BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1966

MÜNCHEN 1967

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eine Charakterisierung von holomorphen Vektorraumbündeln

Von **Gerd Fischer** in München

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 4. November 1966

Der Raum der Tangentialvektoren an eine komplexe Mannigfaltigkeit ist ein holomorphes Faserbündel. Faßt man die Tangentialvektoren an einen komplexen Raum mit Singularitäten zu einem Tangentialraum zusammen (vgl. z. B. [8], [12]), so erhält man kein lokal triviales holomorphes Vektorraumbündel mehr, sondern nur noch einen holomorphen Faserraum mit Vektorraumstruktur, einen „*linearen Faserraum*". Außerhalb der Singularitätenmenge eines komplexen Raumes ist der Tangentialraum selbstverständlich ein Vektorraumbündel. Es soll hier gezeigt werden, daß dies eine allgemeinere Eigenschaft eines linearen Faserraumes L über einem komplexen Raum X ist: Die Menge der Punkte p von X, für die die Dimension der Faser von L über p größer als eine vorgegebene natürliche Zahl ist, ist analytisch in X, und ein linearer Faserraum von konstanter Faserdimension über einem reduzierten komplexen Raum ist bereits ein (lokal triviales) Vektorraumbündel.

Holomorphe Vektorraumbündel über einem reduzierten komplexen Raum lassen sich also charakterisieren als *holomorphe Faserräume von konstanter Faserdimension, die mit einer Vektorraumstruktur versehen sind.*

Auf weitere Eigenschaften linearer Faserräume, zum Beispiel auf die Beziehungen zu kohärenten analytischen Garben, soll an anderer Stelle eingegangen werden.

0.

Zunächst ist es nötig, einige Begriffe und Bezeichnungen festzulegen.

X sei ein komplexer Raum, dessen Strukturgarbe nilpotente Elemente enthalten darf. Ein *holomorpher Faserraum* über X ist ein Paar (Y, τ), bestehend aus einem komplexen Raum Y und einer holomorphen Abbildung[1] $\tau : Y \to X$. Für jeden Punkt $p \in X$ sei Y_p die mit der durch τ bestimmten komplexen Struktur versehene *Faser* $\tau^{-1}(p)$ (vgl. [4], 2.1 oder [6], 10–07). Ist (Y', τ') ein weiterer holomorpher Faserraum über X, so heißt eine holomorphe Abbildung $\varphi : Y \to Y'$ *holomorphe Faserabbildung*, wenn $\tau = \tau' \varphi$. In diesem Fall induziert φ über jedem Punkt $p \in X$ eine holomorphe Abbildung φ_p: $Y_p \to Y'_p$ (vgl. [2], § 1, 3). Da die Basis X im folgenden nicht verändert werden soll, schreiben wir $Y * Y'$ für das *Faserprodukt* $Y \times_X Y'$. Die Faser $(Y * Y')_p$ ist analytisch isomorph zu $Y_p \times Y'_p$ (vgl. [6], Exp. 10). Sind weiter holomorphe Faserräume (Z, σ) und (Z', σ') über X und eine holomorphe Faserabbildung $\psi : Z \to Z'$ gegeben, so ist das Faserprodukt $\varphi * \psi : Y * Z \to Y' * Z'$ definiert als Beschränkung von $\varphi \times \psi$ auf $Y * Z$.

1.

Unter einem linearen Faserraum wollen wir nun ein Vektorraumobjekt in der Kategorie der holomorphen Faserräume verstehen (vgl. [3], p. 351, [6], Exp. 12).

Definition 1. Ein *linearer Faserraum* über einem komplexen Raum X ist ein holomorpher Faserraum (L, λ) zusammen mit holomorphen Faserabbildungen

$$
\begin{aligned}
+ &: L * L \to L &&\text{(Addition)}\\
\cdot &: \mathbf{C} \times L \to L &&\text{(Skalarmultiplikation)}\\
0 &: X \to L &&\text{(Nullschnitt)}
\end{aligned}
$$

derart, daß die „Vektorraumaxiome" erfüllt sind.

---

[1] Es wird stets stillschweigend unter einem komplexen Raum ein Paar, bestehend aus dem zugrunde liegenden topologischen Raum und der Strukturgarbe, und unter einer holomorphen Abbildung ein Paar, bestehend aus einer stetigen Abbildung und einem Garbenhomomorphismus, verstanden (vgl. [2] und [6]).

Unter einem Vektorraumaxiom wird dabei die Kommutativität eines Diagrammes verstanden (vgl. [9], [10]), z. B. für die Assoziativität der Addition:

$$\begin{array}{ccc} L * L * L & \xrightarrow{id * +} & L * L \\ \big\downarrow{\scriptstyle + * id} & & \big\downarrow{\scriptstyle +} \\ L * L & \xrightarrow{+} & L \end{array}$$

Es folgt unmittelbar aus der Definition, daß 0 eine Einbettungsabbildung von X in L ist, und X reduziert ist, falls L reduziert ist.

Satz 1. *Sei (L, λ) ein linearer Faserraum über X, $p \in X$ und $n = \dim L_p$. Dann ist L_p ein komplexer Vektorraum und es gibt einen biholomorphen Vektorraumisomorphismus von L_p auf den $\mathbf{C}^n$ mit der gewöhnlichen (reduzierten) komplexen Struktur.*

Beweis. Durch $+$, $\bullet$ und 0 wird auf L_p eine holomorphe Vektorraumstruktur

$$+_p : L_p \times L_p \to L_p$$
$$\bullet_p : \mathbf{C} \times L_p \to L_p$$
$$0_p : \{p\} \to L_p$$

induziert. Nach CARTIER ([1], p. 109)[2] ist L_p als komplexe Liegruppe ein reduzierter komplexer Raum. Mit Hilfe einer Basis in L_p konstruiert man sofort den gesuchten Isomorphismus.

Satz 2. *Ist (L, λ) ein linearer Faserraum über X, so ist für jede natürliche Zahl i die Menge $A_i := \{p \in X : \dim L_p \geq i\}$ analytisch in X.*

Beweis. Wir können annehmen, daß X und L reduziert sind. Nach einem Satz von REMMERT ([11], Satz 17 und [7], Prop. 7) ist die Menge $B_i := \{v \in L : \dim_v L_{\lambda(v)} \geq i\}$ analytisch in L.

---

[2] Einen einfachen Beweis des Satzes von CARTIER hat F. OORT in den Inventiones math. 2 (1966) gegeben.

Da die Beschränkung von λ auf die Nullschnittfläche $0(X)$ biholomorph ist und wegen Satz 1 $A_i = \lambda(B_i \cap 0(X))$, folgt die Behauptung.

Ist X zusammenhängend, so existiert also eine natürliche Zahl n und ein offener dichter Teilraum X' von X, so daß für alle Punkte p aus X' die Dimension von L_p gleich n ist. Bevor genauere Aussagen über die Beschränkung von L auf X' möglich sind, müssen Morphismen linearer Faserräume eingeführt werden.

2.

Definition 2. Seien (L, λ) und (L', λ') lineare Faserräume über dem komplexen Raum X. Eine holomorphe Faserabbildung $\xi: L \to L'$ heißt *Morphismus linearer Faserräume*, wenn die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} L * L & \xrightarrow{+} & L \\ \downarrow{\scriptstyle \xi * \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ L' * L' & \xrightarrow{+} & L' \end{array}$$

(Verträglichkeit mit der Addition)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times L & \xrightarrow{\bullet} & L \\ \downarrow{\scriptstyle id \times \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ \mathbf{C} \times L' & \xrightarrow{\bullet} & L' \end{array}$$

(Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation)

Ist $\xi: L \to L'$ ein Morphismus linearer Faserräume, so ist $\xi_p: L_p \to L'_p$ für jeden Punkt $p \in X$ ein Vektorraumhomomorphismus. Wenn die beteiligten Räume reduziert sind, ist diese Eigenschaft auch hinreichend dafür, daß eine holomorphe Faserabbildung ein Morphismus linearer Faserräume ist (vgl. **4**, 1. Beispiel).

Durch diese Definition sind auch Begriffe wie *Isomorphismus*, *Unterraum* usw. für lineare Faserräume festgelegt.

Definition 3. Ein linearer Faserraum (V, μ) über X heißt *holomorphes Vektorraumbündel* (vom Rang n und mit der Strukturgruppe $GL(n, \mathbf{C})$), wenn (V, μ) lokal isomorph zum trivialen linearen Faserraum $(X \times \mathbf{C}^n, pr_X)$ ist, d. h. wenn es zu jedem Punkt $p \in X$ eine Umgebung U von p in X und einen Isomorphismus $\mu^{-1}(U) \to U \times \mathbf{C}^n$ linearer Faserräume über U gibt.

3.

Satz 3. *Ein linearer Faserraum (L, λ) über einem reduzierten komplexen Raum X, bei dem die Dimension der Faser L_p für alle Punkte $p \in X$ gleich ist, ist ein holomorphes Vektorraumbündel.*

Beweis. Sei $q \in X$ und $n = \dim L_q$. Da L_q nach Satz 1 eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, gibt es nach GRAUERT-KERNER ([4], Satz 2.2) Umgebungen $U \subset X$ von q, $W \subset L$ der Null von L_q und einen Polyzylinder $Z \subset \mathbf{C}^n$, sowie eine biholomorphe Faserabbildung $\varphi : W \to U \times Z$ (über U als Basis und bezüglich der Projektion von $U \times Z$ auf U) derart, daß $\varphi_q : W \cap L_q \to \{q\} \times Z$ Beschränkung eines Vektorraumisomorphismus $L_q \to \{q\} \times \mathbf{C}^n$ ist. Es ist nun eine biholomorphe Faserabbildung zu konstruieren, die diese Eigenschaft für alle Punkte $p \in U$ hat.

Dazu wählt man eine in Z enthaltene Basis $(z_i)_{i=1,\ldots,n}$ des $\mathbf{C}^n$. Ist U genügend klein, so ist $\left(w_p^i := \varphi^{-1}(p, z_i)\right)_{i=1,\ldots,n}$ für jeden Punkt $p \in U$ eine Basis von L_p. Die Faserabbildung $\varrho : U \times \mathbf{C}^n \to \lambda^{-1}(U)$, $(p, c_1, \ldots, c_n) \longmapsto c_1 w_p^1 + \ldots + c_n w_p^n$, ist holomorph und für jeden Punkt $p \in U$ ist $\varrho_p : \{p\} \times \mathbf{C}^n \to L_p$ ein Vektorraumisomorphismus. Es bleibt zu zeigen, daß ϱ biholomorph ist.

Sei $V := \varrho^{-1}(W) \subset U \times \mathbf{C}^n$ und $\varrho' := \varrho | V$. Dann ist $\varphi\varrho' : V \to U \times Z$ eine eineindeutige holomorphe Faserabbildung und es gibt eine Umkehrabbildung $\psi = (\varphi\varrho')^{-1}$. Für jeden Punkt $p \in U$ ist $\psi_p : \{p\} \times Z \to V$ holomorph und außerdem gibt es einen Polyzylinder $Z' \subset Z$ mit folgender Eigenschaft: zu jedem Punkt $(p, z) \in U \times Z'$ existiert ein $c \in \mathbf{C}^n$, so daß $U \times \{c\} \subset V$ und $(p, z) \in \varphi\varrho(U \times \{c\})$. Daher ist auch die Beschränkung von ψ auf den Schnitt $\varphi\varrho(U \times \{c\})$ holomorph und nach dem Satz von HARTOGS (vgl. [5], § 9) ist $\psi | U \times Z'$ holomorph. Daraus folgt, daß ϱ biholomorph ist, und der Satz ist bewiesen.

4.

Die Bedingung in Satz 3, daß X reduziert sein muß, ist wesentlich. Dazu ein einfaches Beispiel.

Sei X der durch die Gleichung $x^2 = 0$ definierte einpunktige (nicht reduzierte) Unterraum von $\mathbf{C}$ mit der Koordinate x, sei L der durch die Gleichungen $x^2 = 0$ und $xs = 0$ definierte Unterraum von $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ mit den Koordinaten x und s und sei $\lambda : L \to X$ die von der Projektion $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $(x, s) \longmapsto x$, induzierte holomorphe Abbildung. Die Vektorraumstruktur des trivialen linearen Faserraumes $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ über $\mathbf{C}$ induziert die Struktur eines linearen Faserraumes in (L, λ). Für den X zugrunde liegenden Punkt p ist $\dim L_p = 1$, (L, λ) ist jedoch *echter* linearer Unterraum von $(X \times \mathbf{C}, pr_X)$, also kein Vektorraumbündel.

Dieser lineare Faserraum $X \times \mathbf{C}$ liefert auch Beispiele für holomorphe Faserabbildungen $\xi : X \times \mathbf{C} \to X \times \mathbf{C}$, die keine Morphismen linearer Faserräume sind, für die jedoch $\xi_p : \{p\} \times \mathbf{C} \to \{p\} \times \mathbf{C}$ linear ist.

Man hüte sich schließlich vor der Vermutung, Satz 3 gelte auch dann, wenn man von Anfang an alle komplexen Räume mit reduzierten Strukturen versieht. Hierzu ein zweites Beispiel.

Sei $N := \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : x^2 - y^3 = 0\}$ die Neilsche Parabel, $K := \{(x, y, s, t) \in N \times \mathbf{C}^2 : 2xs - 3y^2t = 0,\ 4s^2 - 9yt^2 = 0\}$ und $\varkappa : K \to N$ die Beschränkung von $pr_N : N \times \mathbf{C}^2 \to N$ auf K. In der Terminologie von Whitney [12] ist $(K, \varkappa)$ der Raum der Tangentialkegel an N.

Für jeden Punkt $p \in N$ ist die analytische Teilmenge $\varkappa^{-1}(p) \subset \{p\} \times \mathbf{C}^2$ ein Untervektorraum der Dimension 1. Da jeder holomorphe Schnitt $N \to K$ im Punkte $(0,0)$ den Wert Null hat, kann jedoch $(K, \varkappa)$ nicht lokal trivial sein. $(K, \varkappa)$ ist kein linearer Faserraum, denn $K_{(0,0)}$ ist nicht reduziert. Außerdem ist in diesem Beispiel $K \times_N K$ nicht reduziert, obwohl N und K reduziert sind.

Literatur

[1] Cartier, P.: Groupes algébriques et groupes formels. Colloque CBRM, Brüssel 1962, 87–111.

[2] Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. IHES N⁰ 5 (1960).

[3] GRAUERT, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. 146 (1962), 331–368.

[4] GRAUERT, H. und H. KERNER: Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. Math. Ann. 153 (1964), 236–260.

[5] GRAUERT, H. und R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. 136 (1958), 245–318.

[6] GROTHENDIECK, A.: Techniques de construction en géométrie analytique. Séminaire Henri Cartan 13 (1960/61).

[7] HOLMANN, H.: Local Properties of Holomorphic Mappings. Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis 1964, 94–109.

[8] KAUP, W.: Infinitesimale Transformationsgruppen komplexer Räume. Math. Ann. 160 (1965), 72–92.

[9] MACLANE, S.: Homology. Springer, Berlin 1963.

[10] OORT, F.: Commutative Group Schemes. Springer Lecture Notes Nr. 15, Berlin 1966.

[11] REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. 133 (1957), 328–370.

[12] WHITNEY, H.: Tangents to an Analytic Variety. Annals of Math. 81 (1965), 496–549.