s|$ analytisch dünn ist für jedes $s \in S$ (Man beachte, daß X_s isomorph zu T ist). Nach Lemma 5.4 folgt die Behauptung.

Literatur

[1] Acquistapace, F. und F. Broglia: Problemi di Cousin e di Poincaré per spazi di Stein non ridotti. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 27 (1973).

[2] Bourbaki, N.: Algèbre commutative, Paris: Hermann 1961–1965.

[3] Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. math. I. H. E. S. 5 (1960).

[4] Grothendieck, A. und J. A. Dieudonné: Eléments de Géométrie Algébrique I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1971.

[5] Kraus, G.: Holomorphe Korrespondenzen und meromorphe Abbildungen allgemeiner komplexer Räume – Fortsetzungssätze. Manuscr. math. 6, 1–15 (1972).

[6] Thimm, W.: Lückengarben von kohärenten analytischenModulgarben. Math. Ann. 148, 372–394 (1962).