BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1965

MÜNCHEN 1966

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Kontraktion und Flutreibung*

Von **Karl Ledersteger** in Wien

Vorgelegt von Herrn Walther Gerlach am 8. Oktober 1965

Kürzlich[1] konnte gezeigt werden, daß es überhaupt keine Gleichgewichtsfigur gibt, welche mit der wirklichen Erde die Elemente $[E, \omega, a, a_k, J_2, C]$, also die Masse, die Rotationsgeschwindigkeit, die Trägheitsmomente, die Äquatorachse und die Äquatorachse des Kernes $a_k = a - 2900$ km gemeinsam hat. Wir haben daher zwischen der Gleichgewichtsfigur der Erde und dem Normalsphäroid der Erde scharf zu unterscheiden. Die Gleichgewichtsfigur hat eine größere Rotationsgeschwindigkeit, entsprechend einem um $11^m\ 39^s$ kürzeren Sterntag, bei einer Oberflächenabplattung von rund 1:296. Stellen wir uns diese Figur erstarrt vor, so sind ihre Flächen gleicher Dichte bei der heutigen kleineren Rotationsgeschwindigkeit nicht mehr Niveauflächen. Lediglich das frei bewegliche Meer hat sich der verringerten Fliehkraft angepaßt und seine Oberfläche ist eine Niveaufläche des „Normalsphäroides" der Erde mit der Abplattung 1:298,29. Das Normalsphäroid ist also keine Gleichgewichtsfigur, aber wir können die Abplattungsfunktion der Flächen gleicher Dichte leicht exakt aus der Gleichgewichtsfigur berechnen.

Bei dieser Betrachtung ist die Achse a festgehalten, d. h. wir haben vollends von der Kontraktion abstrahiert, welche der Flutreibung entgegenwirkt. Denn die Kontraktion bedingt eine Abnahme des Trägheitsmomentes C, welche wegen der notwendigen Konstanz des Drehimpulses ωC mit einer Zunahme von ω verbunden sein muß, während die reine Gezeitenbremse eine Abnahme von ω bei unverändertem C bewirkt. Es ist nicht bekannt, wie sich im Laufe der etwa 3 Milliarden Jahre umfassenden Ge-

---

* The research reported therein partly was sponsored by the U. S. Government.

[1] K. Ledersteger: „Die Gleichgewichtsfigur und das Normalsphäroid der Erde", im Druck.

schichte der Erde das Verhältnis von Kontraktion und Flutreibung geändert hat. Derzeit besteht die vereinigte Wirkung sicherlich in einer Tagesverlängerung, d. h. die Gezeitenwirkung ist größer als der Effekt der Kontraktion. Ohne Zweifel waren beide Effekte zur Zeit der Ausbildung der Kruste wesentlich stärker, der Effekt der Kontraktion wegen der geringeren Festigkeit des Erdkörpers, der Effekt der Gezeitenreibung wegen der größeren Mondnähe, wobei allerdings auch der Einfluß der Krustenformation zu berücksichtigen wäre. Eine exakte Trennung der beiden Effekte von Kontraktion und Flutreibung ist somit ein sehr schwieriges physikalisches Problem.

Betrachtet man aber bloß Anfangs- und Endstadium, wobei letzteres streng vorgegeben ist, während ersteres zahlreiche Annahmen zuläßt, so kann eine tabellarische Übersicht über die möglichen Fälle sicherlich ein wichtiges Hilfsmittel bei der Erforschung der Erdgeschichte darstellen. Schätzt man den gemeinsamen Effekt von Kontraktion und Flutreibung heute auf etwa eine Sekunde Tagesverlängerung in 120000 Jahren, so muß der reine Effekt der Gezeitenreibung ca. $1–2^s$ in 100000 Jahren betragen, was in $3 \cdot 10^9$ Jahren $30000–60000^s$ ausmacht. Die obigen 699^s wären demnach mit etwa 43–86 zu multiplizieren, was besagt, daß die Erde in früheren Zeiten bei entsprechend geringerer Festigkeit weitgehend der abnehmenden Fliehkraft folgen konnte und nur ganz allmählich in den jüngeren Phasen der Entwicklungsgeschichte zurückgeblieben ist. Die Abplattung im Inneren ist etwas zu groß und daher das Trägheitsmoment C etwas kleiner als es im Idealfall des Gleichgewichtes sein muß.

Mit den Ausgangsdaten

$$\begin{aligned} E &= 5976{,}106 \cdot 10^{24}\,\mathrm{g}; & a &= 6{,}37818 \cdot 10^{8}\,\mathrm{cm}; \\ \omega^2 &= 5{,}317496 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{sec}^{-2}; & \omega &= 7292{,}116 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{sec}^{-1} \\ J_2 &= 108284 \cdot 10^{-8}; & H &= 327235 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \tag{1}$$

findet man leicht für die heutige Erde:

$$(C - A) = J_2 E a^2 = 263{,}2547 \cdot 10^{40}\,\mathrm{g\,cm^2} = CH; \tag{2}$$

$$C = 80448{,}2 \cdot 10^{40}\,\mathrm{g\,cm^2}; \quad \omega C = 5{,}8663\,76064 \cdot 10^{40}\,\mathrm{g\,cm^2\,sec^{-1}}.$$

Am Anfang der Entwicklungsreihe steht unbedingt ein MacLaurinsches Ellipsoid, dessen Äquatorradius im Hinblick auf die Kontraktion mindestens gleich dem heutigen Radius sein muß. Damit ergibt sich sofort der Mindestbetrag des ursprünglichen Trägheitsmomentes

$$C_{min} = \frac{2}{5} E a^2 = 97\,246{,}018 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2. \tag{3}$$

In diesem Falle besteht also die Kontraktion lediglich in einer Massenkonzentration bei unveränderter Äquatorachse. Bei der Kontraktion bleibt der Drehimpuls unverändert, während er durch die Gezeitenreibung abnimmt. Mithin liegt das Minimum des ursprünglichen Drehimpulses vor, wenn der ursprüngliche Tag gleich ist dem heutigen:

$$(\omega C)_{min} = 7{,}0912\,9244 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-1}. \tag{4}$$

Durch die Abnahme von C auf den heutigen Wert erhöht sich die Rotationsgeschwindigkeit auf

$$\omega_k = 8814{,}731 \cdot 10^{-8}, \tag{5}$$

woraus sich als zugehörige Tageslänge ergibt:

$$2\pi / \omega_k = 71280{,}5^s = 19^h 48^m 00{,}5^s. \tag{6}$$

Dies bedeutet aber eine Verkürzung des Tages um ($23^h 56^m 04{,}1^s - 19^h 48^m 00{,}5^s) = 4^h 08^m 03{,}6^s$, welche im vorliegenden Falle gerade durch den entgegengesetzt gleichen Betrag der Tagesverlängerung durch Flutreibung kompensiert werden muß. Damit ist aber bereits der Minimalbetrag des reinen Fluteffektes gefunden: $14883{,}6^s$.

Jetzt sind wir auch in der Lage, für äquidistante Annahmen für die Länge des „Urtages" unter Zugrundelegung des minimalen Trägheitsmomentes (3) die minimalen Absolutbeträge der Tagesverkürzung durch Kontraktion und der Tagesverlängerung durch Flutreibung zu berechnen. Die an sich sehr einfache Rechnung sei am Beispiel: Urtag $= 18^h 00^m 00^s = 64800^s$ dargelegt. Die ursprüngliche Rotationsgeschwindigkeit wird

$$\omega_0 = 2\pi : 64800 = 9696{,}274 \cdot 10^{-8}. \qquad \text{(a)}$$

Damit ergibt sich das minimale Ausgangs-Drehmoment:

$$\omega_0 \, C_{min} = 9{,}4292 \; 4034 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-1} \qquad \text{(b)}$$

und mit dem heutigen Trägheitsmoment wie in (5,6)

$$\omega_k = 11720{,}884 \cdot 10^{-8}; \;\; 2\pi : \omega_k = 53606{,}8^s. \qquad \text{(c)}$$

Dies aber bedeutet eine Tagesverkürzung von $18^h 00^m 00^s$ auf $14^h 53^m 26{,}8^s$, also um $3^h 06^m 33{,}2^s$, und es folgt die Tagesverlängerung durch reine Flutreibung: $(23^h 56^m 04{,}1^s - 14^h 53^m 26{,}8^s)$ $= + 9^h 02^m 37{,}3^s$.

Selbstverständlich handelt es sich bei den Ausgangsfiguren um die lineare Reihe MacLaurinscher Ellipsoide mit konstantem Trägheitsmoment C_{min} oder mit der konstanten Achse a. Diese Reihe endet in einer mit maximalem ω_0 rotierenden Scheibe. Zur Bestimmung der maximalen Rotationsgeschwindigkeit müssen wir auf die MacLaurinsche Gleichgewichtsbedingung in der Form

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega^2 a^3}{k^2 E} = \frac{3}{2} \, \frac{(3+\eta^2) \operatorname{arctg} \eta - 3\eta}{\eta^3} \sqrt{1+\eta^2} \qquad (7)$$

zurückgreifen, welche für $\eta = \infty$ oder für die Abplattung $e = 1$ den Grenzwert $\bar{\varepsilon} \rightarrow \frac{3}{4} \pi$ liefert. Somit gilt:

$$\omega_0^2 = \frac{3}{4} \pi \frac{k^2 E}{a^3} = 3619{,}6364 \cdot 10^{-9}; \;\; \omega_0 = 190{,}2534 \cdot 10^{-5};$$

$$2\pi : \omega_0 = 3302{,}5^s = 55^m 02{,}5^s. \qquad (8)$$

Auf diese Weise erhalten wir folgende Tabelle der Minimalbeträge von Kontraktion und Flutreibung:

Tabelle I: Minimaleffekte von Kontraktion und Flutreibung ($a_{min} = 6378{,}18$ km; $C_{min} = 97246{,}018 \cdot 10^{40}$ g cm^2)

Urtag:	$23^h56^m04{,}1^s$	$22^h00^m00{,}0^s$	$20^h00^m00{,}0^s$	$18^h00^m00{,}0^s$	$16^h00^m00{,}0^s$	$14^h00^m00{,}0^s$
ω_0:	7292,116	7933,315	8726,646	9696,274	10908,308	$12466{,}638 \cdot 10^{-8}$
$\omega_0 C_{min}$:	7,0912 9245	7,7148 3292	8,4863 1572	9,4292 4034	10,6078 9514	$12{,}1233\,0901 \cdot 10^{40}$
ω_k:	8814,731	9589,814	10548,795	11720,884	13185,994	$15069{,}708 \cdot 10^{-8}$
$(2\pi/\omega_k)$:	$71280{,}5^s$	$65519{,}4^s$	$59563{,}1^s$	$53606{,}8^s$	$47650{,}4^s$	$41694{,}1^s$
Kontraktion:	$-4^h08^m03{,}6^s$	$3^h48^m00{,}6^s$	$3^h27^m16{,}9^s$	$3^h06^m33{,}2^s$	$2^h45^m49{,}6^s$	$2^h25^m05{,}9^s$
Flutreibung:	+4 08 03,6	5 44 04,7	7 23 21,0	9 02 37,3	10 41 53,7	12 21 10,0
Gesamteffekt:	+0 00 00,0	1 56 04,1	3 56 04,1	5 56 04,1	7 56 04,1	9 56 04,1
$\bar{\varepsilon}_{min}$:	0,00346141	0,00409690	0,00495725	0,00612006	0,00774571	0,01011684
e_{min}:	1 : 231,91	1 : 196,05	1 : 162,16	1 : 131,50	1 : 104,06	1 : 79,86

Urtag:	$12^h00^m00{,}0^s$	$10^h00^m00{,}0^s$	$8^h00^m00{,}0^s$	$6^h00^m00{,}0^s$	$4^h00^m00{,}0^s$	$2^h00^m00{,}0^s$
ω_0:	14544,410	17453,292	21816,616	29088,821	43633,232	$87266{,}463 \cdot 10^{-8}$
$\omega_0 C_{min}$:	14,1438 5954	16,9726 3145	21,2157 9028	28,2877 2005	42,4315 8057	$84{,}8631\,6016 \cdot 10^{40}$
ω_k:	17581,325	21097,590	26371,989	35162,651	52743,978	$105487{,}954 \cdot 10^{-8}$
$(2\pi/\omega_k)$:	$35737{,}8^s$	$29781{,}5^s$	$23825{,}2^s$	$17868{,}9^s$	$11912{,}6^s$	$5956{,}3^s$
Kontraktion:	$-\ 2^h04^m22{,}2^s$	$1^h43^m38{,}5^s$	$1^h22^m54{,}8^s$	$1^h02^m11{,}1^s$	$0^h41^m27{,}4^s$	$0^h20^m43{,}7^s$
Flutreibung:	+14 00 26,3	15 39 42,6	17 18 58,9	18 58 15,2	20 37 31,5	22 16 47,8
Gesamteffekt:	+11 56 04,1	13 56 04,1	15 56 04,1	17 56 04,1	19 56 04,1	21 56 04,1
$\bar{\varepsilon}_{min}$:	0,01377014	0,01982900	0,03098282	0,05508057	0,12393128	0,49572531
e_{min}:	1 : 58,87	1 : 41,12	1 : 26,58	1 : 15,33	1 : 7,16	1 : 2,31

Urtag:	$00^h55^m02{,}5^s$	ω_k:	$229978{,}890 \cdot 10^{-8}$;	Flutreibung:	$+23^h10^m32{,}0^s$
ω_0:	$190253{,}423 \cdot 10^{-8}$;	$(2\pi/\omega_k)$:	$2732{,}07^s$;	Gesamteffekt:	+23 01 01,6
$\omega_0 C_{min}$:	$185{,}0138\,7763 \cdot 10^{40}$;	Kontraktion:	$-00^h09^m30{,}4^s$;	$\bar{\varepsilon}_{min} = \bar{\varepsilon}_{max}$:	$2{,}35619449 = \dfrac{3}{4}\pi$
				$e_{min} = e_{max}$:	1

Da der Mindestbetrag des reinen Fluteffektes nahe bei 15000^s liegt, empfiehlt es sich, Tabellen für die Fluteffekte 30000^s, 45000^s, 60000^s und 75000^s zu berechnen, um einen tieferen Einblick in die Zusammenhänge von Kontraktion, Flutreibung, ursprünglichem Trägheitsmoment sowie ursprünglicher Achse a und Abplattung e des homogenen Ausgangsellipsoides zu gewinnen. Das Verfahren sei wieder am Beispiel des Urtages $18^h =$ $= 64800^s$ dargelegt, wobei wir den reinen Fluteffekt von 45000^s $= 12^h30^m$ voraussetzen. Um diesen Effekt zu erzielen, muß der Tag infolge der Kontraktion auf $(23^h56^m04{,}1^s - 12^h30^m) =$ $= 11^h26^m04{,}1^s = 41164{,}1^s$ absinken, d. h. der Kontraktionseffekt muß $(18^h - 11^h26^m04{,}1^s) = 6^h33^m55{,}9^s = 23635{,}9^s$ sein. Während im obigen Falle der Minimaleffekte das homogene Ausgangsellipsoid mit der heutigen Achse a das Trägheitsmoment C_{min} besitzt und die Kontraktion auf die Gleichung $\omega_0 C_{min} =$ $= \omega_k C_E$ führt, wobei C_E das heutige Trägheitsmoment der Erde bezeichnet, hat jetzt das homogene Ausgangsellipsoid die größere Achse a_0 und das dementsprechend größere Trägheitsmoment $C_0 = n\, C_{min}$, womit aus der Kontraktion folgt: $\omega_0 C_0 = \omega_k' C_E$. Führt man die Rotationsdauer $t = 2\pi : \omega$ ein, so ergibt sich daraus die Doppelgleichung:

$$t_0 C_E = t_k C_{min} = t_k' \, C_0 = t_k' \, n \, C_{min},$$

also:

$$n = t_k : t_k', \tag{9}$$

was im vorliegenden Beispiel $n = (53606{,}8 : 41164{,}1) =$ $= 1{,}30227067$ liefert. Es folgt leicht:

$$C_0 = n\,C_{min} = 126640{,}6 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2; \; a_0^2 = \left(C_0 : \frac{2}{5} E\right);$$
$$a_0 = 7278{,}591 \text{ km}. \tag{10}$$

Der Faktor n ist jeweils am größten für das Modell mit dem Urtag $23^h56^m04{,}1^s$ und nimmt mit wachsendem ω_0 allmählich auf 1 ab. Um diese zweite Grenzlösung zu finden, hat man bloß zu beachten, daß in jeder Reihe eines bestimmten Fluteffektes t_k' und ω_k' konstant sind. In unserem Beispiel ist $t_k' = 41164{,}1^s$ und daher $\omega_k' = 15263{,}8 \cdot 10^{-8}$. Mit dem Drehimpuls $\omega_k' \, C_E$

Tabelle II: Reiner Fluteffekt 30000^s

Urtag:	$23^h56^m04,1^s$	$22^h00^m00,0^s$	$20^h00^m00,0^s$	$18^h51^m31,3^s$
n:	1,2691 4702	1,1665 7082	1,0605 1910	1,0000 0000
Kontraktion:	−8 20 00,0	−6 23 55,9	−4 23 55,9	−3 15 27,2
Flutreibung:	+8 20 00,0	+8 20 00,0	+8 20 00,0	+8 20 00,0
Gesamteffekt:	+0 00 00,0	+1 56 04,1	+3 56 04,1	+5 04 32,8
C_0:	123 419,49	113 444,37	103 131,26	97 246,02 · 10^{40}
a_0 ;	7185,430 km	6888,939 km	6568,346 km	6378,180 km
$\bar{\varepsilon}_0$:	0,0049 4904	0,0051 6205	0,0054 1400	0,0055 7542

Tabelle III: Reiner Fluteffekt 45000^s

Urtag:	$23^h56^m04,1^s$	$22^h00^m00,0^s$	$20^h00^m00,0^s$	$18^h00^m00,0^s$	$16^h00^m00,0^s$	$13^h49^m19,3^s$
n:	1,7316 1855	1,5916 6279	1,4469 6622	1,3022 7067	1,1575 7295	1,0000 0000
Kontraktion:	−12 30 00,0	−10 33 55,9	− 8 33 55,9	− 6 33 55,9	− 4 33 55,9	− 2 23 15,2
Flutreibung:	+12 30 00,0	+12 30 00,0	+12 30 00,0	+12 30 00,0	+12 30 00,0	+12 30 00,0
Gesamteffekt:	+ 0 00 00,0	+ 1 56 04,1	+ 3 56 04,1	+ 5 56 04,1	+ 7 56 04,1	+10 06 44,8
C_0:	168 393,01	154 782,87	140 711,70	126 640,64	112 569,36	97 246,02 · 10^{40}
a_0:	8393,109 km	8046,783 km	7672,307 km	7278,591 km	6862,320 km	6378,180 km
$\bar{\varepsilon}_0$:	0,0078 8736	0,0082 2682	0,0086 2836	0,0090 9510	0,0096 4681	0,0103 7905

Tabelle IV: Reiner Fluteffekt 60000^s

Urtag:	$23^h 56^m 04,1^s$	$22^h 00^m 00,0^s$	$20^h 00^m 00,0^s$	$18^h 00^m 00,0^s$	$16^h 00^m 00,0^s$	$14^h 00^m 00,0^s$
n:	2,7243 6277	2,5041 7175	2,2765 2012	2,0486 5445	1,8212 1304	1,5935 6141
Kontraktion:	−16 40 00,0	−14 43 55,9	−12 43 55,9	−10 43 55,9	− 8 43 55,9	− 6 43 55,9
Flutreibung:	+16 40 00,0	+16 40 00,0	+16 40 00,0	+16 40 00,0	+16 40 00,0	+16 00 00,0
Gesamteffekt:	+ 0 00 00,0	+ 1 56 04,1	+ 3 56 04,1	+ 5 56 04,1	+ 7 56 04,1	+ 9 56 04,1
C_0:	264 933,43	243 520,73	221 382,52	199 223,49	177 105,72	154 967,50 · 10^{40}
a_0:	10527,597 km	10093,199 km	9623,488 km	9129,166 km	8607,502 km	8051,581 km
$\bar{\varepsilon}_0$:	0,0155 6506	0,0162 3498	0,0170 2738	0,0179 4563	0,0190 3716	0,0203 5158

Reiner Fluteffekt 60000^s

Urtag:	$12^h 00^m 00,0^s$	$10^h 00^m 00,0^s$	$08^h 47^m 07,2^s$
n:	1,3659 1119	1,1382 5933	1,0000 0000
Kontraktion:	− 4 43 55,9	− 2 43 55,9	− 1 31 03,1
Flutreibung:	+16 40 00,0	+16 40 00,0	+16 40 00,0
Gesamteffekt:	+11 56 04,1	+13 56 04,1	+15 08 56,9
C_0:	132 829,42	110 691,19	97 246,02 · 10^{40}
a_0	7454,320 km	6804,832 km	6378,180 km
$\bar{\varepsilon}_0$:	0,0219 8226	0,0240 8035	0,0256 9121

Tabelle V: Reiner Fluteffekt 75000^s

Urtag:	$23^h 56^m 04{,}1^s$	$22^h 00^m 00{,}0^s$	$20^h 00^m 00{,}0^s$	$18^h 00^m 00{,}0^s$	$16^h 00^m 00{,}0^s$	$14^h 00^m 00{,}0^s$
n:	6,3847 9591	5,8687 5790	5,3352 3526	4,8012 100	4,2681 8104	3,7346 5841
Kontraktion:	−20 50 00,0	−18 53 55,9	−16 53 55,9	−14 53 55,9	−12 53 55,9	−10 53 55,9
Flutreibung:	+20 50 00,0	+20 50 00,0	+20 50 00,0	+20 50 00,0	+20 50 00,0	+20 50 00,0
Gesamteffekt:	+ 0 00 00,0	+ 1 56 04,1	+ 3 56 04,1	+ 5 56 04,1	+ 7 56 04,1	+ 9 56 04,1
C_0:	620 895,98	570 713,34	518 830,38	466 898,65	415 063,61	$363\,180{,}66 \cdot 10^{40}$
a_0:	16116,483 km	15451,472 km	14732,402 km	13975,655 km	13177,050 km	12326,001 km
$\bar{\varepsilon}_0$:	0,0558 4365	0,0582 4719	0,0610 9012	0,0643 8460	0,0683 0073	0,0730 1654

Urtag:	$12^h 00^m 00{,}0^s$	$10^h 00^m 00{,}0^s$	$8^h 00^m 00{,}0^s$	$6^h 00^m 00{,}0^s$	$4^h 00^m 00{,}0^s$	$3^m 44^m 55{,}2$
n:	3,2011 3909	2,6676 1593	2,1340 9267	1,6005 6950	1,0670 4634	1,0000 0000
Kontraktion:	− 8 53 55,9	− 6 53 55,9	− 4 53 55,9	− 2 53 55,9	−0 53 55,9	− 0 38 51,1
Flutreibung:	+20 50 00,0	+20 50 00,0	+20 50 00,0	+20 50 00,0	+20 50 00,0	+20 50 00,0
Gesamteffekt:	+11 56 04,1	+13 56 04,1	+15 56 04,1	+17 56 04,1	+19 56 04,1	+20 11 08,9
C_0	311 298,03	259 415,03	207 532,01	155 649,01	103 766,01	$97\,246{,}02 \cdot 10^{40}$
a_0:	11411,666 km	10417,378 km	9317,586 km	8069,266 km	6588,528 km	6378,180 km
$\bar{\varepsilon}_0$:	0,0788 6700	0,0863 9444	0,0965 9291	0,1115 3476	0,1366 0161	0,1411 0660

findet man das zu C_{min} gehörige kleinere $\omega_0 = 12627{,}2 \cdot 10^{-8}$ und damit $t_0 = 49759{,}3^s = 13^h 49^m 19{,}3^s$. So erhalten wir zu jeder Annahme des reinen Fluteffektes die zugehörige Mindestlänge U_{min} des Urtages:

Reiner Fluteffekt	U_{min}	
$14883{,}6^s$ . . . U_{min}	$= 23^h 56^m 04{,}1^s$	
30000	$= 18\ 51\ 31{,}3$	
45000	$= 13\ 49\ 19{,}3$	$5^h 02^m 12{,}0^s$
60000	$= 8\ 47\ 07{,}2$	$5\ 02\ 12{,}1$
75000	$= 3\ 44\ 55{,}2$	$5\ 02\ 12{,}0$

und man sieht, daß U_{min} eine streng lineare Funktion des Fluteffektes ist, welche für $86164{,}1^s$ auf $U_{min} = 0$ führen würde. Doch ist damit die physikalische Grenze bereits überschritten.

In jeder der Reihen Tabelle II–V sinken mit abnehmender Länge des Urtages n, C_0 und a_0 ab, ebenso der Effekt der Kontraktion, während $\bar{\varepsilon}_0$ und damit die Abplattung e_0 des Ausgangsellipsoides wachsen. Läßt man für das homogene Ausgangsellipsoid Achsenwerte $a_0 \leqq 9000$ km und Abplattungen $e_0 \leqq 0{,}1$ als physikalisch möglich gelten, so gestatten diese Reihen bereits eine Abschätzung des maximalen Fluteffektes. Während nämlich die Lösungen der Tabellen II–IV diesen Forderungen genügen, ist dies für den Fluteffekt 75000^s nicht mehr der Fall. Denn für die Urtage $U \geqq 8^h$ ist die Achse a_0 zu groß, für die Urtage $U < 8^h$ hingegen die Abplattung zu groß. Somit dürfte das Maximum des reinen Fluteffektes nur knapp an 75000^s heranreichen.

Die Berechnung der Abplattungen aus $\bar{\varepsilon}$ erfolgt im allgemeinen über die zweite Exzentrizität $\eta^2 = (a^2 - c^2) : c^2$ aus (7) und

$$(1 + \eta^2) = (1 - e)^{-2}. \qquad (7\,\text{a})$$

Der angenommenen Grenzabplattung $e = 0{,}1$ entspricht $\bar{\varepsilon} = 0{,}0867$ und $\eta = 0{,}4843$. Unterhalb dieser Grenze kann bequem die Entwicklung

$$\bar{\varepsilon} = \frac{4}{5} e + \frac{22}{35} e^2 + \frac{2}{5} e^3 \ldots \qquad (7\,\text{b})$$

benützt werden.

Schließlich können noch Reihen mit konstanter Länge des Urtages berechnet werden. Jede dieser Reihen beginnt mit der Minimallösung der Tabelle I. Davon ausgehend wachsen mit n alle übrigen Größen C_0, a_0, $\bar{\varepsilon}_0$ und e_0. Kontraktion und Flutreibung nehmen stets um denselben Betrag zu, so daß der Gesamteffekt unverändert bleibt. Die zweite Grenzlösung ist jeweils durch die mit der gegebenen Geschwindigkeit rotierende Scheibe bestimmt. Es gilt hierfür:

$$\bar{\varepsilon}_0 = (\omega_0^2 a_0^3 : k^2 E) = \frac{3}{4}\pi; \quad C_0 = n C_{min}; \quad n = (a_0 : a_E)^2;$$

$$\bar{\varepsilon}_{0,min} = (\omega_0^2 a_E^3 : k^2 E); \text{ also: } n^3 = \left(\frac{3}{4}\pi : \bar{\varepsilon}_{0min}\right)^2, \tag{11}$$

woraus sich n, C_0 und a_0 und in weiterer Folge gemäß (9) Kontraktion und Flutreibung ergeben.

Tabelle VI. Maximalwerte von Kontraktion und Flutreibung $\left(\bar{\varepsilon}_0 = \frac{3}{4}\pi\right)$

Urtag:	$23^h56^m04{,}1^s$	$22^h00^m00{,}0^s$	$20^h00^m00{,}0^s$	$18^h00^m00{,}0^s$
n:	77,3817492	69,1571314	60,9041671	52,9220778
C_0:	7525066,10	6725255,64	5922687,73	5146461,33 · 10^{40}
a_0:	56106,867	53041,434	49776,032	46399,705 km
Kontr.:	$-23^h40^m42{,}9^s$	$-21^h44^m12{,}6^s$	$-19^h43^m42{,}0^s$	$-17^h43^m07{,}1^s$
Flutr.:	+23 40 42,9	+23 40 16,7	+23 39 46,1	+23 39 11,2
Ges.E.	+ 0 00 00,0	+ 1 56 04,1	+ 3 56 04,1	+ 5 56 04,1
Urtag:	$16^h00^m00{,}0^s$	$14^h00^m00{,}0^s$	$12^h00^m00{,}0^s$	$10^h00^m00{,}0^s$
n:	45,2307046	37,8539122	30,8211211	24,1698243
C_0:	4398505,91	3681142,23	2997231,30	2350419,17 · 10^{40}
a_0:	42895,669	39242,093	35409,597	31356,929 km
Kontr.:	$-15^h42^m26{,}5^s$	$-13^h41^m38{,}6^s$	$-11^h40^m40{,}5^s$	$-9^h39^m27{,}8^s$
Flutr.:	+23 38 30,6	+23 37 42,7	+23 36 44,6	+23 35 31,9
Ges.E.:	+ 7 56 04,1	+ 9 56 04,1	+11 56 04,1	+13 56 04,1
Urtag:	$8^h00^m00{,}0^s$	$6^h00^m00{,}0^s$	$4^h00^m00{,}0^s$	$2^h00^m00{,}0^s$
n:	17,9498007	12,2313707	7,1233911	2,8269197
C_0:	1745536,92	1189452,10	692721,42	274906,68 · 10^{40}
a_0:	27022,491	22306,649	17023,159	10723,919 km
Kontr.:	$-7^h37^m52{,}7^s$	$-5^h35^m39{,}1^s$	$-3^h32^m07{,}7^s$	$-1^h24^m53{,}0^s$
Flutr.:	+23 33 56,8	+23 31 43,2	+23 28 11,8	+23 20 57,1
Ges.E.:	+15 56 04,1	+17 56 04,1	+19 56 04,1	+21 56 04,1

Mit abnehmender Länge des Urtages werden diese Reihen immer kürzer, bis schließlich für $U = 0^h 55^m 02{,}5^s$ Maximum und Minimum zusammenfallen.

Der Bequemlichkeit halber stellen wir noch die Grenzwerte für Kontraktion und Flutreibung und die Minimalwerte der Abplattung zusammen:

Tabelle VII:

U	Kontraktion:	Flutreibung:	e_{min}
$0^h 55^m 02{,}5^s$:	$570{,}4^s$— $570{,}4^s$	$83432{,}0^s$—$83432{,}0^s$	1
2^h	1243,7 — 5093,0	80207,8—84057,1	1 : 2,31
4^h	2487,4—12727,7	74251,5—84491,8	1 : 7,16
6^h	3731,1—20139,1	68295,2—84703,2	1 : 15,33
8^h	4974,8—27472,7	62338,9—84836,8	1 : 26,58
10^h	6218,5—34767,8	56382,6—84931,9	1 : 41,12
12^h	7462,2—42040,5	50426,3—85004,6	1 : 58,87
14^h	8705,9—49298,6	44470,0—85062,7	1 : 79,86
16^h	9949,6—56546,5	38513,7—85110,6	1 : 104,06
18^h	11193,2—63787,1	32557,3—85151,2	1 : 131,50
20^h	12436,9—71022,0	26601,0—85186,1	1 : 162,16
22^h	13680,6—78252,6	20644,1—85216,7	1 : 196,05
$23^h 56^m 04{,}1^s$	14883,6—85242,9	14883,6—85242,9	1 : 231,91

Die äußersten Grenzen des reinen Fluteffektes sind durch die letzte Zeile der Tabelle VII gegeben, und zwar gänzlich unabhängig vom Entwicklungszeitraum der Erde. Nimmt man letzteren mit 3 Milliarden Jahren an, so ergibt sich für den Durchschnittswert D des Fluteffektes in 100000 Jahren leicht:

$$0{,}49445^s < D < 2{,}84114^s. \tag{12}$$

Vorstehende Analyse liefert einige Anhaltspunkte für die Abschätzung der Länge des tatsächlichen Urtages. So erweist sich die vielfach vertretene Ansicht $U \sim 4^h$ bereits als sehr unwahrscheinlich, weil dann die Abplattung des Ausgangsellipsoides größer als (1 : 7,16) sein müßte. Ferner fanden wir oben, daß die obere Grenze des reinen Fluteffektes bei rund 75000^s liegen muß, woraus sich $D_{max} \sim 2{,}50^s$ ergibt. Umgekehrt kann der Fluteffekt kaum unter 50000^s liegen, da sonst die Länge des Urtages größer als 12^h sein müßte ($D_{min} \sim 1{,}67^s$). Die ziemlich plausible Annahme $e \leqq 0{,}1$ erfordert einen Urtag von mindestens 5 Stunden.

Die durch die homogenen Scheiben definierten Maximalwerte der Tabelle VI können natürlich bei weitem nicht erreicht werden. Eine vorsichtig gewählte obere Grenze kann vermutlich durch $n = 2$ festgelegt werden. Damit folgt ja bereits $a_0 = 9020{,}1$ km. Aus $n = 2$ wird einheitlich $C_0 = 2\,C_{min}$ und gemäß (9): $t'_k = \frac{1}{2}\,t_k$, also:

Urtag :	$23^h56^m04{,}1^s$	$22^h00^m00{,}0^s$	$20^h00^m00{,}0^s$	$18^h00^m00{,}0^s$
Kontr. :	−14 02 03,8	−12 54 00,3	−11 43 38,4	−10 33 16,6
Flutr. :	+14 02 03,8	+14 50 04,4	+15 39 42,5	+16 29 20,7
Ges. *E*.:	0 00 00,0	+ 1 06 04,1	+ 3 56 04,1	+ 5 56 04,1
Flutr. :	$50523{,}8^s$	$53404{,}4^s$	$56382{,}5^s$	$59360{,}7^s$
$\bar{\varepsilon}_0$:	0,00979035	0,01158779	0,01402121	0,01731015

Urtag :	$16^h00^m00{,}0^s$	$14^h00^m00{,}0^s$	$12^h00^m00{,}0^s$	$10^h00^m00{,}0^s$
Kontr. :	− 9 22 54,8	− 8 12 32,9	− 7 02 11,1	− 5 51 49,2
Flutr. :	+17 18 58,9	+18 08 37,0	+18 58 15,2	+19 47 53,3
Ges. *E*.:	+ 7 56 04,1	+ 9 56 04,1	+11 56 04,1	+13 56 04,1
Flutr. :	$62338{,}9^s$	$65317{,}0^s$	$68295{,}1^s$	$71273{,}1^s$
$\bar{\varepsilon}_0$:	0,02190817	0,02861475	0,03894785	0,05608489

Urtag :	$8^h00^m00{,}0^s$		$6^h00^m00{,}0^s$	
Kontr. :	− 4 41 27,4		− 2 19 54,6	
Flutr. :	+20 37 31,5		+20 15 58,7	
Ges. *E*.:	+15 56 04,1		+17 56 04,1	
Flutr. :	$74251{,}5^s$		$72958{,}7^s$	
$\bar{\varepsilon}_0$:	0,08763353		0,0867	

Für $U = 8^h$ hat sich die Abplattung bereits größer als 0,1 ergeben, weshalb für $U = 6^h$ die obere Grenze auf Grund der Annahme $\bar{\varepsilon}_0 = 0{,}0867$ berechnet wurde. Damit ergab sich $a_0 = 7419{,}4$ km und $n = 1{,}3531536$.

Operiert man schließlich mit dem Mittelwert der obigen engeren Grenzen $1{,}67^s \leqq D \leqq 2{,}50^s$, d. h. mit einem Fluteffekt von $62\,500^s$, so liegt die Mindestlänge des Urtages bei 8 Stunden. Schließlich ergeben für $n \leqq 2$ und $\bar{\varepsilon}_0 \leqq 0{,}0867$ für verschiedene Flutreibungseffekte folgende Grenzen des Urtages:

Flutreibung 50000^s:	12^h	08^m	$35{,}3^s$	$\leqq U \leqq$	23^h	56^m	$04{,}1^s$
55000	10	27	51,3	$\leqq U \leqq$	20	55	42,5
60000	8	47	07,2	$\leqq U \leqq$	17	34	14,5
65000	7	06	23,2	$\leqq U \leqq$	14	12	46,5
70000	5	25	39,2	$\leqq U \leqq$	10	51	18,5
74000	7	40	48,9	$\leqq U \leqq$	8	10	08,0.