BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1965

MÜNCHEN 1966

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Auflösung der Singularitäten gewisser holomorpher Abbildungen

Von **Gerd Fischer** in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 2. Juli 1965

Ist $\tau : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung einer komplexen Mannigfaltigkeit X auf eine Riemannsche Fläche Y, so heißt τ *regulär in einem Punkt* $p \in X$ mit lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$, wenn mindestens eine der Ableitungen $\partial\tau/\partial x_1, \ldots, \partial\tau/\partial x_n$ im Punkte p nicht verschwindet. Andernfalls heißt τ *singulär* in p. Die analytische Menge $S(\tau)$ der Punkte von X, in denen τ singulär ist, heißt Singularitätenmenge von τ. τ heißt *regulär*, falls $S(\tau)$ leer ist. Ist τ regulär in p, so sind die Fasern $\tau^{-1}(q)$, $q \in Y$, in einer Umgebung $U(p)$ singularitätenfreie Hyperflächen. Es gilt zwar nicht die Umkehrung, die Singularitäten holomorpher Abbildungen mit singularitätenfreien Fasern lassen sich jedoch in naheliegender Weise „*auflösen*". Bei holomorphen Abbildungen auf höherdimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten ist die angegebene Art der Singularitätenauflösung im allgemeinen nicht mehr möglich (vgl. Beispiel 2). Möglichkeiten, die Singularitäten von holomorphen Abbildungen auch dann noch aufzulösen, wenn die Fasern Singularitäten besitzen, wurden von E. Brieskorn in [2] untersucht.

Herrn Professor R. Remmert bin ich für seine wertvollen Anregungen zu großem Dank verpflichtet.

Definition. Ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\hat{\tau}} & \hat{Y} \\ \downarrow \xi & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\tau} & Y \end{array}$$

heißt *Auflösung (der Singularitäten)* einer holomorphen Abbildung τ von einer komplexen Mannigfaltigkeit X auf[1] eine Riemannsche Fläche Y, wenn folgendes gilt:

i) $\hat{X}$ *ist eine mit* X *gleichdimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und* $\hat{Y}$ *ist eine Riemannsche Fläche,*

ii) $\hat{\tau}$ *ist eine reguläre holomorphe Abbildung,*

iii) ξ *ist eine surjektive holomorphe Abbildung und* η *ist eine analytische Überlagerung.*

Unter der generellen Voraussetzung, daß X eine komplexe Mannigfaltigkeit, Y eine Riemannsche Fläche und $\tau: X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung ist, gelten über die Existenz von Auflösungen folgende Aussagen.

Satz 1. *Ist für einen Punkt* $p \in X$ *die durch* p *gehende Faser in* p *singularitätenfrei, so gibt es eine Umgebung* $U(p)$ *mit einer Auflösung*

$$\begin{tikzcd} & \hat{V} \arrow[d, "\eta"] \\ U \arrow[ur, "\hat{\tau}"] \arrow[r, "\tau"] & V = \tau(U) \end{tikzcd}$$

von $\tau \mid U$.

Satz 2. *Ist für einen Punkt* $q \in Y$ *die Faser* $F = \tau^{-1}(q)$ *singularitätenfrei und kompakt, so gibt es eine Umgebung* $V(q)$ *mit einer Auflösung*

$$\begin{tikzcd} \hat{T} \arrow[r, "\hat{\tau}"] \arrow[d, "\xi"] & \hat{V} \arrow[d, "\eta"] \\ \tau^{-1}(V) = T \arrow[r, "\tau"] & V \end{tikzcd}$$

von $\tau \mid \tau^{-1}(V)$, *wobei* ξ *eine unverzweigte analytische Überlagerung ist.*

[1] Das bedeutet keine Einschränkung, wenn τ eine nicht konstante und daher offene Abbildung ist (vgl. hierzu z. B. [6], Satz 28).

Satz 3. *Ist τ eine eigentliche Abbildung, so daß das Bild $\tau(S(\tau))$ der Singularitätenmenge von τ in Y endlich ist*[2] *und sind alle Fasern von τ singularitätenfrei, so gibt es eine Auflösung von $\tau : X \to Y$, wobei ξ eine analytische Überlagerung ist.*

Beweis von Satz 1: Sei $p \in X$, U eine Polyzylinderumgebung von p mit Koordinaten $(z, x_1, \ldots, x_k)$ und sei y eine Koordinate in der Umgebung $V = \tau(U)$ von $q = \tau(p)$, so daß τ zwischen U und V durch eine holomorphe Funktion $y = f(z, x)$ beschrieben wird, wobei zur Abkürzung $x = (x_1, \ldots, x_k)$ gesetzt ist. Weiter sei U so gewählt, daß die Faser $\tau^{-1}(q)$ in U durch $z = 0$ gegeben ist. Daher kann man f nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz[3] nach etwaiger Verkleinerung von U schreiben als

$$f(z, x) = e(z, x)\ \left(z^d + a_1(x)\, z^{d-1} + \cdots + a_d(x)\right)$$

mit $e(z, x) \neq 0$ für alle $(z, x) \in U$. Da f auf jeder Geraden $x = \text{const}$ genau dann gleich Null ist, wenn $z = 0$, folgt $a_1 = \ldots = a_d = 0$. Da $e(z, x)$ in U keine Nullstelle hat, kann man durch die Koordinatentransformation $(z, x) \to (z', x)$ mit $z' = \sqrt[d]{e(z, x)} \cdot z$ erreichen, daß τ durch $y = z'^{\,d}$ beschrieben wird. Nun definiert man $\hat{V}$ als Teilmenge von U mit den Gleichungen $x_1 = \ldots = x_k = 0$, $\hat{\tau}(z', x) := (z', 0)$ und $\eta := \tau \,|\, \hat{V}$, d. h. $\eta(z', 0) = z'^{\,d}$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Aus Satz 1 ergibt sich ein einfaches Kriterium, wann eine holomorphe Abbildung mit singularitätenfreien Fasern auf eine Riemannsche Fläche regulär ist:

Korollar 1. $\tau : X \to Y$ *ist genau dann regulär in einem Punkt $p \in X$, wenn folgendes gilt:*

i) *die Faser $\tau^{-1}(\tau(p))$ ist in p singularitätenfrei,*

ii) *es gibt eine Umgebungsbasis $\{U_i(p)\}$, so daß für alle i die Fasern von $\tau \,|\, U_i$ zusammenhängend sind.*

---

[2] Diese Voraussetzung ist z. B. erfüllt, wenn X kompakt ist.

[3] Siehe z. B. [5], 2. Kapitel, § 2.

Zum Beweis von Korollar 1 genügt es zu bemerken, daß Bedingung ii) gleichbedeutend damit ist, daß η eine biholomorphe Abbildung ist.

Korollar 2. *Ist für einen Punkt $p \in X$ die durch p gehende Faser in p singularitätenfrei, so gibt es eine Umgebung $U(p)$, so daß alle Fasern in U singularitätenfrei sind.*

Schon für den Fall, daß $\dim Y = 2$, gilt Korollar 2 nicht mehr, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 1. Sei $\tau : \boldsymbol{C}_3 \to \boldsymbol{C}_2$ definiert durch $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1^3 - x_2 x_3^2, x_2)$. Die Faser über dem Nullpunkt des $\boldsymbol{C}_2$, gegeben durch die Gleichungen $x_2 = 0$ und $x_1^3 = 0$ ist singularitätenfrei, alle Fasern über Punkten $(0, c)$ mit $c \neq 0$ sind Neilsche Parabeln.

Selbst unter der Voraussetzung, daß in einer Umgebung eines Punktes $p \in X$ *alle* Fasern singularitätenfrei sind, ist eine Auflösung wie in Satz 1 für $\dim Y \geq 2$ im allgemeinen nicht möglich:

Beispiel 2. Sei $\tau : \boldsymbol{C}_3 \to \boldsymbol{C}_2$ definiert durch $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1^2 - x_2 x_3, x_2)$. Alle Fasern von τ sind singularitätenfrei, über Punkten $(c_1, 0)$ sind es Geraden, über Punkten (c_1, c_2) mit $c_2 \neq 0$ Parabeln. Für eine Folge von Punkten $(0, b_i, 0)$ des $\boldsymbol{C}_3$ mit $b_i \neq 0$, die gegen den Nullpunkt des $\boldsymbol{C}_3$ konvergiert, konvergiert die Folge der Tangenten an die Fasern in den Punkten $(0, b_i, 0)$ *nicht* gegen die Tangente an die Faser im Nullpunkt. Für eine Auflösung nach Satz 1 ist jedoch die Konvergenz dieser Tangenten eine notwendige Bedingung.

Beweis von Satz 2: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß F zusammenhängend ist. Da F kompakt ist, gibt es nach [7] Hilfssatz 3 eine Umgebung von F, so daß die Beschränkung von τ auf diese Umgebung eigentlich ist. Daher können wir auf Grund des Steinschen Faktorisierungssatzes[4] weiter annehmen, daß alle Fasern von τ in einer Umgebung von F zusammenhängend sind. Die Konstruktion der Auflösung verläuft nun folgendermaßen. Sei $p \in F$ und seien $\hat{V}$, η und die Umgebung V von q wie im Beweis von Satz 1 gewählt.

[4] Siehe [7], Satz 12.

Man setzt $T := \tau^{-1}(V)$ und definiert eine analytische Menge $\tilde{T} := \{(t, \hat{v}) \in T \times \hat{V} \mid \tau(t) = \eta(\hat{v})\}$. Durch Beschränkung der kanonischen Projektionen von $T \times \hat{V}$ auf $\tilde{T}$ erhält man holomorphe Abbildungen $\chi : \tilde{T} \to T$ und $\tilde{\tau} : \tilde{T} \to \hat{V}$. Bezeichnet $\hat{T}$ die Normalisierung[5] von $\tilde{T}$ und $\nu : \hat{T} \to \tilde{T}$ die kanonische Abbildung, so behaupten wir: Für eine genügend kleine Umgebung $V(q)$ ist $\hat{T}$ eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit und durch die Abbildungen $\xi = \chi \circ \nu$ und $\hat{\tau} = \tilde{\tau} \circ \nu$ ist die gesuchte Auflösung konstruiert.

Da F kompakt ist, gibt es in X ein endliches System $\{U_1, \ldots, U_N\}$ von offenen Mengen, so daß für $\tau \mid U_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ eine Auflösung nach Satz 1 existiert und F von $\{U_1 \cap F, \ldots, U_N \cap F\}$ überdeckt wird. Sei $V \subset \bigcap_{i=1}^{N} \tau(U_i)$ eine Umgebung von q mit $T = \tau^{-1}(V) \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$. Da F nach Annahme zusammenhängend ist, gibt es eine natürliche Zahl d (die „*Multiplizität*" von F), so daß für alle zu F transversalen Geradenstücke $\hat{V} \subset T$ mit der Koordinate $\hat{z}$ die Abbildung $\eta = \tau \mid \hat{V} : \hat{V} \to V$ durch $\eta(\hat{z}) = \hat{z}^d$ beschrieben wird. Sei ein beliebiges i herausgegriffen und $U = U_i \cap T$ gesetzt. Dann ist $\tilde{T}$ in $U \times \hat{V}$ mit Koordinaten $(z, x_1, \ldots, x_k, \hat{z})$ durch die Gleichung $z^d = \hat{z}^d$ definiert, d. h. die Normalisierung von $\tilde{T} \cap (U \times \hat{V})$ besteht aus d Zusammenhangskomponenten $\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_d$, die durch $\xi \mid \hat{T}_\delta : \hat{T}_\delta \to U$ $(\delta = 1, \ldots, d)$ biholomorph abgebildet werden. Damit ist gezeigt, daß $\hat{T}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit und ξ eine unverzweigte analytische Überlagerung ist. Weiter ist $\hat{\tau} \mid \hat{T}_\delta : \hat{T}_\delta \to \hat{V}$ eine Projektion, daher ist $\hat{\tau}$ eine reguläre Abbildung. Ist $\hat{F} \subset \hat{T}$ eine Faser von $\hat{\tau}$, in deren Punkten $\hat{\tau}$ regulär ist, so ist $\hat{T}$ als topologischer Raum (nach [3, S. 31] sogar als C^∞-Mannigfaltigkeit) Produkt von $\hat{F}$ und $\hat{V}$, also zusammenhängend. Damit ist Satz 2 bewiesen.

$F' = \xi^{-1}(F)$ ist homöomorph zu $\hat{F}$ und $\xi \mid F' : F' \to F$ ist eine unverzweigte Überlagerung. Falls F einfach zusammenhängend ist, ist $\xi \mid F'$ eine topologische Abbildung und daher die Multiplizität d von F gleich eins. Man erhält daraus das

---

[5] Siehe z. B. [4], § 6.

Korollar 3. Sei $\tau: X \to Y$ *eine holomorphe Abbildung mit zusammenhängenden Fasern von der komplexen Mannigfaltigkeit* X *auf die Riemannsche Fläche* Y. *Ist eine Faser* F *von* τ *singularitätenfrei, kompakt und einfach zusammenhängend, so ist* τ *in allen Punkten von* F *regulär.*

Der Beweis von Satz 3 verläuft analog zum Beweis von Satz 2, sobald man in geeigneter Weise eine Riemannsche Fläche $\hat{Y}$ über Y konstruiert hat. Nach dem Steinschen Faktorisierungssatz[4] können wir wieder annehmen, daß alle Fasern von τ zusammenhängend sind. Daher gehört zu jedem Punkt $q_\varrho \in \in \{q_1, \ldots, q_r\} = \tau(S(\tau))$ eine natürliche Zahl $d_\varrho \geq 2$, die Multiplizität der Faser über q_ϱ. Wir wählen r weitere paarweise verschiedene Punkte $q_1', \ldots, q_r'$ in $Y - \tau(S(\tau))$ und verbinden für jedes ϱ die Punkte q_ϱ und q_ϱ' durch einen Weg S_ϱ, so daß die Wege S_ϱ paarweise punktfremd sind. Sei d das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $d_1, \ldots, d_r$, sei $m_\varrho = d/d_\varrho$ und bezeichne $Y^1, \ldots, Y^d$ d Exemplare von Y mit den entsprechenden Wegen S_ϱ^δ und den Punkten q_ϱ^δ und $q_\varrho'^\delta$ $(\varrho = 1, \ldots, r, \delta = 1, \ldots, d)$. Nun werden die Flächen Y^δ über den Wegen S_ϱ derart verheftet, daß q_ϱ^δ genau dann mit q_ϱ^γ (und ebenso $q_\varrho'^\delta$ mit $q_\varrho'^\gamma$) identifiziert wird, wenn $\delta - \gamma$ ein ganzzahliges Vielfaches von m_ϱ ist. Sei $\hat{Y}$ die so aus $Y^1, \ldots, Y^d$ entstandene Fläche.[6] Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen m_ϱ ist 1, daher gibt es ganze Zahlen $g_1, \ldots, g_r$, so daß $1 = g_1 m_1 + \cdots + g_r m_r$; daraus folgt sofort, daß $\hat{Y}$ zusammenhängend ist. Durch Einführung von lokalen Koordinaten wird nun $\hat{Y}$ eine Riemannsche Fläche über Y mit einer Überlagerungsabbildung $\eta: \hat{Y} \to Y$, die über jedem Punkt q_ϱ und q_ϱ' m_ϱ Verzweigungspunkte der Ordnung $d_\varrho - 1$ besitzt.

Ist $\hat{X}$ die Normalisierung von $\tilde{X} = \{(p, \hat{q}) \in X \times \hat{Y} \mid \tau(p) = = \eta(\hat{q})\}$, so induzieren die Projektionen von $X \times \hat{Y}$ auf X bzw. $\hat{Y}$ holomorphe Abbildungen $\xi: \hat{X} \to X$ bzw. $\hat{\tau}: \hat{X} \to \hat{Y}$. Sei $\hat{p} \in \hat{X}$, $\hat{q} = \hat{\tau}(\hat{p})$, $q = \eta(\hat{q})$ und $p = \xi(\hat{p})$; nach Satz 1 ist es möglich, lokale Koordinaten (z, x) in $U(p)$, y in $V(q)$ und $\hat{y}$ in $\hat{V}(\hat{q})$ so zu wäh-

[6] Zu der hier durchgeführten Konstruktion vgl. z. B. [1], Kapitel 5.

len, daß folgendes gilt: je nachdem, ob $q \notin \{q_1, \ldots, q_r, q'_1, \ldots, q'_r\}$, $q = q_\varrho$ oder $q = q'_\varrho$, ist $\tilde{X}$ in $U \times \hat{V}$ definiert durch die Gleichung $z = \hat{y}$, $z^{d_\varrho} = \hat{y}^{d_\varrho}$ oder $z = \hat{y}^{d_\varrho}$. Daraus folgt, daß in allen drei Fällen $\hat{\tau}$ in $\hat{p}$ regulär und in den beiden ersten Fällen ξ in $\hat{p}$ lokal biholomorph ist. Falls $q = q'_\varrho$, hat ξ in p einen Verzweigungspunkt der Ordnung $d_\varrho - 1$, ξ ist also eine (im allgemeinen verzweigte) analytische Überlagerung.

Literatur

[1] Behnke, H. und F. Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 2. Aufl., Springer, Berlin 1962.

[2] Brieskorn, E.: Über die Auflösung gewisser Singularitäten holomorpher Abbildungen. Erscheint demnächst.

[3] Ehresmann, Ch.: Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de Topologie, 29–55, Bruxelles 1950.

[4] Grauert, H. und R. Remmert: Komplexe Räume. Math. Ann. 136, 245–318 (1958).

[5] Osgood, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Band, 1. Lieferung, 2. Auflage, Teubner, Leipzig 1929.

[6] Remmert, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. 133, 328–370 (1957).

[7] Stein, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. 132, 63–93 (1956).