BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1975

MÜNCHEN 1976

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Edlinger-Flächen in isotropen Räumen

Von **Hans Sachs**, München

Herrn Prof. Dr. J. Lense zum 85. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Eine Regelfläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes heißt eine Edlinger-Fläche (E-Fläche), wenn ihre sämtlichen Schmiegquadriken Drehhyperboloide sind. Diese Flächen wurden von R. Edlinger entdeckt (vgl. [8], [9, S. 36]), und sind wiederholt Gegenstand bemerkenswerter Untersuchungen gewesen (vgl. z. B. [12], [19]). Da diese Flächen zu den konstant gedrallten Regelflächen gehören, verdient ihre Untersuchung auch von diesem Standpunkt aus gewisses Interesse (vgl. [4, S. 69f]).

In der folgenden Untersuchung wird der Begriff der E-Fläche in den einfach bzw. zweifach isotropen Raum $J_3^{(1)}$ bzw. $J_3^{(2)}$ übertragen und versucht, eine zur euklidischen Theorie analoge Theorie anzugeben.[1] Es zeigt sich, daß im einfach isotropen Raum viele Resultate gleich oder ähnlich lauten, während im zweifach isotropen Raum die Ergebnisse teilweise entschieden von der euklidischen Theorie abweichen. Die hier behandelten Kennzeichnungen der E-Flächen beziehen sich auf Eigenschaften ihrer natürlichen isotropen Invarianten (Krümmung, Windung und Striktion bzw. Drall), auf das Verhalten ihrer Zentralnormalenfläche, ihrer isotropen Krümmungslinien, ihrer Kurven konstanter Relativkrümmung und ihrer Krümmungstangentenflächen. Unter den E-Flächen werden die Drehregelflächen und die Regelflächen mit ebener Striktionslinie geometrisch gekennzeichnet. Die E-Flächen des zweifach isotropen Raumes werden explizit angegeben.

Die Differentialgeometrie des einfach isotropen Raumes, wie sie i. f. benötigt wird, findet sich in [14] — [16] dargestellt; bezüglich

---

[1] Die Theorie der isotropen Mannigfaltigkeiten wurde von J. Lense ausführlich studiert (vgl. das Literaturverzeichnis in [17]).

eines ausführlichen Literaturverzeichnisses sei auf [17] verwiesen. Die Geometrie des zweifach isotropen Raumes wurde von H. Brauner in [5] — [7] entwickelt. Bezüglich der Liniengeometrie dieser Räume vergleiche man [6], [11] und [18].

1. Abschnitt: E-Flächen des einfach isotropen Raumes

1.1 Regelflächen im einfach isotropen Raum

Im folgenden bezeichne A^3 den reellen dreidimensionalen affinen Raum mit affinen Koordinaten $\{x, y, z\}$, den wir in üblicher Weise zum projektiven Raum P^3 erweitern. P^3 sei auf homogene projektive Koordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ bezogen, wobei die Fernebene ω durch $x_0 = 0$ festgelegt werde. Das Ferngeradenpaar $i_{1,2} : x_0 = x_1^2 + x_2^2 = 0$ gestattet bekanntlich (vgl. z. B. [14, S. 4]) eine achtgliedrige Gruppe projektiver Automorphien, welche eine sechsgliedrige Untergruppe $G_6^{(1)}$ der Gestalt

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= c_1 + x \cos\varphi - y \sin\varphi \\ \bar{y} &= c_2 + x \sin\varphi + y \cos\varphi \\ \bar{z} &= c_3 + c_4 x + c_5\, y + z \end{aligned} \right.$$

als Normalteiler enthält. Die zur Transformationsgruppe (1) gehörige Geometrie bezeichnet man als *einfach isotrope Geometrie* und den mittels (1) metrisierten affinen Raum A^3 nennt man einen einfach isotropen Raum $J_3^{(1)}$. Die Geraden $i_1 : x_0 = x_1 - i x_2 = 0$ und $i_2 : x_0 = x_1 + i x_2 = 0$ bilden zusammen mit ihrem reellen Schnittpunkt $U(0 : 0 : 0 : 1)$ und ihrer reellen Verbindungsebene $\omega : x_0 = 0$ das absolute Gebilde dieses Raumes; insbesondere nennt man Geraden durch U vollisotrop. Ebenen, die U enthalten, aber nicht mit i_1 oder i_2 inzidieren heißen isotrop. Die Geometrie dieses Raumes wurde in zahlreichen Arbeiten von K. Strubecker untersucht (vgl. z. B. [14]–[16]). Bei der Untersuchung der Regelflächen dieses Raumes stützen wir uns auf die in [11] bzw. [18] entwickelte Theorie. Demnach unterscheidet man 3 Typen windschiefer Regelflächen,[2] die mit Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} bezeichnet werden. Regelflächen vom *Typ II* besitzen eine eigentliche vollisotrope Leitgerade, während Regel-

[2] Wir sprechen i. f. kurz von Regelflächen, womit stets windschiefe Regelflächen gemeint sind.

flächen vom *Typ III* eine Fernleitgerade durch den absoluten Punkt U besitzen und somit konoidal sind. Regelflächen, die weder zum Typ II noch zum Typ III gehören, fassen wir im *Typ I* zusammen; sie stellen den allgemeinen Typus dar und werden den folgenden Betrachtungen stets zugrunde gelegt. Regelflächen $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ gestatten die Normaldarstellung (vgl. [11, S. 10])

$$\mathfrak{x}(u,v) = \int [\mathfrak{e}(u) + \sigma(u)\,\mathfrak{b}]\,\mathrm{d}u + v\,\mathfrak{e}(u), \tag{2}$$

wobei der Parameter u die einfach isotrope Bogenlänge[3] auf der Striktionslinie $\mathfrak{s}(u) := \int [\mathfrak{e}(u) + \sigma(u)\mathfrak{b}]\,\mathrm{d}u$, $\mathfrak{e}(u)$ den normierten Richtungsvektor der Erzeugenden, σ die Striktion und $\mathfrak{b} = (0,0,1)$ den vollisotropen Zentraltangentenvektor der betrachteten Erzeugenden bezeichnet. Bezeichnen Striche Ableitungen nach u, so gelten – nach Einführung eines Zentralnormalenvektors $\mathfrak{n}$ – im Dreibein $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}\}$ die Ableitungsgleichungen (vgl. [18, S. 207])

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathfrak{e}' & = & \varkappa\,\mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' & = & -\varkappa\,\mathfrak{e} + \tau\,\mathfrak{b}. \\ \mathfrak{b}' & = & \mathfrak{o} \end{array}\right. \tag{3}$$

Hierbei bildet die Krümmung $\varkappa$ und die Windung τ von Φ_{I} zusammen mit der Striktion σ ein *vollständiges Invariantensystem* der Regelfläche. Die Invariante $\delta_{\mathrm{I}} := \dfrac{\sigma}{\varkappa}$ heißt *Drall* der Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$.

1.2 Definition der E-Flächen. Kennzeichnung mittels Invarianten.

Um zu einer Definition der E-Flächen zu gelangen, wird der Begriff „*Drehhyperboloid (Drehregelfläche)*“ im einfach isotropen Raum benötigt. Als zweckmäßig erweist sich die

Definition 1: Eine Quadrik Ψ_d des $J_3^{(1)}$ heißt *einschaliges Drehhyperboloid*, wenn sie durch eine isotrope Bewegung (1) auf die Normalform $x^2 + y^2 - A z^2 = B$ mit $A, B \in \boldsymbol{R}$ transformiert

---

[3] Alle i. f. auftretenden metrischen Größen sind im Sinne der einfach isotropen Geometrie zu verstehen, auch wenn der Zusatz „einfach isotrop“ künftig oft weggelassen wird.

werden kann. Die vollisotrope Gerade d durch den Mittelpunkt M der Quadrik Ψ_d heißt Achse des Drehhyperboloids.

In der Normalform $x^2 + y^2 - A z^2 = B$ berührt der Fernkegelschnitt von Ψ_d die absoluten Geraden $i_{1,2}$ in den Fernpunkten $(0 : \pm i : 1 : 0)$ der Horizontalstellung $z = 0$. Da (1) eine Berührungstransformation ist, ist die Fernkurve eines Drehhyperboloids somit ein Kegelschnitt, der jede der beiden absoluten Geraden in je einem von U verschiedenen Punkt berührt, also ein isotroper Fernkreis (vgl. [14, S. 11]). Dies motiviert obige Definition einer Drehfläche. Für diese Drehregelflächen gilt der

Hilfssatz: *Die isotropen Zentralnormalen der Erzeugenden eines Drehhyperboloids $\Psi_d \subset J_3^{(1)}$ laufen alle durch den Mittelpunkt von Ψ_d.*

Der Beweis ist leicht an Hand der Normalform $x^2 + y^2 - A z^2 = B$ zu führen, die sich mit $A =: \left(\frac{a}{c}\right)^2, B =: a^2$ in der Gestalt

$$\mathfrak{x}(t, v) = (a \cos t, a \sin t, 0) + v(a \sin t, - a \cos t, c) \tag{4}$$

parametrisieren läßt.

Nach diesen Vorbereitungen geben wir die

Definition 2: Eine C^2-Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ heißt eine *Edlinger-Fläche*, wenn ihre sämtlichen Schmiegquadriken Drehhyperboloide Ψ_d gemäß Definition 1 sind.

Diese Definition impliziert, daß E-Flächen des $J_3^{(1)}$ keine konoidalen Regelflächen sind, da für solche sämtliche Schmiegquadriken hyperbolische Paraboloide sind (vgl. [9, S. 35]). Für eine E-Fläche im $J_3^{(1)}$ gilt somit stets $\tau \neq 0$ (vgl. [19, S. 208]). Wir beweisen als erstes eine Kennzeichnung der E-Flächen über ihre natürlichen Invarianten.

Satz 1: *Eine C^2-Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ ist genau dann eine E-Fläche, wenn sie konstant gedrallt ist und für ihre natürlichen Invarianten gilt.*

$$\sigma \varkappa + \tau = 0. \tag{5}$$

Beweis:

Da die Schmiegquadrik Σ einer Regelfläche Φ_{I} längs einer Erzeugenden $e \in \Phi_{\mathrm{I}}$ diese längs e berührt, besitzen Σ und Φ_{I} längs e dieselbe Berührkorrelation und somit dieselbe isotrope Zentralnormale n. Nach dem Hilfssatz läuft die Zentralnormale n der Erzeugenden $e \in \Phi_{\mathrm{I}}$ durch den Mittelpunkt M der Schmiegquadrik Σ von Φ_{I} längs e. In einem lokalen Koordinatensystem $\{x, y, z\}$, dessen Ursprung der Striktionspunkt von e ist, und dessen Achsen der Reihe nach die Richtungsvektoren $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}\}$ besitzen, lautet die Gleichung der Lie-F_2 Σ (vgl. [13, S. 164]).

$$z^2 + \tau \delta_{\mathrm{I}} y^2 + \delta_{\mathrm{I}}' y z - 2 \sigma x z + 2 \sigma \delta_{\mathrm{I}} y = 0, \tag{6}$$

woraus man als Koordinaten des Mittelpunktes von Σ berechnet $M\left(-\frac{\delta_{\mathrm{I}}'}{2\tau}, -\frac{\sigma}{\tau}, 0\right)$. Wegen $M \in n$ folgt somit als erste Bedingung $\delta_{\mathrm{I}}' = 0$, d. h. $\delta_{\mathrm{I}} =$ *konst.* Wird $\delta_{\mathrm{I}}' = 0$ in (6) eingesetzt und beachtet, daß die Fernkurve von (6) die beiden absoluten Geraden $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 = 0$ berühren muß, so fließt daraus die Bedingung $\sigma^2 + \tau \delta_{\mathrm{I}} = 0$, die wegen $\sigma \neq 0$ mit (5) gleichwertig ist. Umgekehrt ist jede C^2-Regelfläche mit $\delta_{\mathrm{I}}' = 0$ und $\sigma \varkappa + \tau = 0$ eine E-Fläche gemäß Definition 2. w. z. z. w.

Dieser Satz ist ein direktes Analogon zu [9, S. 36].

Die von den Zentralnormalen n einer Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ gebildete Regelfläche heißt *Zentralnormalenfläche* $\Phi^{(n)}$. Man rechnet sofort nach, daß $\Phi^{(n)}$ genau dann eine Torse ist, wenn (5) gilt. Damit kann Satz 1 auch geometrisch formuliert werden.

Satz 2: *Eine C^2-Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ ist genau dann eine E-Fläche, wenn sie konstant gedrallt ist und ihre Zentralnormalenfläche eine Torse ist.*

Die zweite Bedingung dieses Satzes tritt an die Stelle der im euklidischen Raum gültigen Aussage, wonach die Striktionslinie einer E-Fläche eine Krümmungslinie ist (vgl. [9, S. 36]). Ein direktes Analogon zu dieser euklidischen Kennzeichnung existiert im isotropen Raum nicht, da in den Punkten der Striktionslinie von Φ_{I} die Tangentialebenen von Φ_{I} isotrop sind, und somit Φ_{I} in den Punkten der Striktionslinie nicht regulär ist (vgl. [16, S. 391]). Der Krümmungslinienbegriff im $J_3^{(1)}$ setzt aber reguläre Flächenpunkte voraus.

1.3 Die isotropen Krümmungslinien der E-Flächen

Wir untersuchen als nächstes die *isotropen Krümmungslinien* (vgl. [16, S. 401]) der E-Flächen. Um die Krümmungslinien einer Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ zu bestimmen, benötigen wir die Koeffizienten E, F, G bzw. L, M, N der ersten bzw. zweiten Fundamentalform der isotropen Flächentheorie. Aus (2) findet man mittels (3)

$$\begin{aligned} &E = 1 + v^2\varkappa^2, \quad F = 1, \quad G = 1 \\ &L = \frac{\varkappa}{v}(\delta_{\mathrm{I}} - v\delta_{\mathrm{I}}' - v^2\tau), \quad M = \frac{\sigma}{v}, \quad N = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

und gewinnt daraus über die Differentialgleichung

$$(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0$$

der isotropen Krümmungslinien (vgl. [16, S. 401]) einer Fläche im $J_3^{(1)}$ speziell für Regelflächen $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$

$$[v^2\varkappa(\varkappa\sigma + \tau) + v\varkappa\delta_{\mathrm{I}}'] + (v^2\tau + v\delta_{\mathrm{I}}' - \delta_{\mathrm{I}})\varkappa v' - \sigma v'^2 = 0, \tag{8}$$

wobei $v' := \dfrac{dv}{du}$ gesetzt wurde. Ist speziell Φ_{I} eine E-Fläche, so folgt wegen $\delta_{\mathrm{I}}' = 0$ und (5) aus (8)

$$v'[\varkappa(v^2\tau - \delta_{\mathrm{I}}) - \sigma v'] = 0, \tag{9}$$

d. h. die Kurven $v = konst.$ bilden eine Schar der Krümmungslinien auf Φ_{I}. Bezeichnet man diese Kurven in Analogie zu einer Begriffsbildung des Verfassers für den euklidischen Raum (vgl. [10]) als *Kurven konstanten Striktionsabstandes*, so hat man den

Satz 3: *Auf einer E-Fläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ schneidet eine Schar der isotropen Krümmungslinien die Erzeugenden von Φ_{I} nach kongruenten Punktreihen. Diese Schar isotroper Krümmungslinien sind die Kurven konstanten Striktionsabstandes.*

Dieser Satz ist ein isotropes Analogon zu [8, S. 346]. Eine Kurvenschar auf einer Regelfläche, welche die Erzeugenden nach kongruenten Punktreihen schneidet, ist eine spezielle *Doppelver-*

hältnisschar im Sinne von M. BARNER (vgl. [1]). Die Krümmungslinien einer E-Fläche Φ_{I} bilden somit eine Doppelverhältnisschar auf Φ_{I}. Hiervon gilt eine bemerkenswerte Umkehrung, die für den euklidischen Raum gleichzeitig von H. VOGLER bewiesen wurde (vgl. [19]).

Satz 4: *Bildet auf einer C^2-Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ eine Schar von isotropen Krümmungslinien eine Doppelverhältnisschar, dann ist Φ_{I} eine E-Fläche des $J_3^{(1)}$.*

Beweis:

Nach [3, S. 32] ist eine Kurvenschar $v = v(u, C)$ genau dann eine Doppelverhältnisschar, wenn sie einer Riccatischen Differentialgleichung

$$v' = a(u)v'^2 + b(u)v + c(u) \tag{10}$$

genügt. Wird (10) in (8) eingesetzt, so entsteht ein Polynom 4. Grades in $v(u, C)$, das für alle Scharkurven verschwinden muß. Daraus folgt, daß in diesem Polynom alle Koeffizienten verschwinden, was folgende Bedingungen liefert

(11, 1–5)
$$\begin{aligned}
&(1)\quad a(\tau - \delta_{\mathrm{I}} a) = 0\\
&(2)\quad a\delta_{\mathrm{I}}' + b(\tau - 2a\delta_{\mathrm{I}}) = 0\\
&(3)\quad \varkappa\sigma + \tau(1 + c) - \delta_{\mathrm{I}} a(1 + 2c) + b(\delta_{\mathrm{I}}' - b\delta_{\mathrm{I}}) = 0\\
&(4)\quad \delta_{\mathrm{I}}'(1 + c) - b\delta_{\mathrm{I}}(1 + 2c) = 0\\
&(5)\quad c\delta_{\mathrm{I}}(1 + c) = 0.
\end{aligned}$$

Gilt in (11,1) $a = 0$, so folgt aus (11,2) wegen $\tau \neq 0 : b = 0$ und aus (11,3)

$$\varkappa\sigma + \tau(1 + c) = 0. \tag{12}$$

(11,4) wird zu $\delta_{\mathrm{I}}'(1 + c) = 0$. Wäre $1 + c = 0$, so würde damit $\varkappa\sigma = 0$ folgen, was für windschiefe Flächen unmöglich ist. Somit gilt $\delta_{\mathrm{I}}' = 0$ und wegen $\delta_{\mathrm{I}} \neq 0$ folgt aus (11,5) $c = 0$, womit (12) in die Bedingung (5) übergeht. Dieser Fall liefert somit die E-Flächen, für die alle Gleichungen (11) erfüllt sind. Gilt in (11,1) $a \neq 0$, so folgt $\tau - \delta_{\mathrm{I}} a = 0$ und aus (11,2) entsteht $a\delta_{\mathrm{I}}' = b\tau$. Ist $1 + c = 0$, so wird nach (11,4) $b = 0$, und damit $\delta_{\mathrm{I}}' = 0$.

Aus (11,3) folgt nunmehr $\varkappa\sigma + \delta_{\mathrm{I}} a = 0$, d. h. $\varkappa\sigma + \tau = 0$ und man gelangt wieder zu den E-Flächen. Ist hingegen $1 + c \neq 0$, d. h. $c = 0$, so wird aus (11,4) $\delta_{\mathrm{I}}' - b\,\delta_{\mathrm{I}} = 0$, womit aus (11,3) folgt: $\varkappa\sigma + \tau - \delta_{\mathrm{I}} a = \varkappa\sigma = 0$ im Widerspruch dazu, daß Φ_{I} windschief sein sollte. w. z. z. w.

Im Beweis zu Satz 4 treten die E-Flächen zweimal als Lösungsflächen auf, je nachdem welche Schar der beiden Krümmungslinienscharen als Doppelverhältnisschar auf Φ_{I} betrachtet wird. Wie aus (9) ersichtlich, bilden tatsächlich beide Scharen von Krümmungslinien auf einer E-Fläche je eine Doppelverhältnisschar. Der Satz 4 enthält als Spezialfall den

Satz 5: *Schneidet eine Schar von isotropen Krümmungslinien die Erzeugenden einer C^2-Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ nach kongruenten Punktreihen, dann ist Φ_{I} eine E-Fläche.*

Das euklidische Analogon zu diesem Satz wurde von R. Edlinger in [8, S. 346] ohne Rechnung bewiesen; einen analytischen Beweis gab der Verfasser in [12, S. 242].

1.4 Kurven konstanter Relativkrümmung auf E-Flächen

Auf jedem C^2-Flächenstück $\mathfrak{F} \subset J_3^{(1)}$ mit nicht konstanter Relativkrümmung K (vgl. [15]) existiert ein Kurvenstück k, längs dem $K(u,v)$ einen vorgeschriebenen konstanten Wert K annimmt. Durchläuft K eine Teilmenge der reellen Zahlen, so erhält man auf diese Weise eine einparametrige Kurvenschar auf $\mathfrak{F}$, deren Exemplare wir kurz als *K-Kurven* (*Kurven konstanter Relativkrümmung*) bezeichnen. Speziell für Regelflächen $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ folgt aus dem isotropen Analogon zur Formel von E. Lamarle (vgl. [18, S. 211])

$$v(u,c) = \sqrt{c\,\delta_{\mathrm{I}}(u)} \quad mit \quad c = \sqrt{-\frac{1}{K}}. \tag{13}$$

Bei vorgegebenem $K = konst.$ wird über (13) und (2) das entsprechende K-Kurvenstück auf Φ_{I} festgelegt. Aus (13) folgt als Differentialgleichung der K-Kurven einer Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ die Riccatische Differentialgleichung

$$v' = \frac{\delta_{\mathrm{I}}'}{2\delta_{\mathrm{I}}}\, v. \tag{14}$$

Somit bilden die K-Kurven jeder Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ eine Doppelverhältnisschar. Der nächste Satz bringt eine Kennzeichnung konstant gedrallter Regelflächen.

Satz 6: *Eine C^2-Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ ist genau dann konstant gedrallt, wenn die K-Kurven die Erzeugenden der Fläche nach kongruenten Punktreihen schneiden.*

Beweis:

Eine einparametrige Kurvenschar auf Φ_{I}, die die Erzeugenden nach kongruenten Punktreihen schneidet, kann nämlich durch

$$v = \varphi(u) + c \tag{15}$$

beschrieben werden, wobei $\varphi(u)$ eine willkürliche Funktion und c den Scharparameter bezeichnet. (5) liefert in (14) eingesetzt die Bedingung $\delta'_{\mathrm{I}} c + (\delta'_{\mathrm{I}} \varphi - 2\varphi' \delta_{\mathrm{I}}) = 0$, die nur für $\delta'_{\mathrm{I}} = 0, \varphi' = 0$ zu erfüllen ist. Die entsprechenden Regelflächen haben somit konstanten Drall und die K-Kurven sind die Kurven konstanten Striktionsabstandes $v = konst.$ Die Umkehrung folgt unmittelbar aus (14). w. z. z. w.

Ein analoges Resultat für den euklidischen Raum habe ich in [12, S. 244] ausgesprochen. Mittels Satz 2 erhält man eine weitere Kennzeichnung der E-Flächen.

Satz 7: *Eine C^2-Regelfläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ ist genau dann eine E-Fläche, wenn ihre Zentralnormalenfläche eine Torse ist und die K-Kurven die Erzeugenden von Φ_{I} nach kongruenten Punktreihen schneiden.*

Eine weitere Kennzeichnung der E-Flächen liefert der

Satz 8: *Stimmen auf einer C^2-Regelfläche $\Phi \subset J_3^{(1)}$ die K-Kurven mit einer Schar der Krümmungslinien der Fläche überein, dann ist Φ_{I} eine E-Fläche und umgekehrt.*

Beweis:

Stimmen nämlich die K-Kurven mit einer Schar von Krümmungslinien überein, dann bilden diese Krümmungslinien auf Φ_{I} eine Doppelverhältnisschar nach (14) und gemäß Satz 4 ist Φ_{I} eine E-Fläche. Umgekehrt sind auf einer E-Fläche die Kurven konstanten Striktionsabstandes gleichzeitig Krümmungslinien und K-Kurven. w. z. z. w.

Auch hierzu existiert ein euklidisches Analogon (vgl. [12, S. 245]). Der folgende Satz beschäftigt sich mit den Krümmungstangenten einer E-Fläche längs einer Erzeugenden.

Satz 9: *Sei $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ eine E-Fläche, e eine Erzeugende auf Φ_{I} und $\{k_\nu\}$ jene Schar von Krümmungslinien auf Φ_{I}, die von den Kurven konstanten Striktionsabstandes verschieden sind. Dann treffen die Tangenten der Kurven k_ν in den Punkten von e alle die Achse der zu e gehörigen Drehschmiegquadrik.*

Beweis:

Für eine E-Fläche Φ_{I} hat der Mittelpunkt M der Schmiegquadrik im lokalen Koordinatensystem $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}\}$ die Koordinaten

$$M\left(0, -\frac{\sigma}{\tau}, 0\right). \tag{16}$$

Andrerseits gewinnt man für die Tangente t an die Krümmungslinie k_ν in einem Punkt $P(v, 0, 0) \in e$ die Darstellung

$$\left\{\begin{array}{l} x = v + \lambda(1 + v') \\ y = \quad\;\; \lambda \varkappa v \\ z = \quad\;\; \lambda \sigma \end{array}\right. , \tag{17}$$

wobei λ einen auf t laufenden Parameter bezeichnet und v' der Differentialgleichung

$$v' = \frac{\tau}{\delta_{\mathrm{I}}} v^2 - 1 \tag{18}$$

zu entnehmen ist, die man aus dem zweiten Faktor in (9) erhält. Nun ist in (17) $x = 0$ genau für $\lambda = -\frac{v}{1 + v'} = -\frac{\delta_{\mathrm{I}}}{\tau v}$, woraus man mittels (17) $y = -\frac{\sigma}{\tau}$ folgert. Somit trifft t die vollisotrope Gerade durch M. w. z. z. w.

Zu diesem Satz existiert eine gewisse Umkehrung, die somit eine weitere Kennzeichnung der E-Flächen liefert.

Satz 10: *Sei $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ eine nicht konoidale Regelfläche, M_e der Mittelpunkt, der zu einer regulären nicht-torsalen Erzeugenden*

$e \in \Phi_{\mathrm{I}}$ gehörigen Schmiegquadrik und $\{k_v\}$ eine Schar von Krümmungslinien auf Φ_{I}. Treffen alle Tangenten an die Kurven k_v in den Punkten der Erzeugenden $e \in \Phi_{\mathrm{I}}$ je einen Strahl $a(e)$ durch M_e, dann ist Φ_{I} eine E-Fläche. $a(e)$ ist die Achse des entsprechenden Drehschmieghyperboloids und die Kurven $\{k_v\}$ bilden jene Schar von Krümmungslinien auf Φ_{I}, die von den Kurven konstanten Striktionsabstandes verschieden sind.

Beweis:

Wir legen den zu einer Erzeugenden e gehörigen Strahl $a(e)$ durch einen Richtungsvektor

$$\mathfrak{a}(u) = (a_1(u), a_2(u), a_3(u)) \tag{19}$$

fest, dessen Koordinaten wir auf das begleitende Dreibein $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}\}$ der Erzeugenden e beziehen; auch die folgenden Überlegungen werden alle in diesem lokalen Koordinatensystem durchgeführt. Zunächst erkennt man, daß stets $a_3 \neq 0$ gilt, denn andernfalls würde a in der asymptotischen Ebene α von e liegen und diese würde alle Krümmungstangenten längs e enthalten. Dann wäre aber α Tangentialebene von Φ_{I} in allen Punkten von e, was für eine reguläre nicht-torsale Erzeugende unmöglich ist. Aus dem Beweis von Satz 1 entnimmt man die Koordinaten von M_e zu

$$M_e\left(-\frac{\delta_{\mathrm{I}}'}{2\tau}, -\frac{\sigma}{\tau}, 0\right), \tag{20}$$

woraus man mittels (19) als Plückerkoordinaten g_j $(j = 1, \ldots, 6)$ der Geraden $a(e)$ errechnet

$$\begin{aligned} g_1 : g_2 : g_3 : g_4 : g_5 : g_6 &= \\ &= a_1 : a_2 : a_3 : m_2 a_3 : -m_1 a_3 : m_1 a_2 - m_2 a_1. \end{aligned} \tag{21}$$

Bestimmt man die Plückerkoordinaten t_j $(j = 1, \ldots, 6)$ der durch einen Punkt $P(v, 0, 0) \in e$ laufenden Tangente t an die Krümmungslinie der Schar $\{k_v\}$ durch P, so findet man

$$t_1 : t_2 : t_3 : t_4 : t_5 : t_6 = 1 + v' : v\varkappa : \sigma : 0 : -v : v^2\varkappa, \tag{22}$$

wobei v der Differentialgleichung (8) zu entnehmen ist. Sollen alle Krümmungstangenten dieser Schar längs e die Gerade a

treffen, so ist für unendlich viele Werte $v \in \boldsymbol{R}$ die Schnittbedingung $\Omega(t, a) = 0$ (vgl. [20, S. 103]) zu erfüllen, also

$$(23) \qquad 2\sigma a_3 v' = 2\tau\varkappa a_3 v^2 + (\varkappa a_3 \delta_I' - 2\tau a_2)v + \\ + 2a_1\sigma^2 - \delta_I' a_2 \sigma - 2\sigma a_3.$$

Wird (23) in (8) eingesetzt, so entsteht nach längerer Rechnung und unter Verwendung der Abkürzungen

$$(24) \qquad \begin{aligned} \varrho_1 &:= 4\sigma\varkappa\delta_I' - 2\varkappa^2\delta_I\delta_I' \\ \varrho_2 &:= 4\sigma\varkappa\tau + 4\sigma^2\varkappa^2 + \varkappa^2\delta_I'^2 - 2\varkappa^2\tau\delta_I \\ F &= 2a_1\sigma^2 - a_2\sigma\delta_I' - \sigma a_3 \end{aligned}$$

die Bedingungsgleichung

$$(25) \qquad a_3^2(\varkappa^2\tau^2v^4 + 2\varkappa^2\tau\delta_I'v^3 + \varrho_2 v^2 + \varrho_1 v + \sigma^2) = a_3^2\tau^2\varkappa^2v^4 - \\ - 4a_2a_3\varkappa\tau^2v^3 + (4\tau^2a_2^2 + 2Fa_3\tau\varkappa)v^2 - 4F\tau a_2 v + F^2.$$

(25) reduziert sich auf ein Polynom 3. Grades in v und aus dem Verschwinden sämtlicher Koeffizienten dieses Polynoms folgert man unter Beachtung von $a_3 \neq 0$ die vier Bedingungen

$$(26, \text{a–d}) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad 2a_3\varkappa^2\tau\delta_I' = -4a_2\varkappa\tau^2 \\ &\text{(b)} \quad a_3^2\varrho_2 = 4\tau^2a_2^2 + 2Fa_3\varkappa\tau \\ &\text{(c)} \quad a_3^2\varrho_1 = -4F\tau a_2 \\ &\text{(d)} \quad a_3^2\sigma^2 = F^2 \end{aligned}$$

Zunächst lassen sich (26, a) und (26, b) gemeinsam umformen zu

$$(27, \text{a–b}) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad a_3\varkappa\delta_I' = -2a_2\tau \\ &\text{(b)} \quad 2a_3(\tau + \sigma\varkappa) = \tau(2a_1\sigma - a_2\delta_I') \end{aligned}$$

und weiters folgt mittels (27, a) aus (26, c) die Schlüsselgleichung

$$(28) \qquad a_3\delta_I'(2\sigma - \varkappa\delta_I) = \delta_I' F.$$

Aus dieser Bedingung fließt $\delta_I' = 0$, d. h. $\delta_I =$ *konst.* Andernfalls wäre nämlich $F = a_3(2\sigma - \varkappa\delta_I) = a_3\sigma$ und damit würde aus (24) folgen $2a_3 = 2a_1\sigma - a_2\delta_I'$. Setzt man diesen Ausdruck schließlich in (27, b) ein, so entsteht $2a_3(\tau + \sigma\varkappa) = 2\tau a_3$, woraus $\sigma\varkappa = 0$ fließen würde, was für windschiefe Regelflächen unmöglich ist. Demnach besitzt eine dem System (26, a–d) genügende Lösungsfläche notwendig konstanten Drall $\delta_I^{(0)}$. Für Flächen dieser Art erhält man wegen $\tau \neq 0$ aus (24) bzw. (27, a) $\varrho_1 = 0$ bzw. $a_2 = 0$ und hiermit reduziert sich (26, a–d) auf die beiden Bedingungen

(29, a–b) (a) $a_3 \varrho_2 = 2 F \tau \varkappa$

(b) $a_3^2 \sigma^2 = F^2$.

Aus (29, b) findet man mittels (24) die Gleichung

$$a_1(a_1 \sigma - a_3) = 0, \tag{30}$$

während sich (29, a) zu

$$a_3(\sigma \varkappa + \tau) = a_1 \tau \sigma \tag{31}$$

umformen läßt. Würde aus (30) $a_3 = a_1 \sigma$ folgen, so wäre (31) gleichwertig mit $\sigma \varkappa = 0$, was für windschiefe Regelflächen unmöglich ist. Demnach gilt $a_1 = 0$ und aus (31) ergibt sich schließlich $\sigma \varkappa + \tau = 0$, womit Φ_{I} gemäß Satz 1 als E-Fläche nachgewiesen ist. w. z. z. w.

Ein euklidisches Analogon zu diesem Satz habe ich in [12, S. 249] bewiesen.

1.5 Kennzeichnung der Drehregelflächen unter den E-Flächen

Nach Satz 2 ist eine E-Fläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ konstant gedrallt und ihre Zentralnormalenfläche ist eine Torse Γ. Γ ist kein Zylinder, sonst würde die Striktionslinie von Φ – als Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden von Γ – in einer isotropen Ebene liegen, was für eine Regelfläche vom Typ I unmöglich ist. Die Zentralnormalen von Φ_{I} bilden somit die Tangentenfläche einer gewundenen oder ebenen Kurve (*Typ A*) oder einen Kegel, zu dem wir auch den Fall eines Geradenbüschels hinzurechnen (*Typ B*). Im Fall A sprechen wir von einer E-Fläche mit tangentenflächiger Zentralnormalentorse, im Fall B von einer E-Fläche mit konischer Zentralnormalentorse. Wir berechnen in jedem Fall die Gratpunkte der Torse Γ.

Man beweist leicht den folgenden

Hilfssatz: *Ist im $J_3^{(1)}$ eine Torse, die kein Zylinder ist, durch*

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{y}(u) + v\mathfrak{e}(u) \quad \text{mit } \bar{\mathfrak{e}}^2 = 1, \quad (\dot{\mathfrak{y}}, \mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}}) = 0 \tag{32}$$

gegeben, dann wird auf jeder Erzeugenden von (32) *der Gratpunkt durch den Parameterwert*

$$v_g = -\frac{(\dot{\mathfrak{y}} \cdot \dot{\mathfrak{e}})}{\dot{\mathfrak{e}}^2} \tag{33}$$

festgelegt.

Wendet man (33) auf die Zentralnormalenfläche $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{s}(u) + v\mathfrak{n}(u)$ einer E-Fläche an, so erhält man $v_g = \frac{1}{\varkappa}$ und daher aus (20) unter Beachtung von $\delta_I' = 0$, $\sigma\varkappa + \tau = 0$ den

Satz 11: *Die Gratpunktmenge der Zentralnormalentorse Γ einer E-Fläche $\Phi_I \subset J_3^{(1)}$ stimmt überein mit der Menge der Mittelpunkte der Lie-F_2 von Φ_I.*

Der nächste Satz liefert eine Kennzeichnung der einschaligen Drehhyperboloide des $J_3^{(1)}$.

Satz 12: *Die einzigen E-Flächen $\Phi_I \subset J_3^{(1)}$ mit konischer Zentralnormalentorse Γ sind die einschaligen Drehhyperboloide des $J_3^{(1)}$.*

Beweis:

Die Striktionslinie einer E-Fläche dieser Art muß eine Orthogonaltrajektorie des Kegels Γ sein, dessen Spitze wir o. B. d. A. als Koordinatenursprung wählen. Die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden von Γ

$$\mathfrak{y}(s) = \lambda\mathfrak{e}(s) \quad \text{mit } \bar{\mathfrak{e}}^2 = 1 \tag{34}$$

erhält man zu $\mathfrak{y}(s) = c_0\mathfrak{e}(s)$ mit $c_0 = \mathit{konst.} \neq 0$. Die Erzeugenden von Φ_I liegen dann in der von $\dot{\mathfrak{y}} = c_0\dot{\mathfrak{e}}$ und $\mathfrak{b} = (0, 0, 1)$ aufgespannten Ebene, so daß sich für Φ_I notwendig der Ansatz

$$\mathfrak{x}(s, v) = c_0\mathfrak{e}(s) + v[c_0\dot{\mathfrak{e}} + \varphi(s)\mathfrak{b}] \tag{35}$$

mit einer zunächst willkürlichen Funktion $\varphi(s)$ ergibt. Für (35) ist nun einerseits konstanter Drall zu fordern, andrerseits zu verlangen, daß alle Zentralnormalen durch den Ursprung laufen. Unter Benützung der Drallformel

$$\delta_{\mathrm{I}} = \frac{(\dot{\mathfrak{y}}, \mathfrak{a}, \dot{\mathfrak{a}})\, \bar{\mathfrak{a}}^2}{[\mathfrak{a}, \dot{\mathfrak{a}}]^2} \tag{36}$$

für eine Regelfläche Φ_{I} mit der Darstellung $\mathfrak{x}(t, v) = \mathfrak{y}(t) + v\mathfrak{a}(t)$ (vgl. [11, S. 13]), wobei t einen allgemeinen Parameter bezeichnet und $\mathfrak{a}(t)$ nicht normiert ist, findet man für (35) die Bedingung

$$\delta_{\mathrm{I}}^{(0)} = -\varphi(s) \frac{\bar{\dot{\mathfrak{n}}}^2}{[\dot{\mathfrak{e}}, \ddot{\mathfrak{e}}]}$$

und damit folgenden Ansatz der Lösungsflächen

$$\mathfrak{x}(s, v) = c_0 \mathfrak{e}(s) + v[c_0 \dot{\mathfrak{e}} - \delta_{\mathrm{I}}^{(0)} \frac{[\dot{\mathfrak{e}}, \ddot{\mathfrak{e}}]}{\bar{\dot{\mathfrak{n}}}^2} \mathfrak{b}]. \tag{37}$$

Wegen $\bar{\mathfrak{e}}^2 = 1$ kann (37) in der Gestalt

$$\left| \begin{aligned} x &= c_0 \cos s - v\, c_0 \sin s \\ y &= c_0 \sin s + v\, c_0 \cos s \\ z &= c_0\, f(s) + v\, [c_0\, f'(s) - \delta_{\mathrm{I}}^{(0)}] \end{aligned} \right. \tag{38}$$

parametrisiert werden, wobei $f(s) := e_3(s)$ gesetzt wurde. Die Leitkurve ist hierbei die Striktionslinie der Fläche, wie man leicht bestätigt. Die Forderung, daß die Zentralnormalen

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{s}(s) + \lambda \mathfrak{n}(s)$$

der Regelfläche (38) durch den Koordinatenursprung laufen, ist gleichwertig mit der Differentialgleichung

$$f'' + f = 0 \tag{39}$$

für die Funktion $f(s)$. Alle Lösungen von (39) liefern über (38) die E-Flächen der gesuchten Art. Die allgemeine Lösung von (39) lautet

$$f(s) = c_1 \cos s + c_2 \sin s$$

mit Integrationskonstanten c_1, c_2. Damit folgt als Parameterdarstellung der *Striktionslinie* von (38)

$$\left| \begin{aligned} x &= c_0 \cos s \\ y &= c_0 \sin s \\ z &= c_0 (c_1 \cos s + c_2 \sin s). \end{aligned} \right. \tag{40}$$

Diese Kurve liegt auf dem Drehzylinder $x^2 + y^2 = c_0^2$ und in der nichtisotropen Ebene $\varepsilon : z = c_1 x + c_2 y$ und ist somit ein *Kreis* (vgl. [14, S. 10]) mit dem Mittelpunkt M im Koordinatenursprung. Die Zentralnormalen von Φ_{I} liegen somit in einem Büschel um M in ε. Durch eine isotrope Bewegung (1) kann man ε in die Ebene $z = 0$ transformieren; die allgemeinste Lösungsfläche Φ_{I} entsteht dann durch eine isotrope Bewegung aus jener speziellen Lösungsfläche, die zur trivialen Lösung $f = 0$ $(c_1 = c_2 = 0)$ von (39) gehört. Hiermit folgt aus (38)

$$x^2 + y^2 - \frac{c_0^2}{\delta_{\mathrm{I}}^{(0)\,2}}\, z^2 = c_0^2,$$

d. h. die Gleichung eines isotropen einschaligen Drehhyperboloids Ψ_d nach Definition 1. w. z. z. w.

Bemerkung: Nach Satz 12 gibt es keine E-Fläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$, deren Zentralnormalentorse Γ ein Kegel ist, der nicht zu einem Büschel ausgeartet ist. Es gibt allerdings sogar algebraische Regelflächen $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$, deren Zentralnormalen einem Kegel Γ angehören, die jedoch keine E-Flächen sind. Ein Beispiel ist die Regelfläche 6. Ordnung

$$(41) \qquad \begin{cases} x = \cos s - v \sin s \\ y = \sin s + v \cos s \\ z = -\frac{1}{3} \cos 2s + \frac{v}{6} \sin 2s, \end{cases}$$

deren Zentralnormalen auf einem Kegel 4. Ordnung mit der Gleichung $9z^2(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2)^2$ liegen. Ihre Striktionslinie ist eine Raumkurve 4. Ordnung, 1. Art.

1.6 E-Flächen mit ebener Striktionslinie

Als letztes Resultat über E-Flächen im einfach isotropen Raum beweisen wir eine Kennzeichnung der E-Flächen mit *ebener Striktionslinie.*

Satz 13: *Eine E-Fläche $\Phi_{\mathrm{I}} \subset J_3^{(1)}$ besitzt genau dann eine ebene Striktionslinie, wenn sie ein isotropes einschaliges Drehhyper-*

boloid ist oder wenn die Gratlinie m der Zentralnormalentorse eine Böschungslinie ist.

Beweis:

Nach Satz 12 sind die einschaligen Drehhyperboloide die einzigen E-Flächen mit konischer Zentralnormentorse und sie besitzen eine ebene Striktionslinie. Es genügt daher i. f. jene E-Flächen zu diskutieren, deren Zentralnormalentorse Γ eine Gratlinie m besitzt. Hierbei gilt stets $\varkappa' \neq 0$, $\sigma' \neq 0$, denn eine E-Fläche, für die $\varkappa' = 0$ oder $\sigma' = 0$ gilt, besitzt konstante Fundamentalinvarianten $\varkappa$, τ und σ, und eine solche ist ein einschaliges Drehhyperboloid, wie man leicht aus den Formeln

$$\bar{\varkappa} = \varkappa, \quad \bar{\tau} = \sigma\varkappa + \tau + \left(\frac{\sigma'}{\varkappa}\right)' \tag{42}$$

für die Krümmung $\bar{\varkappa}$ und die Windung $\bar{\tau}$ der Striktionslinie einer Regelfläche Φ_{I} (vgl. [18, S. 207]) folgert. Die Kurve m der Mitten der Lie-F_2 einer E-Fläche hat nach Satz 11 die Darstellung

$$\mathfrak{m}(u) = \mathfrak{s}(u) + \frac{1}{\varkappa(u)}\,\mathfrak{n}(u), \tag{43}$$

woraus man als Krümmung $\varkappa^*$ bzw. Windung τ^* (vgl. [13, S. 16]) von m errechnet

$$\varkappa^* = -\frac{\varkappa^3}{\varkappa'}, \quad \tau^* = \frac{\varkappa\sigma^3}{\sigma'^2}. \tag{44}$$

Als *konische Krümmung* von m erhält man

$$k^* = \frac{\tau^*}{\varkappa^*} = -\frac{\sigma}{\varkappa'} = -\,\delta_{\mathrm{I}}^{(0)}\,\frac{\varkappa}{\varkappa'}. \tag{45}$$

Ist die Striktionslinie einer E-Fläche eine ebene Kurve, so folgt aus (42): $\frac{\sigma'}{\varkappa} =: c_0 =$ *konst.* Beachtet man die Beziehung $\sigma'\varkappa = \varkappa'\sigma$, die aus $\delta_{\mathrm{I}}' = \left(\frac{\sigma}{\varkappa}\right)' = 0$ fließt, so folgt damit

$$\frac{\sigma'}{\varkappa} = c_0 = \delta_{\mathrm{I}}^{(0)}\,\frac{\varkappa'}{\varkappa},$$

d. h. $\frac{\varkappa'}{\varkappa} =$ *konst.* Somit gilt nach (45) $k^* =$ *konst.* und m ist eine Böschungslinie (vgl. [14, S. 25f.]). Die Umkehrung sieht man analog.

w. z. z. w.

2. Abschnitt: E-Flächen des zweifach isotropen Raumes

2.0 Regelflächen im zweifach isotropen Raum

Zeichnet man in der Fernebene $\omega: x_0 = 0$ eine Gerade $f(x_0 = x_1 = 0)$ als absolute Gerade und auf ihr den Punkt $F(0:0:0:1)$ als absoluten Punkt aus, dann gestattet das Absolutgebilde $\{\omega, f, F\}$ eine neungliedrige Gruppe projektiver Automorphien (vgl. [5, S. 119]), die als Normalteiler eine sechsgliedrige Untergruppe $G_6^{(2)}$ der Bauart

$$(46) \qquad \left| \begin{aligned} \bar{x} &= c_1 + x \\ \bar{y} &= c_2 + c_3 x + y \\ \bar{z} &= c_4 + c_5 x + c_6 y + z \end{aligned} \right.$$

enthält. Die zur Transformationsgruppe (46) gehörige Geometrie bezeichnet man als *zweifach isotrope Geometrie*, und ein affiner Raum A^3, in dem eine Metrik über die Gruppe $G_6^{(2)}$ der *zweifach isotropen Bewegungen* eingeführt wird, heißt ein zweifach isotroper Raum $J_3^{(2)}$. Die Geometrie dieses Raumes wurde von H. Brauner in [5]–[7] studiert; insbesondere wurde in [6, S. 145f] die Theorie der Regelflächen entwickelt. Demnach unterscheidet man 4 Typen windschiefer Regelflächen, die mit Φ_A — Φ_D bezeichnet werden. Regelflächen vom *Typ A* stellen hierbei den allgemeinen Typ dar und werden den folgenden Betrachtungen stets zugrunde gelegt. Sie gestatten die Normaldarstellung (vgl. [6, S. 146])

$$(47) \qquad \mathfrak{x}(u, v) = \int [\mathfrak{e}(u) + \sigma(u)\mathfrak{b}]\, du + v\mathfrak{e}(u),$$

wobei der Parameter u die zweifach isotrope Bogenlänge[4] auf der Striktionslinie $\mathfrak{s}(u) = \int [\mathfrak{e}(u) + \sigma(u)\mathfrak{b}]\, du$, $\mathfrak{e}(u) = (1, e_2, e_3)$ den normierten Richtungsvektor der Erzeugenden, $\sigma(u)$ die Striktion zund $\mathfrak{b} = (0, 0, 1)$ den vollisotropen Zentraltangentenvektor beeichnet. Bezeichnen Striche Ableitungen nach u, so gelten nach Einführung des normierten Zentralnormalenvektors $\mathfrak{n} = \left(0,\ 1,\ \frac{e_3'}{e_2'}\right)$ die Ableitungsgleichungen

[4] Alle i. f. auftretenden metrischen Größen sind im Sinne der zweifach isotropen Geometrie zu verstehen. Ihre Theorie kann in [5]–[7] nachgelesen werden.

$$\{\mathfrak{e}' = \varkappa\mathfrak{n},\ \mathfrak{n}' = \tau\mathfrak{b},\quad \mathfrak{b}' = \mathfrak{o}\}. \tag{48}$$

Die hierbei auftretenden Differentialinvarianten $\varkappa$ bzw. τ heißen Krümmung bzw. Windung der Regelfläche Φ_A und bilden zusammen mit σ ein *vollständiges Invariantensystem* von Φ_A. Die daraus abgeleitete Invariante $\delta_{\mathrm{II}} := \dfrac{\sigma}{\varkappa}$ wird als *zweifach isotroper Drall* bezeichnet (vgl. [6, S. 148]).

2.2 Definition der E-Flächen. Kennzeichnung mittels Invarianten

Um E-Flächen im $J_3^{(2)}$ zu definieren, benötigt man den Begriff einer Drehregelfläche 2. Ordnung, d. h. einer Fläche 2. Ordnung, die eine Schar reeller Geraden trägt und durch isotrope Drehung einer Geraden erzeugt werden kann. Alle Typen von Drehungen im zweifach isotropen Raum wurden in [5, S. 128f] bestimmt. Es zeigt sich, daß bei unserer Fragestellung nur die nicht isotropen Drehungen geeignet sind, eine brauchbare Definition einer Drehregelfläche abzugeben. Bei einer Drehung dieses Typs bleibt ein Parallelbüschel von nichtisotropen Ebenen elementweise fest. Bezeichnet h die Ebenenfixgerade dieser Drehung, dann zeigt sich: Jede nichtisotrope Gerade, die h nicht trifft, überstreicht bei dieser Drehung einen Regulus auf einem hyperbolischen Paraboloid Ψ_d, wobei Ψ_d die Fernebene ω im Schnittpunkt S von h mit der absoluten Geraden f berührt; hierbei gilt $S \neq F$.

Definition 3: Unter einer *nichtisotropen Drehregelfläche* Ψ_d des $J_3^{(2)}$ versteht man ein hyperbolisches Paraboloid, welches die Fernebene in einem Punkt $S \in f$ mit $S \neq F$ berührt.

Die Fernkurve einer Drehregelfläche ist zwar kein isotroper Fernkreis (vgl. [5, S. 124]), doch bestehen gewisse Analogien zum einschaligen Drehhyperboloid des euklidischen Raumes bzw. zum isotropen Drehhyperboloid gemäß Definition 1.

Hilfssatz: *Jede nichtisotrope Drehregelfläche Ψ_d läßt sich durch zweifach isotrope Bewegungen auf die Normalform*

$$z^2 - Axz + By = 0 \quad \text{mit } A \neq 0, \quad B \neq 0 \tag{49}$$

transformieren. Ψ_d ist eine Regelfläche vom Typ A mit einem isotropen Kreis als Striktionslinie.

Beweis:

Man kann durch eine Bewegung (46) erreichen, daß der Punkt $S \neq F$ die Koordinaten $S\,(0:0:1:0)$ erhält und daß die durch S laufenden Fernerzeugenden von Ψ_d durch die Gleichungen $e_1: \{x_0 = x_3 = 0\}$ bzw. $e_2: \{x_0 = x_3 - a x_1 = 0\}$ beschrieben werden. Alle Flächen 2. Ordnung, die e_1 und e_2 enthalten, ergeben sich dann in der Gestalt

$$a_{00} + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + z^2 - axz = 0,$$

wobei im Falle einer nichtsingulären Fläche 2. Ordnung stets $a_{02} \neq 0$ gilt. Damit läßt sich die Flächengleichung nach Anwendung einer weiteren Bewegung (46) auch in der Gestalt $a_{02}\bar{y} + a_{03}\bar{z} + \bar{z}^2 - a\bar{x}\bar{z} = 0$ schreiben; eine nachfolgende Translation in der x- und y-Richtung erzwingt schließlich die Normalform (49). Diese Gleichung kann in der Form

$$\text{(50)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{2\mu}{A} + v \\ y &= \frac{\mu^2}{B} + v\,\frac{A}{B}\,\mu \\ z &= \mu \end{aligned} \right.$$

parametrisiert werden. Die Leitkurve dieser Regelfläche ist hierbei die Striktionslinie; diese liegt in der nichtisotropen Ebene $2z - Ax = 0$ und besitzt den Grundriß $y = \frac{A^2}{4B}x^2$, womit sie als isotroper Kreis in einer nichtisotropen Ebene nachgewiesen ist (vgl. [5, S. 124]). w. z. z. w.

Definition 4: Eine C^2-Regelfläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ heißt eine *Edlinger-Fläche*, wenn ihre sämtlichen Schmiegquadriken nichtisotrope Drehregelflächen Ψ_d gemäß Definition 3 sind.

Einfache Beispiele solcher E-Flächen des $J_3^{(2)}$ sind die Drehregelflächen Ψ_d selbst.

Da die Schmiegquadriken der E-Flächen Φ_A durchwegs Paraboloide sind, gilt für diese Flächen notwendig $\tau = 0$. Genauer gilt der

Satz 14: *Eine C^2-Regelfläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ ist genau dann eine E-Fläche, wenn für ihre natürlichen Invarianten gilt*

(51) $$\tau = 0, \quad \delta_{II} = konst.$$

Beweis:

Zur analytischen Beschreibung der Schmiegquadrik einer Regelfläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ längs einer Erzeugenden e benützen wir ein lokales Koordinatensystem $\{x, y, z\}$ mit dem Koordinatenursprung im Striktionspunkt, wobei die Achsen der Reihe nach die Richtungen der Vektoren $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}\}$ des begleitenden Dreibeins von e besitzen. In diesem System berechnet man als Gleichung der Schmiegquadrik Σ (vgl. [13, S. 160])

(52) $$\delta_{II}\, y z + z^2 - 2\sigma x\, z + 2\sigma \delta_{II}\, y = 0.$$

Σ schneidet die Fernebene $x_0 = 0$ nach den beiden Fernerzeugenden $x_0 = x_3 = 0$ und $x_0 = \delta'_{II} x_2 + x_3 - 2\sigma x_1 = 0$, die sich im Punkt $S(0 : \delta'_{II} : 2\sigma : 0)$ schneiden. S liegt genau dann auf der absoluten Geraden, wenn $\delta'_{II} = 0$, d. h. $\delta_{II} = konst.$ gilt.

w. z. z. w.

2.2 Die zweifach isotropen Krümmungslinien der E-Flächen

In der Flächentheorie des zweifach isotropen Raumes existiert ein brauchbarer, jedoch von der euklidischen Theorie ziemlich abweichender Begriff der *Krümmungslinien* (vgl. [7, S. 40]). Nach H. Brauner wird die zu den isotropen Flächenkurven $x = konst.$ konjugierte Kurvenschar als Krümmungslinienschar eines C^2-Flächenstückes $\mathfrak{F} \subset J_3^{(2)}$ bezeichnet. Diese Krümmungslinien können geometrisch gedeutet werden als Zylinderschattengrenzen auf $\mathfrak{F}$, wenn der Lichtpunkt auf der absoluten Geraden f variiert. Durch jeden regulären Punkt von $\mathfrak{F}$ läuft eine einzige Krümmungslinie. Speziell für Regelflächen $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ erhält man als Differentialgleichung der Krümmungslinien durch Anwendung der in [7, S. 40] angegebenen Formeln auf (47)

(53) $$v' = \frac{1}{\delta_{II}} (v^2 \tau + v\, \delta'_{II}).$$

Für E-Flächen folgt daraus wegen (51) : $v = konst.$ und damit der

Satz 15: *Auf einer E-Fläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ schneiden die zweifach isotropen Krümmungslinien die Erzeugenden von Φ_A nach kon-*

gruenten Punktreihen. Die zweifach isotropen Krümmungslinien sind die Kurven konstanten Striktionsabstandes.

Wie aus (53) ersichtlich, bilden auf jeder Regelfläche Φ_A die Krümmungslinien eine Doppelverhältnisschar. Eine analoge Kennzeichnung der E-Flächen des $J_3^{(2)}$, wie sie in Satz 4 für E-Flächen des $J_3^{(1)}$ gegeben wird, existiert also nicht. Es gilt jedoch der

Satz 16: *Schneiden die Krümmungslinien einer C^2-Regelfläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ die Erzeugenden von Φ_A nach kongruenten Punktreihen, dann sind diese Kurven die Kurven konstanten Striktionsabstandes und Φ_A ist eine E-Fläche.*

Beweis:

Eine Kurvenschar, die die Erzeugenden von Φ_A nach kongruenten Punktreihen schneidet, läßt sich in der Gestalt $v = \varphi(u) + c$ schreiben, wobei $\varphi(u)$ eine willkürliche Funktion und c den Scharparameter bezeichnet. Durch Einsetzen in (53) entsteht

$$c^2\tau + c(2\varphi\tau + \delta'_{II}) + \varphi^2\tau - \delta_{II}\varphi' + \varphi\delta'_{II} = 0. \tag{54}$$

Da (54) für unendlich viele Werte von c gilt, müssen in diesem Polynom 2. Grades in c alle Koeffizienten verschwinden, woraus man $\tau = 0$, $\delta'_{II} = 0$ und $\varphi' = 0$ folgert. w. z. z. w.

2.3 Kurven konstanter Relativkrümmung auf E-Flächen

Auf jedem C^2-Flächenstück existiert nach H. Brauner ein Analogon zur Gauß'schen Krümmung, die sogenannte Relativkrümmung K (vgl. [6, S. 149]). Damit kann wie in 1.4. der Begriff der *Kurven konstanter Relativkrümmung (K-Kurven)* auch im $J_3^{(2)}$ eingeführt werden. Nach dem zweifach isotropen Analogon zur Formel von E. Lamarle (vgl. [6, S. 150]) werden diese Kurven auf einer Regelfläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ durch

$$v(u, c) = \sqrt{c\,\delta_{II}(u)} \quad \text{mit} \quad c = \sqrt{-\frac{1}{K}} \tag{55}$$

festgelegt. Hiermit kann der Satz 6 samt Beweis wörtlich für Regelflächen $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ übernommen werden. Auch zu Satz 8 kann ein zweifach isotropes Analogon ausgesprochen werden, welches allerdings von dem entsprechenden Resultat im $J_3^{(1)}$ abweicht.

Satz 17: *Eine C^2-Regelfläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ ist genau dann eine E-Fläche, wenn die K-Kurven von Φ_A die Erzeugenden von Φ_A nach kongruenten Punktreihen schneiden und die Zentralnormalenfläche von Φ_A einem Zylinder bzw. einem Parallelbüschel aus isotropen, aber nicht vollisotropen Geraden angehört.*

Beweis:

Nach dem Analogon zu Satz 8 kennzeichnet die erste Bedingung konstant gedrallte Regelflächen $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$. Aus der Gleichung $\tau = \left(\frac{e_3'}{e_2'}\right)'$ für Regelflächen $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ (vgl. [6, S. 146]) folgt, daß konoidale Regelflächen ($\tau = 0$) durch $\frac{e_3'}{e_2'} =$ *konst.* gekennzeichnet sind, womit aus der Bauart des Zentralnormalenvektors $\mathfrak{n} = \left(0,\ 1,\ \frac{e_3'}{e_2'}\right)$ die Behauptung folgt. w. z. z. w.

Satz 18: *Stimmen auf einer C^2-Regelfläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ die K-Kurven mit den zweifach isotropen Krümmungslinien überein, dann ist Φ_A eine E-Fläche.*

Beweis:

Stimmen nämlich die K-Kurven mit den Krümmungslinien überein, so muß (55) für unendlich viele Werte des Parameters c die Differentialgleichung (53) erfüllen; dies liefert die Schlüsselgleichung $4\tau^2 \delta_{II} c - \delta_{II}'^2 = 0$, aus der $\tau = 0$ und $\delta_{II}' = 0$ folgt. Nach (51) ist Φ_A somit eine E-Fläche. w. z. z. w.

2.4 Die Krümmungstangentenflächen der E-Flächen

Eine weitere Kennzeichnung der E-Flächen $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ erhält man, wenn man die von den Krümmungstangenten in den Punkten einer Erzeugenden $e \in \Phi_A$ gebildete Regelfläche Ψ betrachtet, die wir als Krümmungstangentenfläche bezeichnen wollen. Man findet als Gleichung der Krümmungstangentenfläche einer beliebigen Regelfläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ im lokalen Koordinatensystem $\{x, y, z\}$ längs einer Erzeugenden unter Beachtung von (53)

$$(56) \qquad z^2 + \tau \delta_{II} y^2 + \delta_{II}' yz - \sigma \times z + \sigma \delta_{II} y = 0.$$

Diese Fläche ist i. a. ein einschaliges Hyperboloid. Genauer gilt der

Hilfssatz: *Die Krümmungstangentenfläche Ψ längs einer regulären, nicht-torsalen Erzeugenden e einer C^2-Regelfläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ ist genau dann ein hyperbolisches Paraboloid, wenn Φ_A konoidal* ($\tau = 0$) *ist.*

Beweis:

Es genügt zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Fernkurve

$$x_3^2 + \tau\delta_{\mathrm{II}}\, x_2^2 + \delta'_{\mathrm{II}}\, x_2 x_3 - \sigma x_1 x_3 = 0 \tag{57}$$

von Ψ aus einem Geradenpaar besteht. Kennzeichnend hierfür ist, daß die Koeffizientenmatrix von (57) den Rang 2 hat. Hieraus folgt die Bedingung $\sigma^2\tau\delta_{\mathrm{II}} = 0$, die für windschiefe Regelflächen nur durch $\tau = 0$ zu erfüllen ist. w. z. z. w.

Jetzt beweist man leicht den

Satz 19: *Eine C^2-Regelfläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ ist genau dann eine E-Fläche, wenn ihre Krümmungstangentenflächen Drehregelflächen sind.*

Beweis:

Besitzt die Regelfläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ hyperbolische Paraboloide als Krümmungstangentenflächen, so folgt nach dem Hilfssatz $\tau = 0$. Nach (57) zerfällt dann die Fernkurve jeder Krümmungstangentenfläche Ψ in die beiden Geraden $\{x_0 = x_3 = 0\}$ und $\{x_0 = x_3 + \delta'_{\mathrm{II}}\, x_2 - \sigma x_1 = 0\}$, die sich im Punkt $S(0 : \delta'_{\mathrm{II}} : \sigma : 0)$ schneiden. S liegt daher genau dann auf der absoluten Geraden, d. h. Ψ ist Drehregelfläche, wenn $\delta_{\mathrm{II}} =$ *konst.* gilt. Die Umkehrung ist trivial. w. z. z. w.

2.5 Kennzeichnung der Drehregelflächen unter den E-Flächen

Nach Satz 17 bilden die Zentralnormalen einer E-Fläche $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ einen Zylinder oder ein Parallelbüschel aus isotropen Geraden. Man bestätigt leicht mittels (50), daß der zweite Fall für Drehregelflächen vorliegt. Es gilt sogar folgende Kennzeichnung der nicht-isotropen Drehregelflächen $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$, die ein Analogon zu Satz 12 darstellt

Satz 20: *Die einzigen E-Flächen $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$, deren Zentralnormalen einem Parallelbüschel aus isotropen Geraden angehören, sind die nichtisotropen Drehregelflächen Ψ_d.*

Beweis:

E-Flächen $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ sind konoidale Regelflächen, besitzen also eine Richtebene $\eta \cdot \eta$ ist weder isotrop noch vollisotrop, da die betrachtete Regelfläche sonst nicht vom Typ A wäre (vgl. [6, S. 145]). Man kann daher durch eine Bewegung (46) erreichen, daß η zur Koordinatenebene $z = 0$ wird. Das Parallelbüschel der isotropen Zentralnormalen kann in der Gestalt

$$(58)\qquad \begin{cases} x = s \\ y = \lambda \\ z = a_0 s + \lambda b_0 \end{cases} \qquad \textit{mit } a_0 = \textit{konst.}, \ b_0 = \textit{konst.}$$

angesetzt werden, da die Trägerebene des Büschels keine vollisotrope Ebene ist; hierbei bezeichnet λ einen auf den Strahlen des Büschels laufenden Parameter und der Vektor $(0, 1, b_0)$ gibt die Richtung der Büschelgeraden an. Wir legen durch $\lambda = \lambda(s)$ in (58) eine Trajektorie k des Büschels fest und bestimmen zunächst alle Regelflächen Φ_A mit k als Striktionslinie und $z = 0$ als Richtebene. Man gewinnt für sie die Darstellung

$$(59)\qquad \begin{cases} x = s & + v \\ y = \lambda(s) & + v\lambda'. \\ z = a_0 s + \lambda(s) b_0 \end{cases}$$

Die Zentralnormalen der Regelflächen (59) haben den Richtungsvektor $\mathfrak{n} = (0, 1, 0)$, woraus mit (58) notwendig $b_0 = 0$ folgt. Berechnet man den Drall δ_{II} der Regelflächen (59) gemäß der Drallformel (vgl. [6, S. 148])

$$(60)\qquad \delta_{II} = \frac{(\dot{\mathfrak{y}}, \mathfrak{a}, \dot{\mathfrak{a}})\, a_1^2}{(a_1 \dot{a}_2 - a_2 \dot{a}_1)^2},$$

für Regelflächen Φ_A mit der Darstellung $\mathfrak{x}(t, v) = \mathfrak{y}(t) + v\mathfrak{a}(t)$, so findet man $\delta_{II} = \frac{a_0}{\lambda''}$. Aus der Forderung $\delta_{II} = \textit{konst.}$ für eine E-Fläche folgt hieraus durch Integration

$$\lambda(s) = \frac{a_0}{2\,\delta_{\mathrm{II}}^{(0)}}\, s^2 + c_1 s + c_2 \quad mit\ a_0 \neq 0 \tag{61}$$

und Intergrationskonstanten c_1, c_2. Der Fall $\lambda'' = 0$ kann unberücksichtigt bleiben, da er auf keine windschiefen Flächen führt. Als Striktionslinie der Lösungsflächen erhält man aus (59) und (61) einen zweifach isotropen Kreis k in der Ebene $z - a_0 x = 0$ mit dem Grundriß $y = \frac{a_0}{2\,\delta_{\mathrm{II}}^{(0)}}\, x^2 + c_1 x + c_2$. Man kann daher durch eine Schiebung stets $c_1 = c_2 = 0$ erzwingen. Damit gewinnt man als Normalform der Lösungsflächen des Problems die Gleichung $z^2 - 2 a_0\, x\, z + 2 a_0 \delta_{\mathrm{II}}^{(0)}\, y = 0$, also nach (49) nichtisotrope Drehregelflächen $\Psi_d \subset J_3^{(2)}$. w. z. z. w.

2.6 Explizite Darstellung der E-Flächen des $J_3^{(2)}$

Wir geben abschließend noch eine explizite Darstellung der E-Flächen $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ an, wobei wir o. B. d. A. die Ebene $z = 0$ als Richtebene wählen. Konoidale Regelflächen Φ_A dieser Art lassen sich in der Form

$$\left|\begin{aligned} x &= p(\omega)\sin\omega + \dot p(\omega)\cos\omega + v\cos\omega \\ y &= -\,p(\omega)\cos\omega + \dot p(\omega)\sin\omega + v\sin\omega \\ z &= h(\omega) \end{aligned}\right. \tag{62}$$

mit $p(\omega) \neq 0$ darstellen, wobei $p(\omega)$ die Stützfunktion des Grundrisses der Striktionslinie bedeutet und $h(\omega)$ den Abstand der betrachteten Erzeugenden von der Ebene $z = 0$ angibt. Aus (62) folgt mittels (60) $\delta_{\mathrm{II}} = \dot h\, cos^2\, \omega$ und damit folgende Darstellung der E-Flächen des $J_3^{(2)}$

$$\left|\begin{aligned} x &= p(\omega)\sin\omega + \dot p(\omega)\cos\omega + v\cos\omega \\ y &= -\,p(\omega)\cos\omega + \dot p(\omega)\sin\omega + v\sin\omega \quad mit\ p(\omega) \neq 0. \\ z &= \delta_{\mathrm{II}}^{(0)}\ \mathrm{tg}\,\omega \end{aligned}\right. \tag{63}$$

Sie hängen von einer willkürlichen Funktion ab. Man findet aus (63) die Darstellung

$$f(z) = xz - \delta_{\mathrm{II}}^{(0)} y \tag{64}$$

mit einer willkürlichen Funktion $f(z) \neq 0$. Hieraus folgt, daß es sich nach W. Blaschke um spezielle uneigentliche windschiefe Affinsphären handelt (vgl. [2, S. 221]).

Satz 21: *Die E-Flächen $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ sind spezielle uneigentliche windschiefe Affinsphären mit der Normalform (64) gegenüber der Gruppe (46).*

2.7 Die E-Flächen des $J_3^{(2)}$ mit ebener Striktionslinie

Die einfache Normalform (64) der E-Flächen $\Phi_A \subset J_3^{(2)}$ gestattet es, verschiedene Probleme über diese Flächen, insbesondere über ihre Striktionslinie zu behandeln. Wir bestimmen i. f. alle E-Flächen mit *ebener Striktionslinie.* Die Striktionslinie dieser Flächen kann in der Form

$$\mathfrak{x}(t) = \begin{cases} \dot{f}(t) \\ \frac{1}{\delta_{11}^{(0)}}\left(t\dot{f}(t) - f(t)\right) \\ t \end{cases} \tag{65}$$

dargestellt werden; sie ist genau dann eine ebene Kurve, wenn $(\dot{\mathfrak{y}}, \ddot{\mathfrak{y}}, \dddot{\mathfrak{y}}) = 0$ gilt, was auf die Differentialgleichung 4. Ordnung

$$f^{(4)}\ddot{f} - 2\dddot{f}^2 = 0 \tag{66}$$

führt. Die allgemeine Lösung von (66) lautet

$$f(t) = K_0 t^2 + K_1 t + K_2 \quad \text{bzw.} \tag{67,a}$$

$$f(t) = \frac{C_1 t + C_0}{C_1^2}\left[ln(C_1 t + C_0) - 1\right] + C_2 t + C_3 \tag{67,b}$$

mit Integrationskonstanten K_0, K_1, K_2 bzw. C_0, C_1, C_2, C_3. (67,a) führt auf nichtisotrope Drehregelflächen (49), während (67,b) auf transzendente Flächen mit der Normalform

$$z\,ln\,C_1 z + C_1(xz + \delta_{11}^{(0)} y) = 0 \tag{68}$$

führt. Somit gilt der

Satz 22: *Die nichtisotropen Drehregelflächen $\Psi_d \subset J_3^{(2)}$ sind die einzigen algebraischen E-Flächen mit einer ebenen Striktionslinie.*

Literatur

[1] Barner, M.: Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen. Math. Zeitschr. 62, 50–93 (1955).

[2] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Springer Berlin 1923.

[3] Bol, G.: Projektive Differentialgeometrie IV, Teil 2, Skriptum der Universität Freiburg.

[4] Brauner, H.: Neuere Untersuchungen über windschiefe Flächen, Jahresbericht der DMV, 70, 61–85 (1967).

[5] Brauner, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes I, Journ. f. reine u. angew. Math. 224, 118–146 (1966).

[6] Brauner, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes II, Journ. f. reine u. angew. Math. 226, 132–158 (1967).

[7] Brauner, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes III, Journ. f. reine u. angew. Math. 228, 38–70 (1967).

[8] Edlinger, R.: Über Regelflächen, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehhyperboloide sind. Sb. Öst. Ak. Wiss. Math.-nat. 132, 243 bis 351 (1923).

[9] Hoschek, J.: Liniengeometrie. Zürich: Bibliographisches Institut 1971.

[10] Sachs, H.: Über die Kurven konstanten Striktionsabstandes auf windschiefen Flächen. Monatsh. Math. 74, 445–461 (1970).

[11] Sachs, H.: Zur Liniengeometrie isotroper Räume. Habilitationsschrift, Stuttgart 1972. Privatdruck.

[12] Sachs, H.: Einige Kennzeichnungen der Edlinger-Flächen. Monatsh. Math. 77, 241–250 (1973).

[13] Sachs, H.: Projektiv-metrische Kennzeichnungen konstant gedrallter Regelflächen, Sb. Öst. Ak. Wiss. Math.-nat. 182, 155–175 (1974).

[14] Strubecker, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes I, Theorie der Raumkurven, Sb. Öst. Ak. Wiss. Math.-nat. 150, 1–53 (1941).

[15] Strubecker, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes II, Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$, Math. Zeitschr. 47, 743–777 (1942).

[16] Strubecker, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes III, Flächentheorie, Math. Zeitschr. 48, 369–427 (1942).

[17] Strubecker, K.: Differentialgeometrie isotroper Mannigfaltigkeiten, Schriftenreihe des Inst. f. Math. Deutsche Akad. d. Wiss. Berlin, 1957, Heft 1.

[18] Vogel, W. O.: Regelflächen im isotropen Raum, Journ. f. reine u. angew. Math. 202, 196–214 (1959).

[19] Vogler, H.: Eine neue Kennzeichnung der Edlinger-Flächen. Vortragsauszug, VIII. Österreichischer Mathematikerkongress in Wien 1973.

[20] Zindler, K.: Liniengeometrie mit Anwendungen I. Sammlung Schubert, Leipzig 1902.