BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1962

MÜNCHEN 1963

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Maßstabsgerechte Änderung geodätischer Krümmungen bei Flächenabbildungen

Von **Frank Löbell** in München

Vorgelegt am 2. März 1962

Schon in früherer Zeit wurden auf verschiedenen Wegen die Änderungen studiert, die eine beliebig vorgegebene Transformation einer Fläche bei den geodätischen Krümmungen der in ihr liegenden Kurven zur Folge hat.[1] Dabei wurde jedoch bis jetzt, wie es scheint, nie auf den Umstand Rücksicht genommen, daß ein Teil dieser Wirkung allein den Längenänderungen der Linienelemente zuzuschreiben ist. Nun kann in gewissen Fällen die Zielsetzung einer Untersuchung dazu zwingen, gerade diesen Anteil als unwesentlich anzusehen. Was hat aber dann als wesentlicher Bestandteil der Änderung zu gelten?

Im folgenden soll versucht werden, natürlich erscheinende Möglichkeiten einer Trennung der verschiedenen Einflüsse zu finden und einige dabei auftauchende Fragen zu beantworten.

1. Ein gegebenes Flächenstück $\mathfrak{F}$ werde nach einem gegebenen Gesetz punktweise in ein Flächenstück $\bar{\mathfrak{F}}$ transformiert; die dadurch definierte *Abbildung* $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ sei überall regulär.

Für ein Krümmungselement der Fläche $\mathfrak{F}$ an der Stelle P von der Richtung $\mathfrak{t}$ und mit der Seitenkrümmung g habe der *Maßstab der Flächenabbildung* $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ den Wert m; bekanntlich ist der lineare Abbildungsmaßstab eine Funktion des Linienelementes $(P, \mathfrak{t})$. Das *Krümmungselement* $(P, \mathfrak{t}, g)$ gehe vermöge der Abbildung in $(\bar{P}, \bar{\mathfrak{t}}, \bar{g})$ über, deren vorausgesetzte Regularität bewirkt, daß $m \neq 0$ ist.

Wir denken uns nun für den Augenblick die Flächenumgebung des Punktes P auf $\mathfrak{F}$ einer *Ähnlichkeitstransformation* vom kon-

---

[1] Einige Literaturangaben finden sich in des Verfassers Note „Der Einfluß einer Flächentransformation auf die geodätischen Krümmungen." Diese Sitz.-ber. 1957, S. 15 ff.

stanten Maßstab $m_0 = m(P, \mathfrak{t})$ unterworfen; dabei geht, wie unmittelbar zu erkennen, der Wert g in den Wert $g : m_0 = g : m$ über. Dieser Bestandteil der Änderung von g ist es, den wir, ganz unabhängig davon, wie erheblich oder unerheblich er sein mag, als unwesentlich ansehen wollen; das bedeutet, daß wir uns in erster Linie für den restlichen Unterschied von $\bar{g}$ gegenüber der Größe $g : m$ interessieren. Den unter diesem Gesichtspunkt als wesentlich zu betrachtenden Anteil an der vollen oder „*wahren Änderung*" $\bar{g} - g$ von g, die Differenz

$$\bar{g} - g : m \tag{1}$$

wollen wir als den dem Einfluß des Abbildungsmaßstabes m Rechnung tragenden Beitrag kurz die „*maßstabsgerechte Änderung*" der geodätischen Krümmung vermöge der Flächenabbildung $\mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$ nennen. Ist diese *Änderung null*, so wollen wir sagen, die Seitenkrümmung *transformiere sich maßstabsgerecht.*

Als noch zweckmäßiger wird es sich in manchen Fällen erweisen, zunächst nach dem Wert zu fragen, den die geodätische Krümmung eines das Linienelement $(P, \mathfrak{t})$ berührenden Krümmungselementes auf $\mathfrak{F}$ haben müßte, um durch maßstabsgerechte Transformation in $\bar{g}$ überzugehen: das ist nach unserer Erklärung der Wert $m\bar{g}$. Wir wollen $m\bar{g}$ als den maßstabsgerecht reduzierten Wert der bei der Abbildung $\mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$ aus g hervorgehenden Krümmungsgröße $\bar{g}$ bezeichnen; dementsprechend möge die Abweichung dieses Wertes von g,

$$m\bar{g} - g, \tag{2}$$

die maßstabsgerecht reduzierte oder, wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, einfach die „*reduzierte Änderung*" von g vermöge $\mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$ heißen.

Die maßstabsgerechte und die reduzierte Änderung einer Seitenkrümmung unterscheiden sich voneinander ersichtlich nur durch den Faktor m, bei dem man sich gegenwärtig halten muß, daß er im allgemeinen von einer Richtung zur andern wechselt. Diese Änderungen können daher nur beide zugleich verschwinden.

Je nach dem Standpunkt, den man einzunehmen gedenkt, wird man den einen oder den andern Ausdruck bevorzugen. Dies sei an einem naheliegenden Beispiel erläutert: Bei der Beschäftigung mit einer Landkarte wird man sich weniger für die wahren Änderungen der Krümmungsgrößen interessieren als für die als bedeutungsvoller empfundenen maßstabsgerechten oder, meist noch mehr, für die reduzierten; für jene nämlich, wenn man die Krümmungen der Bildkurven auf der Karte vergleichend ins Auge fassen, für diese aber, wenn man die Veränderungen der Seitenkrümmungen infolge des besonderen Gesetzes des vorliegenden Kartenentwurfs auf der Erdoberfläche selbst beobachten will.

Damit die maßstabsgerechte bzw. die reduzierte Änderung mit der wahren übereinstimme, muß $g = 0$ bzw. $\bar{g} = 0$ oder $m = 1$ sein.

Die zu $\mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$ *inverse Abbildung* $\bar{\mathfrak{F}} \rightarrow \mathfrak{F}$ besitzt den Abbildungsmaßstab $\bar{m} = 1 : m$; da sie $\bar{g}$ in g überführt, hat die maßstabsgerechte Änderung von $\bar{g}$ vermöge $\bar{\mathfrak{F}} \rightarrow \mathfrak{F}$ den Wert $g - \bar{g} : m^{-1} = -(m\bar{g} - g)$ und die reduzierte Änderung von $\bar{g}$ vermöge $\bar{\mathfrak{F}} \rightarrow \mathfrak{F}$ den Wert $m^{-1}g - \bar{g} = -(\bar{g} - g : m)$, in Worten:

Die maßstabsgerechte bzw. reduzierte Änderung einer Seitenkrümmung infolge einer Flächenabbildung ist gleich der negativen reduzierten bzw. maßstabsgerechten Änderung der Bildkrümmung infolge der inversen Abbildung.

2. Nun stellt sich uns die Aufgabe, die eingeführten *Änderungswerte*, wie sie sich aus einer vorgelegten Flächenabbildung ergeben, *zu bestimmen*; dies möge im folgenden für die reduzierte Änderung durchgeführt werden.

Zu dem Zweck denken wir uns von nun an auf den Flächen $\mathfrak{F}$ und $\bar{\mathfrak{F}}$ ein Paar von „Hauptnetzen“, d. h. einander entsprechenden orthogonalen Netzen als ein Paar korrespondierender Bezugsysteme zugrunde gelegt; es ist bekannt, daß es im allgemeinen genau ein derartiges Paar, das stets reell ist, gibt und daß nur im Falle der Winkeltreue der Abbildung eines der Netze beliebig angenommen werden kann. Die Bogenlängen der Netzlinien seien s_1 und s_2, die sie berührenden Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$, die für ihre Richtungen geltenden Abbildungsmaßstäbe, die „Hauptmaßstäbe“, $m_1 > 0$ und $m_2 > 0$; es sei daran erinnert, daß, wenn φ der Richtungswinkel des Einheitsvektors $\mathfrak{t}$ gegen $\mathfrak{t}_1$, d. h.

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \cos\varphi + \mathfrak{t}_2 \sin\varphi \tag{3}$$

ist, für den Maßstab $m(P, \mathfrak{t})$ gilt:

$$m^2 = m_1^2 \cos^2\varphi + m_2^2 \sin^2\varphi. \tag{4}$$

Schon bei einer früheren Gelegenheit wurde gezeigt, daß sich $\bar{g}$ in der folgenden Gestalt durch g ausdrücken läßt:[2]

$$\bar{g} = (m_1 m_2 g + \Phi) : m^3. \tag{5}$$

Hier bedeutet Φ eine kubische Form in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, deren Koeffizienten von den Seitenkrümmungen g_1 und g_2 der Netzlinien sowie von den Hauptmaßstäben und ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial m_i}{\partial s_k} = m_{ik}$ abhängen:

$$\Phi = \tag{6}$$

$$\frac{m_1}{m_2}((m_1^2-m_2^2)g_1-m_1m_{12})\cos^3\varphi+\frac{m_2}{m_1}((m_2^2-m_1^2)g_2+m_2m_{21})\sin^3\varphi$$
$$+(2m_1m_{21}-m_2m_{11})\cos^2\varphi\sin\varphi-(2m_2m_{12}-m_1m_{22})\cos\varphi\sin^2\varphi.$$

Nach (2) und (5) wird die *reduzierte Änderung* von g

$$m\bar{g} - g = ((m_1m_2 - m^2)\,g + \Phi) : m^2. \tag{7}$$

Dieser Ausdruck ist ersichtlich wie der auf der rechten Seite von (5) stehende eine *Biegungsinvariante*. Er enthält nicht mehr, wie der aus (5) hervorgehende für die wahre Änderung $\bar{g}-g$, die Irrationalität m; vor allem aber besitzt er die wesentliche Eigenschaft, eine *äquiforme Invariante* im folgenden Sinn zu sein:

---

[2] Siehe die in Fußnote 1 zitierte Arbeit S. 19.
Die Form Φ hängt aufs Engste mit dem „*Tensor der Relativkrümmung bezüglich der Flächenabbildung*" zusammen, den A. Marussi eingeführt hat: Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII, Ser. 16 (1954), p. 482.

Läßt man auf die Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ eine Ähnlichkeitstransformation mit dem beliebigen Änderungsmaßstab $\mu = \text{const}$ oder eine mit einer solchen verbundene Verbiegung folgen, so werden für das Folgeprodukt dieser Abbildungen die Größen m_1, m_2, m und Φ durch μm_1, μm_2, μm und, wie aus (6) zu erkennen, durch $\mu^2 \Phi$ zu ersetzen sein, woraus folgt, daß der für die neue Abbildung berechnete Ausdruck auf der rechten Seite von (7) sich nicht von dem ursprünglichen unterscheidet. Aber nicht nur hierin dürfte eine Rechtfertigung der eingeführten Begriffsbildungen zu erblicken sein, sondern auch noch in der folgenden Feststellung:

Der Einfluß der Größe von g auf die reduzierte Änderung ist, wie (7) zeigt, dem Werte $(m_1 m_2 - m^2) : m^2$ proportional, der bis auf den wesentlich negativen, zwischen den Extremen $-m_2 : m_1$ und $-m_1 : m_2$ schwankenden Faktor $-m_1 m_2 : m^2$ gleich der „*Verzerrung*" des Linienelementes

$$(8) \qquad (m^2 - m_1 m_2) : m_1 m_2$$

ist, die als ein *Maß für die formändernde Wirkung* der Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ – im Gegensatz zu der *größenändernden*, im *Abbildungsmaßstab* zum Ausdruck kommenden – erklärt werden kann und die, wie es zu wünschen ist, bei winkeltreuer Abbildung für alle Richtungen $\mathfrak{t}$ verschwindet. Der Faktor $(m_1 m_2 - m^2) : m^2$ von g in (7) ist aber selbst, ohne jeden Abstrich, die Verzerrung des Linienelementes vermöge der inversen Abbildung $\bar{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{F}$; denn wir erhalten ihn aus (8), wenn wir dort die Größen m_1, m_2 und m je durch ihren reziproken Wert ersetzen. – Nebenbei bemerkt ergibt sich aus (8) durch Mittelbildung über die Linienelemente durch einen Punkt ein „*Verzerrungsmaß*" für die Abbildung der Umgebung des Punktes,

$$(9) \qquad (m_1 - m_2)^2 : 2 m_1 m_2,$$

dessen Verschwinden, sofern die Voraussetzung $m_1 m_2 > 0$ erfüllt ist, notwendig und hinreichend für das Vorliegen von Winkeltreue an der Stelle ist, und das einen um so größeren Zahlenwert hat, je stärker die Tissot-Ellipse von der Kreisform abweicht.[3]

Ein Blick auf die Beziehung (7) lehrt, daß in einer verzerrungsfreien Richtung – gekennzeichnet durch das Verschwinden von (8) – alle Krümmungsgrößen g der gleichen reduzierten Änderung $\Phi : m_1 m_2$ unterliegen.

Jedes Linienelement, für das $\Phi = 0$ wird, ist, wie aus (5) zu ersehen, ein solches, dem als Träger eines geodätischen Krümmungselementes wieder ein derartiges, d. h. ein Element verschwindender Seitenkrümmung entspricht, und umgekehrt; die reduzierte Änderung verschwindet in diesem Fall dadurch, daß g und $\bar{g}$ zugleich null werden. Die Bedeutung des Verschwindens von Φ für eine Tangentenrichtung ist also hier die gleiche wie früher, als die wahre Änderung der Krümmungsgrößen den Gegenstand der Untersuchung bildete; die verschiedenen Möglichkeiten des Verschwindens von Φ aber wurden damals schon vollständig diskutiert.[4]

3. Betrachten wir des weiteren zunächst den Sonderfall, daß die Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ *winkeltreu* ist; da hierfür kennzeichnend ist, daß m eine reine Ortsfunktion, folglich, wie oben schon gesagt,

$$m^2 - m_1 m_2 \equiv 0 \tag{10}$$

ist, so gilt nach (7)

$$m\bar{g} - g = \Phi : m^2; \tag{11}$$

wie Ch. M. Schols im Jahre 1886 gezeigt hat, ist aber in diesem Falle[5] nach (6)

$$\Phi : m^2 = -\frac{\partial\, ln\, m}{\partial\, s^*}, \tag{12}$$

[3] Über Verzerrungsmaße vgl. des Verfassers Arbeit über „Differentialinvarianten bei Flächenabbildungen." Diese Sitz.-ber. 1943, S. 232.

Eine Verzerrungsgröße, die für die inverse Abbildung bis aufs Vorzeichen den gleichen Wert besitzt, wäre $(m^2 - m_1 m_2) : m\sqrt{m_1 m_2}$.

[4] Siehe die in Fußnote 1 angeführte Arbeit S. 22 f.

[5] Vgl. die in Fußnote 1 angegebene Arbeit S. 20.

wo $\frac{\partial}{\partial s^*}$ die geometrische Ableitung in der Richtung $\mathfrak{t}^*$ bedeutet, die aus $\mathfrak{t}$ durch Drehung um $+\frac{\pi}{2}$ hervorgeht.

Aus (11) in Verbindung mit (12) erkennen wir, daß bei Vorliegen von Winkeltreue, sofern die Maßstabsfunktion m nicht eine Konstante auf $\mathfrak{F}$ ist, für alle zu den *Linien* $m = const$ senkrechten Krümmungselemente $(P, \mathfrak{t}', g')$ und nur für diese die maßstabsgerechte und die reduzierte Änderung der geodätischen Krümmung, gleichgültig, welche Größe diese hat, verschwinden. Demnach bilden die *orthogonalen Trajektorien* dieser Linien eine Schar von Kurven, und zwar die einzige, deren geodätische Krümmungen sich bei der Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ maßstabsgerecht transformieren.

Wie groß ist nun aber der Wert g' der *Seitenkrümmung speziell für eine solche Kurve?* Dies finden wir am einfachsten, wenn wir die bekannte *Integrabilitätsbedingung für Ortsfunktionen*[6] auf m anwenden:

$$(13) \qquad \frac{\partial}{\partial s^*}\frac{\partial m}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial m}{\partial s^*} - g\frac{\partial m}{\partial s} - g^*\frac{\partial m}{\partial s^*} = 0.$$

Verstehen wir unter $\frac{\partial}{\partial s}$ die Ableitung in der Richtung $\mathfrak{t}$ der durch den gewählten Standpunkt gehenden Niveaulinie $m =$ const, so wird $\frac{\partial m}{\partial s}$ in allen Punkten der Fläche $\mathfrak{F}$ null, während $\frac{\partial m}{\partial s^*} = \frac{\partial m}{\partial s'}$ auf Grund unserer Voraussetzung, daß m auf $\mathfrak{F}$ nicht konstant sein soll, nicht identisch verschwinden kann; es wird daher

$$(14) \qquad g' = -\frac{\partial}{\partial s}\, ln\, \frac{\partial m}{\partial s'}.$$

Dies gilt übrigens unabhängig von der besonderen Bedeutung, die die Funktion m hier hat, die, ohne daß sich der Wert des rechts stehenden Ausdrucks dadurch ändert, durch eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion von m ersetzt werden kann. Nach (12) kann deshalb hier auch geschrieben werden:

---

[6] Siehe etwa Cesàro-Kowalewski, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Leipzig und Berlin, 1926[2], S. 198 f. (Dort wird eine der geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien mit anderem Vorzeichen verwendet.)

$$g' = -\frac{\partial}{\partial s} \ln \Phi, \tag{15}$$

wobei zu beachten ist, daß hier Φ den Wert der Linienelementfunktion Φ für die Tangentenrichtung der Kurve $m = \text{const}$ bedeutet, also eine Ortsfunktion auf der Fläche ist.

Nach (14) verschwindet g' identisch dann und nur dann, wenn die Linien $m = \text{const}$ geodätische Parallelkurven sind; die ihnen auf $\bar{\mathfrak{F}}$ entsprechenden Linien $\bar{m} = 1 : m = \text{const}$ müssen die gleiche Eigenschaft besitzen, da nach dem Gesagten für ihre Orthogonaltrajektorien ebenfalls $\bar{g}' = 0$ sein muß. Als Beispiel für dieses Verhalten seien die Möbiusschen Kreisverwandtschaften angeführt, bei denen die Linien gleichen Abbildungsmaßstabes dasjenige Büschel konzentrischer Kreise bilden, dem wieder ein solches Büschel entspricht.

4. Die im vorigen Abschnitt angestellten Überlegungen wekken die Erinnerung an allgemeine Untersuchungen von Herrn R. Sauer über diejenigen Kurven einer Fläche, deren geodätische Krümmungen bei einer vorgegebenen Abbildung auf eine andere Fläche an jeder Stelle ihren Wert behalten;[7] wir werden dadurch zu der, unserem Standpunkt entsprechenden, analogen Frage angeregt:

Existieren immer, wenn eine beliebige Flächenabbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ gegeben ist, auf $\mathfrak{F}$ *Kurven, deren geodätische Krümmungen sich* vermöge dieser Abbildung an jeder Stelle *maßstabsgerecht transformieren?*

Vorweg bemerken wir, daß, wenn es Kurven mit dieser Eigenschaft gibt, die Bildkurven auf $\bar{\mathfrak{F}}$ und die Originalkurven auf $\mathfrak{F}$ in derselben Beziehung bezüglich der inversen Abbildung zueinander stehen, da $\bar{g} = g : m$ infolge der Zuordnung $\bar{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{F}$ bei maßstabsgerechter Transformation in $\bar{g} : m^{-1} = m\bar{g} = g$ übergeht.

Für sämtliche Linienelemente der gesuchten Kurven muß $m\bar{g} - g = 0$ sein; daher folgt für die Werte ihrer Seitenkrümmungen aus (7)

[7] Robert Sauer, „Geodätisch invariante Kurven bei beliebigen Abbildungen von Flächen." Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 40 (1960), S. 47 ff.

$$g = \Phi : (m^2 - m_1 m_2). \tag{16}$$

Damit der Ausdruck auf der rechten Seite sinnvoll sei, ist hier der soeben behandelte Fall der Winkeltreue auszuschließen, d. h. $m_1 \neq m_2$ vorauszusetzen.

Da nach Bonnet und Liouville

$$g = g_1 \cos\varphi + g_2 \sin\varphi + \frac{d\varphi}{ds} \tag{17}$$

ist, finden wir als charakteristische Bedingung, der die Kurven, nach denen wir fragten, genügen müssen:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \Phi : (m^2 - m_1 m_2) - g_1 \cos\varphi - g_2 \sin\varphi; \tag{18}$$

dies ist eine Differentialgleichung, die bei Einführung von gemeinsamen Parametern auf den Flächen, wie ohne weiteres zu sehen, von der 2. O. in diesen Variabeln wird. Es läuft somit, wie man übrigens auch unmittelbar aus (18) erkennen kann, im allgemeinen durch jedes Linienelement von $\mathfrak{F}$ genau eine Kurve der verlangten Art;[8] allerdings gibt es, darauf sei jetzt schon hingewiesen, Fälle, in denen die Integralkurven der Gleichung (18) noch nicht die vollständige Lösung der Aufgabe darstellen.

Natürlich sind hierbei die Linienelemente besonders zu beachten, für die der Nenner

$$m^2 - m_1 m_2 = (m_1 - m_2)(m_1 \cos^2\varphi - m_2 \sin^2\varphi) = 0 \tag{19}$$

wird, d. h. die *unverzerrt* bleibenden, deren es in jedem Flächenpunkt zwei, untereinander verschiedene, stets reelle, zu den Hauptrichtungen symmetrisch gelegene gibt; das sind zugleich diejenigen Richtungspaare, die sich mit extrem differierenden, supplementären eingeschlossenen Winkeln entsprechen. In diese münden im allgemeinen solche Lösungskurven ein, die im Berührpunkt eine Singularität mit unendlicher Krümmung, im einfachsten Fall einen Rückkehrpunkt besitzen.

---

[8] Das ist das gleiche Verhalten wie bei den von Herrn Sauer studierten geodätisch invarianten Kurven; vgl. die in der vorigen Fußnote zitierte Arbeit, S. 48, Nr. 4.

Es kann aber auch vorkommen, daß die Form Φ für eines dieser Linienelemente oder sogar für beide ebenfalls verschwindet, und zwar dadurch, daß sie einen der in (19) steckenden Linearfaktoren $\sqrt{m_1}\cos\varphi \mp \sqrt{m_2}\sin\varphi$ oder beide enthält. Die Bedingung dafür erhalten wir aus (6), wenn wir den Wert von Φ für die Richtung $\operatorname{tg}\bar{\varphi} = \sqrt{m_1 : m_2}$ gleich null setzen:[9]

$$(20)\quad ((m_1^2 - m_2^2)\,g_1 - m_1 m_{12} - 2m_2 m_{12} + m_1 m_{22})\sqrt{m_1} + ((m_2^2 - m_1^2)\,g_2 + m_2 m_{21} + 2\,m_1 m_{21} - m_2 m_{11})\sqrt{m_2} = 0.$$

Enthält Φ den quadratischen Faktor $m_1\cos^2\varphi - m_2\sin{}^2\varphi$, so gilt demnach, wie nach einiger Umformung zu finden und leicht zu verifizieren ist:

$$(21)\quad (m_1^2 - m_2^2)\,g_1 + m_1^3\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{m_1+m_2}{m_1^2} = (m_2^2 - m_1^2)\,g_2 - m_2^3\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{m_1+m_2}{m_2^2} = 0;$$

hier werden die Koeffizienten von Φ unabhängig von g_1 und g_2, hängen also nur noch von den Elementen der Flächenabbildung, aber nicht mehr von den metrischen Eigenschaften der Bezugsnetze ab:

$$(22)\quad \Phi = -(m_1\cos^2\varphi - m_2\sin^2\varphi)\left(\frac{m_1^3}{m_2}\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{m_2}{m_1^2}\cdot\cos\varphi + \frac{m_2^3}{m_1}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{m_1}{m_2^2}\cdot\sin\varphi\right).$$

Die Linienelementfunktion $\Phi : (m^2 - m_1 m_2)$ besitzt jetzt, wie wir sehen, ein lineares Verteilungsgesetz, und (18) hat vollkommen den Charakter der Differentialgleichung der geodätischen Linien.

Nun brauchen wir aber nur noch einmal die Beziehung (7) zu betrachten, um zu erkennen, daß noch nicht sämtliche Lösungsmöglichkeiten erschöpft sind. Wenn überall auf $\mathfrak{F}$, wie in den soeben erörterten Fällen, für eine (19) befriedigende Richtung verschwindender Verzerrung oder für beide $\Phi = 0$ ist, verschwindet allein dadurch schon die reduzierte Änderung *jeder* Krümmungs-

---

[9] Eine ähnliche Überlegung wird durchgeführt in der in Fußnote 1 angeführten Arbeit S. 20 f.

größe in diesen Richtungen. Das bedeutet aber, daß in diesem Fall eine Schar oder die Doppelschar der *Linien ohne Verzerrung*, die durch eine mit (19) gleichbedeutende Differentialgleichung 1. O. in Parametern bestimmt sind, zur Gesamtheit der Lösungskurven gehört. Dies ist die Tatsache, auf die oben schon aufmerksam gemacht wurde.

Besondere Beachtung verdient in diesem Zusammenhang der durch $\Phi \equiv 0$ gekennzeichnete Sonderfall der *geodätischen Abbildungen*; handelt es sich um eine solche mit nicht identisch verschwindenden Verzerrungen, so stimmt die Differentialgleichung (18) mit derjenigen der geodätischen Linien völlig überein, wie selbstverständlich zu erwarten war, weil dies im Begriff der geodätischen Abbildung liegt.

Auch hier können wir uns die Frage stellen, wie groß die speziellen Werte $\tilde{g}$ der *Seitenkrümmungen der verzerrungsfreien Linien* sind; die Antwort kann auf verschiedene Weisen gefunden werden, besonders einfach mit Hilfe der Bonnet-Liouvilleschen Formel (17): Weil hier durch (19) φ als Ortsfunktion auf $\mathfrak{F}$ festgelegt ist, wird

$$(23) \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \cos\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \sin\varphi = \frac{\partial \sin\varphi}{\partial s_1} - \frac{\partial \cos\varphi}{\partial s_2},$$

mithin

$$(24) \qquad g = \left(g_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right) \cos\varphi + \left(g_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right) \sin\varphi,$$

folglich mit den aus (19) zu berechnenden Werten für $\cos\tilde{\varphi}$ und $\sin\tilde{\varphi}$:

$$(25) \quad \tilde{g} = \left(g_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right) \sqrt{m_2 : (m_1 + m_2)} \pm \left(g_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right) \sqrt{m_1 : (m_1 + m_2)}.$$

Nur wenn eine geodätische Abbildung mit Winkeltreue verbunden ist, transformiert sich nach (7) überhaupt *jedes* Krümmungselement maßstabsgerecht; in Übereinstimmung damit ist denn auch in diesem Falle nach (12) über die ganze Fläche m konstant.

Es kann durchaus vorkommen, daß *verzerrungsfreie Linien zugleich Integralkurven* von (18) sind, wie das Beispiel der Parallelprojektion einer Ebene in eine nicht zu ihr parallele Ebene zeigt; andererseits beweisen Beispiele wie etwa der gnomonische Kartenentwurf oder die Zentralprojektion einer Ebene in eine andere, gegen sie geneigte, daß das nicht die Regel ist. Die allgemeine Bedingung dafür, daß dieses Vorkommnis für das ganze Netz der verzerrungsfreien Kurven eintrifft, läßt sich aus (16), (19), (22) und (25) gewinnen.

Zum Schluß möge noch die Frage aufgeworfen werden, ob etwa eine auf $\mathfrak{F}$ gegebene Richtungsübertragung auf eine unseren Gedankengängen gemäße Art in eine Richtungsübertragung auf $\bar{\mathfrak{F}}$ transformiert werden könnte.

Darauf ist zu sagen: So viele Möglichkeiten eines solchen Prozesses an sich auch denkbar sein mögen, es gibt doch nur ein – bei einer früheren Gelegenheit[10] entwickeltes – Verfahren, einer Richtungsübertragung auf $\mathfrak{F}$ eine solche auf $\bar{\mathfrak{F}}$ derart entsprechen zu lassen, daß durch diese jedes Linienelement auf $\bar{\mathfrak{F}}$ in dasjenige übergeführt wird, das dem durch die Übertragung auf $\mathfrak{F}$ beförderten vermöge der Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ entspricht. Nur wenn man bereit ist, auf diese Forderung zu verzichten, könnte man etwa untersuchen, ob es sich lohnt, die Beziehungen zwischen Richtungsübertragungen zu studieren, die durch die Kennfunktionen Ψ auf $\mathfrak{F}$ und $\overline{\Psi} = (m_1 m_2 \Psi + \Phi) : m^2$ auf $\bar{\mathfrak{F}}$ definiert sind.

[10] Vgl. des Verfassers Note über „Gekoppelte Richtungsübertragungen auf Flächenpaaren.“ Diese Sitz.-ber. 1960, S. 263 ff.