BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960

MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Elementare fastautomorphe Funktionen

Von Wilhelm Maak in Göttingen

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 7. Oktober 1960

Es seien $f_1(\tau), \ldots, f_s(\tau)$ in der oberen τ-Halbebene ($\tau = x + iy$, $y > 0$) eindeutige analytische Funktionen, welche im Fundamentalbereich Ω (der Punkt $i\infty$ eingeschlossen) der inhomogenen Modulgruppe Γ höchstens endlich viel polartige Singularitäten besitzen. Der durch diese Funktionen aufgespannte s-dimensionale Raum $\mathfrak{M}$ sei gegenüber Γ invariant. Die durch

$$f_\sigma(L\tau) = \sum_{\varrho=1}^{s} D_{\varrho\sigma}(L)\, f_\varrho(\tau) \qquad L \in \Gamma$$

erklärten Matrizen $D(L) = \{D_{\varrho\sigma}(L)\}$ bilden dann eine Darstellung von Γ. Wenn die $D_{\varrho\sigma}(L)$ beschränkte Funktionen von L sind, so besteht $\mathfrak{M}$ nur aus fastautomorphen Funktionen ([1] § 3 Satz 3). In diesem Fall darf angenommen werden, daß $D(L)$ eine unitäre Darstellung von Γ ist; es genügt, eine Basistransformation vorzunehmen, um dies zu erzwingen. Wenn $D(L)$ irreduzibel ist, so wollen wir die Funktionen $f(\tau) \in \mathfrak{M}$ elementare fastautomorphe Funktionen nennen. Es war das Hauptergebnis der Abhandlung über fastautomorphe Funktionen ([1] § 5 Satz 2), daß jede fastautomorphe Funktion durch Linearkombinationen von elementaren fastautomorphen Funktionen (außer in der unmittelbaren Nähe von Singularitäten) gleichmäßig beliebig genau approximiert werden kann.

Verfolgt man den Gedanken, die fastautomorphen Funktionen bei der Untersuchung von Darstellungen der Modulgruppe in Anwendung zu bringen, so ist die Frage bedeutungsvoll, ob es zu jeder irreduziblen unitären Darstellung $D(L)$ einen Darstellungsmodul, bestehend aus elementaren fastautomorphen Funktionen gibt. Das Problem hängt aufs engste zusammen mit dem sogenannten Riemannschen Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In der Abhandlung über ζ-fuchs'-sche Funktionen hat Poincaré [2] den Fall von Grenzkreisgruppen mit Grenzkreis $|z| = 1$ behandelt. Sein Ansatz, zu vorgegebenen Darstellungen entsprechende Darstellungsmoduln, bestehend aus analytischen Funktionen, zu konstruieren, ist wohlbekannt. Er läßt sich aber nicht unmittelbar auf den Fall der Modulgruppe übertragen. Mir ist keine Veröffentlichung bekannt geworden, die diesen Gegenstand explizit behandelt. Vor allem im Hinblick auf die Abhandlung über fastautomorphe Funktionen mag es deshalb wohl von Interesse sein, daß ein durch die Poincaréschen Untersuchungen angeregter, besonders auf den Fall der Modulgruppe zugeschnittener Ansatz es gestattet, die Frage nach der Existenz elementarer fastautomorpher Funktionen zu vorgegebener Darstellung sehr einfach zu beantworten. In den folgenden Zeilen wird dieser Ansatz mitgeteilt.

Satz: Es bedeute $D(M)$ eine unitäre irreduzible Darstellung der (inhomogenen) Modulgruppe Γ. Die Matrix $D(U)$ mit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ besitze den Eigenwert $e^{-\frac{2\pi i k}{12}}$ mit k reell > 2 und den entsprechenden Eigenvektor $\mathfrak{v} \neq 0$. Bestimmt man dann zu jedem Paar ganzer Zahlen m, n mit $(m, n) = 1$ eine Modulsubstitution $L = \begin{pmatrix} n & -b \\ -m & a \end{pmatrix}$, so kann man folgende Reihe bilden, deren Summanden von τ abhängige Vektoren sind:

$$\mathfrak{f}(\tau) = \sum_{(m,n)=1} \Delta^{-\frac{k}{12}} (L^{-1}\tau)\, D(L)\, \mathfrak{v}. \tag{1}$$

Die Komponenten des Summenvektors

$$\mathfrak{f}(\tau) = \begin{pmatrix} f_1(\tau) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_s(\tau) \end{pmatrix}$$

sind dann linearunabhängige elementare fastautomorphe Funktionen. Sie spannen wegen

$$\mathfrak{f}(M\tau) = D(M)\, \mathfrak{f}(\tau) \qquad M \in \Gamma \tag{2}$$

einen zu $D(M)$ gehörigen Darstellungsmodul auf.

Anmerkung: Die Diskriminante $\Delta(\tau)$ der Theorie der Modulfunktionen verschwindet in der oberen τ-Halbebene nirgends außer in $i\infty$. Deshalb ist $\Delta^{-\frac{k}{12}}(\tau) = e^{-\frac{k}{12}\log\Delta(\tau)}$ eine eindeutige Funktion, wenn man sich an irgendeiner Stelle τ für eine Bestimmung des $\log\Delta(\tau)$ entschieden hat. In der Summe (1) hat man in allen Summanden dieselbe Funktion $\Delta^{-\frac{k}{12}}(\tau)$ zu verwenden.

Beweis: Wir benötigen folgende Eigenschaften der Funktion $\Delta(\tau)$. Es ist

$$\Delta^{\alpha}(U\tau) = \Delta^{\alpha}(\tau+1) = e^{2\pi i\alpha}\Delta^{\alpha}(\tau) \qquad \alpha \text{ reell} \tag{3}$$

$$|\Delta^{\alpha}(M\tau)| = |\Delta^{\alpha}(\tau)|\cdot|c\tau+d|^{12\alpha} \quad \alpha \text{ reell},\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma. \tag{4}$$

1. Wir zeigen zunächst: Die einzelnen Summanden in der Summe (1) sind durch m, n eindeutig bestimmt. Sei nämlich

$$L = \begin{pmatrix} n & -b \\ -m & a \end{pmatrix} \qquad L_1 = \begin{pmatrix} n & -b_1 \\ -m & a_1 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$L^{-1}L_1 = \begin{pmatrix} 1 & b\,a_1 - a\,b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$L_1 = L\,U^q \qquad q = b\,a_1 - a\,b_1.$$

Unter Benutzung von (3) und von

$$D(U)\,\mathfrak{v} = e^{-\frac{2\pi i k}{12}}\,\mathfrak{v}$$

folgt hieraus

$$\begin{aligned}\Delta^{-\frac{k}{12}}(L_1^{-1}\tau)\,D(L_1)\,\mathfrak{v} &= \Delta^{-\frac{k}{12}}(U^{-q}L^{-1}\tau)\,D(L\,U^q)\,\mathfrak{v} \\ &= e^{\frac{2\pi i k q}{12}}\,\Delta^{-\frac{k}{12}}(L^{-1}\tau)\,D(L)\,D(U^q)\,\mathfrak{v} \\ &= \Delta^{-\frac{k}{12}}(L^{-1}\tau)\,D(L)\,\mathfrak{v}.\end{aligned}$$

2. Es sei nun $M \in \Gamma$ eine beliebige feste Modulsubstitution. Ersetzt man in (1) alle L durch $L' = ML$, so bedeutet dies eine Permutation der Summanden. Wenn nämlich

$$L' = \begin{pmatrix} n' & -b' \\ -m' & a' \end{pmatrix},$$

so ist

$$\begin{pmatrix} n' \\ -m' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung der Zahlenpaare m, n auf Zahlenpaare m', n' ist umkehrbar eindeutig, weil auch $M^{-1} \in \Gamma$.

3. Multipliziert man die Reihe (1) gliedweise mit $\Delta^{\frac{k}{12}}(\tau)$, so entsteht eine Reihe, die für jedes $\delta > 0$ in Ima $\tau > \delta$ absolut und gleichmäßig konvergiert. In der Tat ist wegen (4)

$$\sum_{(m,n)=1} \frac{|\mathfrak{v}|}{|m\tau + n|^k} \tag{5}$$

eine Majorante für die betreffende Reihe. Bekanntlich konvergiert (5) in dem angegebenen Gebiet gleichmäßig, wenn $k > 2$ ist.

4. Es ist wegen 2. und 3.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}(M\tau) &= \sum_{(m,n)=1} \Delta^{-\frac{k}{12}}(L^{-1}M\tau)\, D(L)\, \mathfrak{v} \\
&= \sum_{(m,n)=1} \Delta^{-\frac{k}{12}}((ML)^{-1}M\tau)\, D(ML)\, \mathfrak{v} \\
&= D(M) \sum_{(m,n)=1} \Delta^{-\frac{k}{12}}(L^{-1}\tau)\, D(L)\, \mathfrak{v} \\
&= D(M)\, \mathfrak{f}(\tau),
\end{aligned}$$

und dies ist die Gleichung (2) unseres Satzes.

5. Wir zeigen nun, daß die Komponenten $f_1(\tau), \ldots, f_s(\tau)$ linear unabhängige Funktionen sind. Wären sie linear abhängig, so würden sie einen Raum aufspannen, der vermöge (2) als Darstellungsmodul von Γ gedeutet werden könnte, der aber eine geringere Dimension als s besitzt. Weil $D(M)$ irreduzibel angenommen wurde, kann diese geringere Dimension nach dem Schurschen Lemma nur 0 sein. Es genügt also, nachzuweisen, daß $\mathfrak{f}(\tau)$ nicht identisch verschwindet, um die lineare Unabhängigkeit der $f_1, \ldots, f_s$ gezeigt zu haben. Es ist aber unmittelbar einzusehen, daß

$$\lim_{\tau \to i\infty} \Delta^{\frac{k}{12}}(\tau)\, \mathfrak{f}(\tau) = 2\mathfrak{v}$$

ist und hierin ist $\mathfrak{v} \neq 0$. Der Beweis des Satzes ist beendet.

Literatur:

[1] W. Maak, Fastautomorphe Funktionen. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1959, 289–319.

[2] H. Poincaré, Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes. Acta mathematica 5, p. 209–278; 1884.