BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960

MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über lineare Differentialgleichungen mit reeller unabhängig Variabler

Von Oskar Perron in München

Vorgelegt am 8. Januar 1960

Übersicht

§ 1. Ziel der Arbeit

Wir betrachten die Differentialgleichung

(1)
$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = \varphi_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + \varphi_n(t)\, x,$$

wobei t reell ist. Die Funktionen $\varphi_\nu(t)$ sollen für $t \geqq t_0$ stetig sein und sollen der Bedingung

(2)
$$\lim_{t \to \infty} \varphi_\nu(t) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen; sie dürfen, ebenso wie die Konstanten a_ν, komplexwertig sein. Gesucht werden Eigenschaften einer Lösung x für $t \to \infty$. Ich habe mich mit dieser schon 1885 von *Poincaré* behandelten Frage[1] im Jahr 1913 beschäftigt,[2] bin aber heute in der Lage, die damaligen Resultate auf einem einfacheren Weg zu gewinnen und zugleich etwas mehr zu beweisen, nämlich den

Satz. *Sind* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ *die Wurzeln der Gleichung* $\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ *und ist etwa* $\Re(\varrho_1) \neq \Re(\varrho_\lambda)$ *für* $\lambda = 2, 3, \ldots, n$, *so hat die Gleichung* (1) *mit der Nebenbedingung* (2) *ein Integral* x, *bei welchem*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{x} \frac{d^\nu x}{dt^\nu} = \varrho_1^\nu$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ *ist.*

Wenn nun weiter von den reellen Teilen der ϱ_λ keine zwei einander gleich sind, so wird es hiernach jedem ϱ_λ entsprechend ein Integral x_λ geben, bei welchem

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{x_\lambda} \frac{d^\nu x_\lambda}{dt^\nu} = \varrho_\lambda^\nu \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

ist. Diese n Integrale x_λ bilden dann ein Fundamentalsystem; denn aus $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{x_\lambda} \frac{dx_\lambda}{dt} = \varrho_\lambda$ folgt ja

$$e^{[\Re(\varrho_\lambda) - \varepsilon]t} < |x_\lambda| < e^{[\Re(\varrho_\lambda) + \varepsilon]t},$$

so daß die x_λ für $t \to \infty$ von verschiedener Größenordnung und folglich linear unabhängig sind.

Früher konnte ich den obigen Satz nur beweisen, wenn die schärfere Voraussetzung $\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_\lambda)$ für $\lambda = 2, 3, \ldots, n$ gemacht war. Wenn dann von den reellen Teilen der ϱ_λ keine zwei einander gleich sind, also etwa $\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \cdots > \Re(\varrho_n)$, so hatte ich zunächst nur das Integral x_1. Um die anderen zu gewinnen, war eine Graderniedrigung und eine mühsame Induktion erforderlich, während jetzt alles auf einmal geht.

---

[1] Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. American journal of mathematics, vol. 7 (1885).

[2] Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist, I und II. Journal für die reine und angewandte Mathematik 142 und 143.

§ 2. Erste Hälfte des Beweises

Wir führen die Operatoren

$$D_\lambda = \frac{d}{dt} - \varrho_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

ein. Dann ist[3]

$$\left\{\begin{aligned} D_1 x &= \frac{dx}{dt} - \varrho_1 x, \\ D_2 D_1 x &= \frac{d^2 x}{dt^2} - (\varrho_1 + \varrho_2)\frac{dx}{dt} + \varrho_1 \varrho_2 x, \\ D_3 D_2 D_1 x &= \frac{d^3 x}{dt^3} - (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)\frac{d^2 x}{dt^2} \\ &\quad + (\varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3)\frac{dx}{dt} - \varrho_1\varrho_2\varrho_3 x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Schließlich wird

$$D_n D_{n-1} \ldots D_2 D_1 x = \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x. \tag{5}$$

Das System (4), (5) läßt sich nach $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}$ auflösen:

(6)
$$\frac{d^\nu x}{dt^\nu} = \gamma_{\nu 0} x + \gamma_{\nu 1} D_1 x + \gamma_{\nu 2} D_2 D_1 x + \cdots + \gamma_{\nu\nu} D_\nu D_{\nu-1} \ldots D_1 x \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Auf die Koeffizienten $\gamma_{\nu\mu}$ wird es außer auf $\gamma_{\nu 0}$ nicht genau ankommen; $\gamma_{\nu 0}$ findet man am einfachsten nicht durch algebraische Auflösung, sondern indem man für x die spezielle Funktion $e^{\varrho_1 t}$ in (6) einsetzt; für diese ist $D_1 x = 0$, so daß aus (6) folgt:

$$\varrho_1^\nu e^{\varrho_1 t} = \gamma_{\nu 0} e^{\varrho_1 t}.$$

[3] Die Operatoren D_λ sind vertauschbar; die im Text gewählte Anordnung ist zweckmäßig.

Man hat also

$$\gamma_{\nu 0} = \varrho_1^{\nu}. \tag{7}$$

Nach (5) und (6) läßt sich die Gleichung (1) auch so schreiben:

$$\begin{aligned} &D_n D_{n-1} \dots D_1 x = \\ &= \psi_0(t)\, x + \psi_1(t)\, D_1 x + \cdots + \psi_{n-1}(t)\, D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 x, \end{aligned} \tag{8}$$

wo die $\psi_\nu(t)$ sich linear aus den $\varphi_\mu(t)$ zusammensetzen, so daß gewiß

$$\lim_{t\to\infty} \psi_\nu(t) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n-1). \tag{9}$$

ist. Wir führen nun n unbekannte Funktionen $u_1, u_2, \dots, u_n$ ein, indem wir setzen:[4]

$$\left\{\begin{aligned} D_1 x &= u_1 x, \\ D_2(u_1 x) &= u_2 x, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ D_n(u_{n-1} x) &= u_n x. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Dann ist

$$\left\{\begin{aligned} D_1 x &= u_1 x, \\ D_2 D_1 x &= u_2 x, \\ D_3 D_2 D_1 x &= u_3 x, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ D_n D_{n-1} \dots D_1 x &= u_n x, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

und unsere Differentialgleichung (8) geht nach Division durch x über in

$$u_n = \psi_0(t) + \psi_1(t)\, u_1 + \cdots + \psi_{n-1}(t)\, u_{n-1}. \tag{12}$$

---

[4] Das kann man nicht, wenn x einmal verschwinden sollte. Aber wir wählen irgendeinen Wert t, für den das uns interessierende Integral x nicht verschwindet. Dann bleibt x in einem ganzen Intervall von 0 verschieden. Man kann also in diesem Intervall durch x dividieren und die Funktionen $u_1, u_2, \dots, u_n$ durch (10) definieren. Die weitere Rechnung wird dann ganz von selbst zu der Erkenntnis führen, daß das Intervall sich bis ins Unendliche erstreckt.

Die erste Gleichung des Systems (10) besagt

$$\frac{dx}{dt} = (\varrho_1 + u_1)\, x\,, \tag{13}$$

und die anderen lassen sich wegen

$$0 = D_{\nu+1}(u_\nu x) - u_{\nu+1}x = \frac{d(u_\nu x)}{dt} - \varrho_{\nu+1}(u_\nu x) - u_{\nu+1}x$$

$$= u_\nu \frac{dx}{dt} + x\frac{du_\nu}{dt} - \varrho_{\nu+1}\, u_\nu\, x - u_{\nu+1}\, x$$

$$= u_\nu(\varrho_1 + u_1)\, x + x\frac{du_\nu}{dt} - \varrho_{\nu+1}\, u_\nu\, x - u_{\nu+1}\, x$$

nach Division durch x so schreiben:

$$\frac{du_\nu}{dt} + (\varrho_1 - \varrho_{\nu+1})\, u_\nu = u_{\nu+1} - u_\nu u_1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{14}$$

wobei die für $\nu = n-1$ auftretende Funktion u_n vermittels (12) sich durch $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ ausdrückt.

Wenn wir nun für das System (12), (14) eine Lösung $u_1, \ldots, u_n$ nachweisen können, für welche $\lim\limits_{t\to\infty} u_\nu = 0$ ist, so folgt aus (13) durch Integration

$$x = e^{\varrho_1 t + \int u_1\, dt},$$

also ist x dauernd von 0 verschieden, und es ist

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \varrho_1.$$

Außerdem ist dann nach (11) auch

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{x} D_\nu D_{\nu-1} \ldots D_1 x = \lim_{t\to\infty} u_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

also nach (6), da $\gamma_{\nu 0} = \varrho_1^\nu$ ist, auch

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{x}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} = \varrho_1^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Damit wird dann also unser Satz bewiesen sein.

§ 3. Zweite Hälfte des Beweises

Es handelt sich jetzt nur noch um den Nachweis, daß das System (14), bei dem u_n durch (12) definiert ist, eine Lösung hat, bei der $\lim\limits_{t\to\infty} u_\nu = 0$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ und dann nach (12) von selbst auch für $\nu = n$ ist. Wir suchen eine solche durch sukzessive Approximationen zu gewinnen, indem wir setzen:

$$(15) \qquad \frac{d u_{\nu,\lambda+1}}{dt} + (\varrho_1 - \varrho_{\nu+1})\, u_{\nu,\lambda+1} = u_{\nu+1,\lambda} - u_{\nu,\lambda}\, u_{1,\lambda} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$(16) \qquad u_{n,\lambda} = \psi_0(t) + \psi_1(t)\, u_{1,\lambda} + \cdots + \psi_{n-1}(t)\, u_{n-1,\lambda},$$

ausgehend von einem geeigneten[5] System $u_{\nu,0}$, bei dem $\lim\limits_{t\to\infty} u_{\nu,0} = 0$ ist.

Die Differentialgleichung (15) für die Funktion $u_{\nu,\lambda+1}$ hat das Integral[6]

$$(17) \qquad u_{\nu,\lambda+1} = e^{(\varrho_{\nu+1}-\varrho_1)t} \int (u_{\nu+1,\lambda} - u_{\nu,\lambda}\, u_{1,\lambda})\, e^{(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})t}\, dt \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

wobei wir als untere Integralgrenze im Fall $\Re(\varrho_1 - \varrho_{\nu+1}) > 0$ eine (hinreichend große) endliche Zahl, im Fall $\Re(\varrho_1 - \varrho_{\nu+1}) < 0$ aber ∞ wählen wollen. Wenn nun $\lim\limits_{t\to\infty} u_{\nu,\lambda} = 0$ ist, was für $\lambda = 0$ nach Voraussetzung gewiß zutrifft so folgt aus (17), daß auch $\lim\limits_{t\to\infty} u_{\nu,\lambda+1} = 0$ ist. Denn es ist ja

$$\left| e^{(\varrho_{\nu+1}-\varrho_1)t} \right| \int (u_{\nu+1,\lambda} - u_{\nu,\lambda}\, u_{1,\lambda})\, e^{(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})t}\, dt$$

$$= \frac{\int (u_{\nu+1,\lambda} - u_{\nu,\lambda}\, u_{1,\lambda})\, e^{(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})t}\, dt}{\left| e^{(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})t} \right|} = \frac{\int (u_{\nu+1,\lambda} - u_{\nu,\lambda}\, u_{1,\lambda})\, e^{(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})t}\, dt}{e^{\Re(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})t}},$$

---

[5] Was damit gemeint ist, wird gleich gesagt werden, im Anschluß an die Formel (23).

[6] Es ist keineswegs so, daß die Formel (17) mit der angegebenen unteren Integralgrenze aus (15) folgt; das wäre nur so, wenn wir zu dem Integral noch eine willkürliche Konstante hinzufügen würden. Entscheidend ist aber, daß, umgekehrt, (15) aus (17) folgt. Übrigens gilt ja ähnliches, was aber nicht immer beachtet wird, bei jedem Rechenverfahren zur Auflösung selbst der simpelsten Gleichung.

und bei dem letzten Bruch kann der Limes für $t \to \infty$ sofort nach der Hôpitalschen Regel bestimmt werden[7] und erweist sich als o. Für $\Re(\varrho_1 - \varrho_{\nu+1}) < 0$ haben nämlich Zähler und Nenner den Limes o, für $\Re(\varrho_1 - \varrho_{\nu+1}) > 0$ hat der Nenner den Limes ∞. Somit ist $\lim_{t\to\infty} u_{\nu,\lambda+1} = 0$ zunächst für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, und dann nach (16) mit $\lambda + 1$ an Stelle von λ auch für $\nu = n$. Wir haben also für alle λ

$$\lim_{t\to\infty} u_{\nu,\lambda} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Nun sei ε eine positive Zahl, die nur den später notwendig werdenden Ungleichungen zu genügen braucht:

$$2\varepsilon^2 < |\Re(\varrho_1 - \varrho_{\nu+1})| \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{19}$$

$$3\varepsilon < |\Re(\varrho_1 - \varrho_{\nu+1})| \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{20}$$

$$\varepsilon < 1. \tag{21}$$

Für $t \geqq t_0$, wo t_0 hinreichend groß, ist dann

$$\psi_\nu(t) < \frac{\varepsilon^{2(n-\nu)}}{n} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{22}$$

Wenn nun weiter für ein gewisses λ etwa

$$|u_{1,\lambda}| < \varepsilon^2, \; |u_{2,\lambda}| < \varepsilon^4, \ldots, |u_{n-1,\lambda}| < \varepsilon^{2(n-1)} \tag{23}$$

ist, was für $\lambda = 0$ gewiß zutrifft, da wir die $u_{\nu,0}$ „geeignet" wählen durften, so ist nach (16) auch

$$|u_{n,\lambda}| < \frac{\varepsilon^{2n}}{n} + \frac{\varepsilon^{2(n-1)}}{n} \cdot \varepsilon^2 + \cdots \frac{\varepsilon^2}{n} \cdot \varepsilon^{2(n-1)} = \varepsilon^{2n}, \tag{23'}$$

und aus (17) folgt für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$

$$|u_{\nu,\lambda+1}| < e^{\Re(\varrho_{\nu+1}-\varrho_1)t} (\varepsilon^{2(\nu+1)} + \varepsilon^{2\nu} \cdot \varepsilon^2) \frac{e^{\Re(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})t}}{|\Re(\varrho_1 - \varrho_{\nu+1})|} =$$

$$= \frac{2\varepsilon^2}{|\Re(\varrho_1 - \varrho_{\nu+1})|} \cdot \varepsilon^{2\nu}.$$

[7] In meiner oben zitierten Arbeit findet sich bei einer ähnlichen Überlegung ein Fehler, indem ich den Nenner des Bruches nicht mit Absolutstrichen ver-

Also ergibt sich, da der letzte Bruch wegen (19) kleiner als 1 ist,

$$|u_{1,\lambda+1}| < \varepsilon^2, \quad |u_{2,\lambda+1}| < \varepsilon^4, \ldots, |u_{n-1,\lambda+1}| < \varepsilon^{2(n-1)},$$

und dann wie oben bei (23') auch $|u_{n,\lambda+1}| < \varepsilon^{2n}$. Die Formeln (23), (23') gelten also für alle λ.

Aus (17) folgt jetzt, indem man λ durch $\lambda - 1$ ersetzt und die entstehende Formel von (17) abzieht,

(24)
$$u_{\nu,\lambda+1} - u_{\nu,\lambda} = e^{(\varrho_{\nu+1}-\varrho_1)t} \int (\Phi_{\nu,\lambda}\, e^{(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})t}\, dt \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

wobei

$$\begin{aligned}\Phi_{\nu,\lambda} &= u_{\nu+1,\lambda} - u_{\nu,\lambda} u_{1,\lambda} - u_{\nu+1,\lambda-1} + u_{\nu,\lambda-1} u_{1,\lambda-1} = \\ &= u_{\nu+1,\lambda} - u_{\nu+1,\lambda-1} - (u_{\nu,\lambda} - u_{\nu,\lambda-1})\, u_{1,\lambda} - u_{\nu,\lambda-1}(u_{1,\lambda} - u_{1,\lambda-1}).\end{aligned}$$

Nun ist gewiß für $\lambda = 1$

$$|u_{\nu,\lambda} - u_{\nu,\lambda-1}| < M\varepsilon^{2\nu+\lambda} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{25}$$

wenn man nur M groß genug wählt. Wenn diese Ungleichungen aber für einen gewissen Index λ gelten, so ist unter Berücksichtigung von (23)

$$|\Phi_{\nu,\lambda}| < M\varepsilon^{2(\nu+1)+\lambda} + M\varepsilon^{2\nu+\lambda}\cdot\varepsilon^2 + \varepsilon^{2\nu}\cdot M\varepsilon^{2+\lambda} = 3\, M\varepsilon^{2\nu+2+\lambda},$$

und aus (24) folgt zunächst für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned}|u_{\nu,\lambda+1} - u_{\nu,\lambda}| &< e^{\Re(\varrho_{\nu+1}-\varrho_1)t}\cdot 3\, M\varepsilon^{2\nu+2+\lambda}\cdot\frac{e^{\Re(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})t}}{|\Re(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})|} = \\ &= \frac{3\,\varepsilon}{|\Re(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})|}\cdot M\varepsilon^{2\nu+\lambda+1},\end{aligned}$$

also, da der letzte Bruch wegen (20) kleiner als 1 ist,

$$|u_{\nu,\lambda+1} - u_{\nu,\lambda}| < M\varepsilon^{2\nu+\lambda+1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

---

sah; dann gilt die Hôpitalsche Regel nicht. Ich habe diesen Fehler, der das Resultat nicht beeinflußt, bereits früher einmal bei einer passenden Gelegenheit berichtigt (Mathemat. Zeitschrift 31, Seite 766).

Aus (16) und (22) folgt dann analog zu einer schon zweimal durchgeführten Rechnung, daß diese Abschätzung auch für $\nu = n$ gilt. Somit gelten die Ungleichungen (25) auch mit $\lambda + 1$ an Stelle von λ und folglich für alle λ.

Aus (25) ergibt sich nun wegen $\varepsilon < 1$ die für $t \geqq t_0$ gleichmäßige Existenz der Grenzwerte

(26) $$\lim_{\lambda \to \infty} u_{\nu,\lambda} = u_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

und aus (16) folgt

(27) $$u_n = \psi_0(t) + \psi_1(t)\, u_1 + \cdots + \psi_{n-1}(t)\, u_{n-1}.$$

Weiter folgt aus (25)

(28) $$|u_\nu - u_{\nu,\lambda}| < M\varepsilon^{2\nu+\lambda+1} + M\varepsilon^{2\nu+\lambda+2} + \cdots = \frac{M}{1-\varepsilon}\,\varepsilon^{2\nu+\lambda+1}.$$

Läßt man hier t bei festem λ gegen ∞ streben, so kommt mit Rücksicht auf (18)

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, |u_\nu| < \frac{2M}{1-\varepsilon}\,\varepsilon^{2\nu+\lambda+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

und da hier λ beliebig groß sein darf, ist

(29) $$\lim_{t \to \infty} u_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun kann man auch in (17) den Grenzübergang $\lambda \to \infty$ durchführen, was wegen der Abschätzung (28) ohne weiteres unter dem Integralzeichen erlaubt ist, und man erhält

(30) $$u_\nu = e^{(\varrho_{\nu+1}-\varrho_1)t} \int (u_{\nu+1} - u_\nu u_1)\, e^{(\varrho_1-\varrho_{\nu+1})t}\, dt \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

und hieraus durch Differentiation

$$\frac{d u_\nu}{dt} + (\varrho_1 - \varrho_{\nu+1})\, u_\nu = u_{\nu+1} - u_\nu u_1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Mit den Funktionen u_ν haben wir also eine Lösung des Gleichungssystems (14) gewonnen, die alle Bedingungen erfüllt.

§ 4. Eine zusätzliche Bemerkung

Ebenso wie wir oben von (15) zu (17) übergingen, kann man auch gleich von (14) zur Ingralgleichung (30) übergehen. Und nun kann ich mir vorstellen, daß sich die zu den verschiedenen t-Werten gehörenden Vektoren $u_1, \ldots, u_{n-1}$, die für $t \to \infty$ gegen den Nullvektor konvergieren, als Punkte eines „Raumes" $\mathfrak{A}$ mit allerhand schönen Eigenschaften auffassen lassen. Und ich kann mir weiter vorstellen, daß man die rechte Seite von (30) als eine *Abbildung* des Raumes $\mathfrak{A}$ in einen andern Raum $\mathfrak{B}$ ansehen kann, wobei sich durch Anwendung der Hôpitalschen Regel (wie im Text) die Beziehung $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ nachweisen läßt. Und nun gibt es vielleicht einen Fixpunktsatz, der besagt, daß wenigstens ein Punkt existiert, der mit seinem Bild zusammenfällt. Das bedeutet dann eine Lösung der Gleichung (30) und damit eine Lösung von (14), wie sie verlangt war.

Da ich aber in derlei Dingen nicht sehr versiert bin, würde es mir beim Umfang der heutigen Literatur wohl schwer fallen, nach einem passenden Fixpunktsatz zu fahnden, und wenn ich schließlich einen entdeckt hätte, der vielleicht in Frage kommen könnte, so müßte ich gewiß viel Zeit und Mühe opfern, um seinen Inhalt ganz zu erfassen und seinen Beweis durchzuarbeiten und dann noch genau nachzuprüfen, ob alle offenen und versteckten Voraussetzungen des Satzes in meinem Fall auch wirklich erfüllt sind. Man soll sich nämlich nie auf einen Satz berufen, dessen Inhalt man nicht sich völlig klargemacht und aufs genaueste kontrolliert hat.[8] Deshalb habe ich es der Kürze halber vorgezogen, mir den ad-hoc-Beweis des § 3 zurechtzulegen.

---

[8] Sogar die unbekümmerte Benutzung einer Logarithmentafel, die man ja nie selbst auf Rechen- und Druckfehler geprüft hat, ist schon Sünde, und ich habe auch schon von Fällen gehört, wo Sünder dabei zu Schaden kamen.