BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Koeffizientenbedingungen in Potenzreihen für konforme Abbildungen des Erdellipsoides in die Ebene

Von Karl Rinner in München

Vorgelegt von Herrn Max Kneißl am 4. Juli 1958

Übersicht

Potenzreihen für konforme Abbildungen des Erdellipsoides haben für die Geodäsie große Bedeutung, weil sie eine einfache, mechanisch auszuführende Berechnung von ebenen Koordinaten aus geographischen (und umgekehrt) erlauben.

Zwischen den Koeffizienten derartiger Potenzreihen besteht eine Reihe von allgemeinen Bedingungen, welche die zahlenmäßige Berechnung wesentlich erleichtern können und auf welche für den speziellen Fall von Abbildungen mit Symmetrieeigenschaften zu einem Meridian bereits in [1] aufmerksam gemacht wurde. Die im allgemeinen Abbildungsfall geltenden Bedingungen werden nachfolgend abgeleitet und für den Gebrauch übersichtlich zusammengestellt.

1. Allgemeine Form der Potenzreihen

Wie üblich, bezeichnen φ, λ die geographischen Koordinaten, q die isometrische Breite auf dem Ellipsoid und X, Y ebene rechtwinklige Koordinaten.

Jede analytische Funktion

$$X + i\,Y = F\,(q + i\lambda)$$

der isometrischen Parameter (q, λ) vermittelt dann bekanntlich eine konforme Abbildung des Ellipsoides in die Ebene. Wir entwikkeln F in der Umgebung eines Bezugspunktes $P_0(q_0, \lambda_0)$ in die Taylorsche Reihe

$$X + i\,Y = F_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu!} \frac{d F_0^\nu}{d(q+i\lambda)_\lambda^\nu} (\Delta q + i\,l)^\nu$$

$$\Delta q = q - q_0, \quad l = \lambda - \lambda_0$$

und führen Koordinaten x, y ein, welche vom Abbild des Bezugspunktes $X_0 + i\,Y_0 = F_0$ an zählen.

$$x + iy = \sum_{\nu=1}^{u} a_\nu (\Delta q + i\,l)^\nu$$

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu F(\Delta q + il)}{d\,(\Delta q + i\,l)^\nu} = \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu (x + i\,y)}{d\,(\Delta q + i\,l)^\nu}\,. \tag{1 a}$$

Die Koeffizienten a_ν sind im allgemeinen komplexe Größen,

$$a_\nu = a_{\nu_1} + i\,a_{\nu_2} \tag{1 b}$$

und werden nur in Sonderfällen, wie für die sehr häufig verwendeten Abbildungen, welche symmetrisch zu einem geradlinig abgebildeten Meridian erfolgen, reell.

Werden in (1) die Potenzen ausgeführt und reeller und imaginärer Teil getrennt, so erhalten wir die allgemeine Form der Abbildungsgleichung nach Potenzen von Δq, l, die bis zu den Gliedern fünfter Ordnung angeschrieben werden sollen.

$$
\begin{aligned}
x = {} & a_{11}\Delta q + & & - a_{12} l - \\
& + a_{21}(\Delta q^2 - l^2) + & & - a_{22} q l - \\
& + a_{31}(\Delta q^3 - 3\Delta q l^2) + & & - a_{32}(3\Delta q^2 l - l^3) - \\
& + a_{41}(\Delta q^4 - 6\Delta q^2 l^2 + l^4) + & & - a_{42}(4\Delta q^3 l - 4\Delta q l^3) - \\
& + a_{51}(\Delta q^5 - 10\Delta q^3 l^2 + 5\Delta q l^4) & & - a_{52}(5\Delta q^4 l - 10\Delta q^2 l^3 - l^5)
\end{aligned} \tag{2a}
$$

$$
\begin{aligned}
y = {} & a_{12}\Delta q & & + a_{11} l + \\
& + a_{22}(\Delta q^2 - l^2) & & + a_{21}\, 2\Delta q l + \\
& + a_{32}(\Delta q^3 - 3\Delta q l^2) & & + a_{31}(3\Delta q^2 l - l^3) + \\
& + a_{42}(\Delta q^4 - 6\Delta q^2 l^2 + l^4) & & + a_{41}(4\Delta q^3 l - 4\Delta q l^3) + \\
& + a_{52}(\Delta q^5 - 10\Delta q^3 l^2 + 5\Delta q l^4) & & + a_{51}(5\Delta q^4 l - 10\Delta q^2 l^3 - l^5) +
\end{aligned} \tag{2b}
$$

Nun ersetzen wir darin den isometrischen Breitenunterschied Δq durch den zugehörigen Breitenunterschied $f = \varphi - \varphi_0$ mit Hilfe der bekannten Reihe [2]

$$\Delta q = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f^\nu \tag{3a}$$

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{\cos\varphi_0}(1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \\
c_2 &= \frac{1}{2\cos\varphi_0} t_0 (1 + \eta_0^2 - 3\eta_0^4) \\
c_3 &= \frac{1}{6\cos\varphi_0}(1 + 2t_0^2 + \eta_0^2 - 3\eta_0^4 + 6t_0^2\eta_0^4) \\
c_4 &= \frac{1}{24\cos\varphi_0} t_0 (5 + 6t_0^2 - \eta_0^2) \\
c_5 &= \frac{1}{120\cos\varphi_0}(5 + 28t_0^2 + 24t_0^4)
\end{aligned} \tag{3b}
$$

$$t_0 = \operatorname{tg}\varphi_0, \quad \eta_0^2 = e^{12}\cos^2\varphi_0, \quad e^{12} = \text{Exzentrizität},$$

und erhalten damit die in der geodätischen Praxis übliche Form der Abbildungsgleichungen nach Potenzen von f, l:

$$x = \sum (ik)_1 f^i l^k \tag{4a}$$

$$y = \sum (ik)_2 f^i l^k \;. \tag{5a}$$

Die Koeffizienten (ik), welche in der gewählten Bezeichnung die Ordnung der Potenzen von f, l und des Produktes $(f^i l^k)$ erkennen lassen, können nach Einsetzen von (3) in (2) durch die a_{ν_1}, a_{ν_2} und c_ν ausgedrückt werden. In der folgenden Darstellung beschränken wir uns wieder auf die Koeffizienten der Glieder von der Ordnung $(i + k) \leqq 5$.

$$
\begin{aligned}
(00) &= 0 \qquad\qquad (4\,\mathrm{b})\\
(10)_1 &= a_{11} c_1\\
(01)_1 &= -a_{12}\\[4pt]
(20)_1 &= a_{11} c_2 + a_{21} c_1^2\\
(11)_1 &= -2 a_{22} c_1\\
(02)_1 &= -a_{21}\\[4pt]
(30)_1 &= a_{11} c_3 + 2 a_{21} c_1 c_2 + a_{31} c_1^3\\
(21)_1 &= -(2 a_{22} c_2 + 3 a_{32} c_1^2)\\
(12)_1 &= -3 a_{31} c_1\\
(03)_1 &= a_{32}\\[4pt]
(40)_1 &= a_{11} c_4 + 2 a_{21} c_1 c_3 + a_{21} c_2^2 + 3 a_{31} c_1^2 c_2 + a_{41} c_1^4\\
(31)_1 &= -(2 a_{22} c_3 + 6 a_{32} c_1 c_2 + 4 a_{42} c_1^3)\\
(22)_1 &= -3 a_{31} c_2 + 6 a_{41} c_1^2\\
(13)_1 &= 4 a_{42} c_1\\
(04)_1 &= a_{41}\\[4pt]
(50)_1 &= a_{11} c_5 + 2 a_{21} c_1 c_4 + 2 a_{21} c_2 c_3 + 3 a_{31} c_1^2 c_3 + 3 a_{31} c_1 c_2^2 +\\
&\qquad + 4 a_{41} c_3^3 + a_{51} c_1^5\\[4pt]
(41)_1 &= -(2 a_{22} c_4 + 6 a_{32} c_1 c_2 + 3 a_{32} c_2^2 + 12 a_{42} c_1^2 c_2 + 5 a_{52} c_1^4)\\
(32)_1 &= -3 a_{31} c_3 - 12 a_{41} c_1 c_2 + 10_{51} c_1^3\\
(23)_1 &= 4 a_{42} c_2 + 10 a_{52} c_1^2\\
(14)_1 &= 5 a_{51} c_1\\
(05)_1 &= -a_{52}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(00)_2 &= 0 \qquad\qquad (5\,\mathrm{b})\\
(10)_2 &= a_{12} c_1\\
(01)_2 &= a_{11}\\[4pt]
(20)_2 &= a_{12} c_2 + a_{22} c_1^2\\
(11)_2 &= 2 a_{21} c_1\\
(02)_2 &= -a_{22}
\end{aligned}
$$

$(30)_2 = a_{12} c_3 + 2 a_{22} c_1 c_2 + a_{32} c_1^3$
$(21)_2 = 2 a_{21} c_2 + 3 a_{31} c_1^2$
$(12)_2 = - 3 a_{32} c_1$
$(03)_2 = - a_{31}$

$(40)_2 = a_{12} c_4 + 2 a_{22} c_1 c_2 + a_{22} c_2^2 + 3 a_{32} c_1^2 c_2 + a_{42} c_1^4$
$(31)_2 = 2 a_{21} c_3 + 6 a_{31} c_1 c_2 + 4 a_{41} c_1^3$
$(22)_2 = -(3 a_{32} c_2 + 6 a_{42} c_1^2)$
$(13)_2 = - 4 a_{41} c_1$
$(04)_2 = a_{42}$

$(50)_2 = a_{12} c_5 + 2 a_{22} c_1 c_4 + 2 a_{22} c_2 c_3 + 3 a_{32} c_1^2 c_3 + 3 a_{32} c_1 c_2^2 +$
$\quad + 4 a_{42} c_1^3 c_2 + a_{52} c_1^5$
$(41)_2 = 2 a_{21} c_4 + 6 a_{31} c_1 c_2 + 3 a_{31} c_2^2 + 12 a_{41} c_1^2 c_2 + 5 a_{51} c_1^4$
$(32)_2 = - 3 a_{32} c_3 - 12 a_{42} c_1 c_2 + 10 a_{52} c_1^3$
$(23)_2 = -(4 a_{41} c_2 + 10 a_{51} c_1^2)$
$(14)_2 = 5 a_{52} c_1$
$(05)_2 = a_{51}$

Für die umgekehrte Aufgabe der Abbildung der Ebene auf das Ellipsoid erhalten wir entsprechend (1a)

$$\Delta q + i l = \sum_{\nu=1}^{u} b_\nu (x + i y)^\nu \tag{6a}$$

$$b_\nu = \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu (\Delta q + i l)}{d (x + i y)^\nu}$$

und hieraus wegen

$$b_\nu = b_{\nu_1} + i b_{\nu_2} \tag{6b}$$

nach Ausführen der Potenzen und Trennen von reellem und imaginärem Teil, ein (2) entsprechendes System, das aus diesem hervorgeht, wenn Δq, l durch x, y und a_{ν_1}, a_{ν_2} durch b_{ν_1}, b_{ν_2} ersetzt werden. Die erhaltene Reihe für Δq führen wir in die bekannte Umkehrreihe von (3) ein:

$$f = \sum d_\nu \, \Delta q^\nu \tag{7a}$$

$$d_1 = \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2) \tag{7b}$$

$$d_2 = -\frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 t_0 (1 + 4\eta_0^2 + 3\eta_0^4)$$

$$d_3 = -\frac{1}{6} \cos^3 \varphi_0 (1 - t_0^2 + 5\eta_0^2 - 13 t_0^2 \eta_0^2 + 7\eta_0^4 - 27 t_0^2 \eta_0^4)$$

$$d_4 = \frac{1}{24} \cos^4 \varphi_0 t_0 (5 - t_0^2 + 56\eta_0^2 - 40 t_0^2 \eta_0^2)$$

$$d_5 = \frac{1}{120} \cos^5 \varphi_0 (5 - 18 t_0^2 + t_0^4).$$

Nach Ausführen dieser Operationen folgen Reihen

$$f = \sum [ik]_1 \, x^i \, y^k \tag{8a}$$

$$l = \sum [ik]_2 \, x^i \, y^k, \tag{9a}$$

deren Koeffizienten sich aus den b_{ν_1}, b_{ν_2} und d_ν darstellen lassen.

$$[00]_1 = 0$$
$$[10]_1 = b_{11} d_1$$
$$[01]_1 = -b_{12} d_1$$

$$[20]_1 = b_{21} d_1 + b_{11}^2 d_2$$
$$[11]_1 = -2 b_{22} d_1 - 2 b_{11} b_{12} d_2$$
$$[02]_1 = -b_{21} d_1 + b_{12}^2 d_2$$

$$[30]_1 = b_{31} d_1 + 2 b_{11} b_{21} d_2 + b_{11}^3 d_3$$
$$[21]_1 = -3 b_{32} d_1 - 2(2 b_{11} b_{22} + b_{12} b_{21}) d_2 - 3 b_{11}^2 b_{12} d_3$$
$$[12]_1 = -3 b_{31} d_1 - 2(b_{11} b_{21} + 2 b_{12} b_{22}) d_2 + 3 b_{11} b_{12}^2 d_3$$
$$[03]_1 = b_{32} d_1 + 2 b_{12} b_{21} d_2 - b_{12}^3 d_3$$

$$[40]_1 = b_{41} d_1 + (b_{21}^2 + 2 b_{11} b_{31}) d_2 + 3 b_{11}^2 b_{21} d_3 + b_{11}^4 d_4$$
$$[31]_1 = -4 b_{42} d_1 - 2(2 b_{21} b_{22} + 3 b_{11} b_{32} + b_{12} b_{31}) d_2 - 6 b_{11}(b_{11} b_{22} + \\ + b_{12} b_{21}) d_3 - 4 b_{11}^3 b_{12} d_4$$

$$[22]_1 = -6 b_{41} d_1 - 2(b_{21}^2 - 2 b_{22}^2 + 3 b_{11} b_{31} - 3 b_{12} b_{31}) d_2 + \\ + 3(-b_{11}^2 b_{21} + 4 b_{11} b_{12} b_{22} + b_{12}^2 b_{21}) d_3 + 6 b_{11}^2 b_{12}^2 d_4$$

$$[13]_1 = 4 b_{42} d_1 + 2(2 b_{21} b_{22} + 3 b_{12} b_{31} + b_{11} b_{32}) d_2 + 6 b_{12}(b_{11} b_{21} - \\ - b_{12} b_{22}) d_3 - 4 b_{11} b_{12}^3 d_4$$

$$[04]_1 = b_{41} d_1 + (b_{21}^2 - 2 b_{12} b_{32}) d_2 - 3 b_{12}^2 b_{21} d_3 + b_{12}^4 d_4$$

$$[50]_1 = b_{51} d_1 + 2 (b_{11} b_{41} + b_{21} b_{31}) d_2 + 3 b_{11} (b_{11} b_{31} + b_{21}^2) d_3 + \\ + 4 b_{11}^3 b_{21} d_4 + b_{11}^5 d_5$$

$$[41]_1 = - 5 b_{52} d_1 - 2 (4 b_{11} b_{42} + 3 b_{21} b_{32} + 2 b_{22} b_{31} + b_{12} b_{41}) d_2 - \\ - 3 (3 b_{11}^2 b_{32} + 2 b_{11} b_{12} b_{31} + 4 b_{11} b_{21} b_{22} + b_{12} b_{21}^2) d_3 - \\ - 4 (2 b_{11}^3 b_{22} + 3 b_{11}^2 b_{12} b_{21}) d_4 - 5 b_{11}^4 b_{12} d_5$$

$$[32]_1 = - 10 b_{51} d_1 - 4 (3 b_{11} b_{41} - 2 b_{12} b_{42} + 2 b_{21} b_{31} - 3 b_{22} b_{32}) d_2 + \\ + 3 (- 3 b_{11}^2 b_{31} + 6 b_{11} b_{12} b_{32} + b_{12}^2 b_{31} + 2 b_{11} b_{21}^2 + 4 b_{11} b_{22}^2 - \\ - 4 b_{12} b_{21} b_{22}) d_3 + 4 (- b_{11}^3 b_{21} + 6 b_{11}^2 b_{12} b_{22} + 3 b_{11} b_{12}^2 b_{21}) d_4 + \\ + 10 b_{11}^3 b_{12}^2 d_5$$

$$[23]_1 = 10 b_{52} d_1 + 4 (2 b_{11} b_{42} + 3 b_{12} b_{41} + 2 b_{21} b_{32} + 3 b_{22} b_{31}) d_2 + \\ + 3 (b_{11}^2 b_{32} + 6 b_{11} b_{12} b_{32} - b_{12}^2 b_{32} + 4 b_{11} b_{21} b_{22} + 2 b_{12} b_{21}^2 - \\ - 4 b_{12} b_{22}^2) d_3 + 4 (3 b_{11}^2 b_{12} b_{21} - 6 b_{11} b_{12}^2 b_{22} - b_{12}^3 b_{21}) d_4 - \\ - 10 b_{11}^2 b_{12}^3 d_5$$

$$[14]_1 = 5 b_{51} d_1 + 2 (b_{11} b_{41} - 4 b_{12} b_{42} + 3 b_{21} b_{31} - 2 b_{22} b_{32}) - \\ - 3 (2 b_{11} b_{12} b_{32} + 3 b_{12}^2 b_{31} - b_{11} b_{21}^2 + 4 b_{12} b_{21} b_{22}) d_4 - \\ - 4 (3 b_{11} b_{12}^2 b_{21} - 2 b_{12}^3 b_{22}) d_4 + 5 b_{11} b_{12}^4$$

$$[05]_1 = - b_{52} d_1 - 2 (b_{12} b_{41} + b_{21} b_{32}) + 3 b_{12} (b_{12} b_{32} - b_{21}^2) d_3 + \\ + 4 b_{12}^3 b_{21} d_4 - b_{12}^5 d_5$$

$$\begin{array}{ll}
[00]_2 = 0 & [40]_2 = b_{42} \qquad (9\,\mathrm{b}) \\
[10]_2 = b_{12} & [31]_2 = 4 b_{41} \\
[01]_2 = b_{11} & [22]_2 = - 6 b_{42} \\
 & [13]_2 = - 4 b_{41} \\
[20]_2 = b_{22} & [04]_2 = b_{42} \\
[11]_2 = 2 b_{21} & \\
[02]_2 = - b_{22} & [50]_2 = b_{52} \\
 & [41]_2 = 5 b_{51} \\
[30]_2 = b_{32} & [32]_2 = - 10 b_{52} \\
[21]_2 = 3 b_{31} & [23]_2 = - 10 b_{51} \\
[12]_2 = - 3 \mathrm{b}_{32} & [14]_2 = 5 b_{52} \\
[03]_2 = - b_{31} & [05]_2 = b_{51}
\end{array}$$

Die Koeffizienten $(i\,k)$ und $[i\,k]$ müssen eine Reihe von Bedingungen erfüllen, welche aus den für konforme Abbildungen geltenden Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen den Laplaceschen Gleichungen, oder aus den Regeln über die Reihenumkehrung folgen.

2. Koeffizientenbedingungen aus den Cauchy-Riemannschen Gleichungen

Die Gleichungen (4a) (5a) müssen die Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial f} - \frac{\partial y}{\partial l}\,\frac{d\Delta q}{d f} = 0 \tag{10a}$$

$$\frac{\partial x}{\partial l}\,\frac{d\Delta q}{d f} + \frac{\partial y}{\partial f} = 0 \tag{11a}$$

erfüllen. Werden darin die Ableitungen

$$\frac{\partial x}{\partial f} = \sum i\,(i\,k)_1\, f^{i-1}\, l^k, \qquad \frac{\partial x}{\partial l} = \sum k\,(i\,k)_1\, f^i\, l^{k-1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial f} = \sum i\,(i\,k)_2\, f^{i-1}\, l^k, \qquad \frac{\partial y}{\partial l} = \sum k\,(i\,k)_2\, f^i\, l^{k-1}$$

$$\frac{d\Delta q}{d f} = \sum \nu\, c_\nu\, f^{\nu-1} \tag{12}$$

eingeführt, so müssen sämtliche Koeffizienten der entstehenden Potenzreihen identisch verschwinden. Aus jeder der Gleichungen (10) folgen daher $p = \frac{1}{2}\,n(n+1)$ Bedingungsgleichungen zwischen den $(i\,k)$, $[i\,k]$, wobei n die höchste Ordnung $i + k \leqq n$ bezeichnet. Für $n = 5$ erhalten wir beispielsweise die nachfolgenden 2mal 15 Gleichungen (10b) und 11(b)

$$\begin{aligned}
&(10)_1 - c_1(01)_2 = 0 \\
&2\,(20)_1 - c_1(11)_2 - 2\,c_2(01)_2 = 0 \\
&3\,(30)_1 - c_1(21)_2 - 2\,c_2(11)_2 - 3\,c_3(01)_2 = 0 \\
&4\,(40)_1 - c_1(31)_2 - 2\,c_2(21)_2 - 3\,c_3(11)_2 - 4\,c_4(01)_2 = 0 \\
&5\,(50)_1 - c_1(41)_2 - 2\,c_2(31)_2 - 3\,c_3(21)_2 - 4\,c_4(11)_2 - 5\,c_5(01)_2 = 0
\end{aligned} \tag{10b}$$

$$
\begin{aligned}
(11)_1 - 2c_1(02)_2 &= 0 \\
2\,(21)_1 - 2c_1(12)_2 - 4c_2(02)_2 &= 0 \\
3\,(31)_1 - 2c_1(22)_2 - 4c_2(12)_2 - 6c_3(02)_2 &= 0 \\
4\,(41)_1 - 2c_1(32)_2 - 4c_2(22)_2 - 6c_3(12)_2 - 8c_4(02)_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12)_1 - 3c_1(03)_2 &= 0 \\
2\,(22)_1 - 3c_1(13)_2 - 6c_2(03)_2 &= 0 \\
3\,(32)_1 - 3c_1(23)_2 - 6c_2(13)_2 - 9c_3(03)_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(13)_1 - 4c_1(04)_2 &= 0 \\
2\,(23)_1 - 4c_1(14)_2 - 8c_2(04)_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(14)_1 - 5c_1(02)_2 = 0
$$

$$
\begin{aligned}
(10)_2 + c_1(01)_1 &= 0 \\
2\,(20)_2 + c_1(11)_1 + 2c_2(01)_1 &= 0 \\
3\,(30)_2 + c_1(21)_1 + 2c_2(11)_1 + 3c_3(01)_1 &= 0 \\
4\,(40)_2 + c_1(31)_1 + 2c_2(21)_1 + 3c_3(11)_1 + 4c_4(01)_1 &= 0 \\
5\,(50)_2 + c_1(41)_1 + 2c_2(31)_1 + 3c_3(21)_1 + 4c_4(11)_1 + 5c_5(01)_1 &= 0
\end{aligned}
\tag{11 b}
$$

$$
\begin{aligned}
(11)_2 + 2c_1(02)_1 &= 0 \\
2\,(21)_2 + 2c_1(12)_1 + 4c_2(02)_1 &= 0 \\
3\,(31)_2 + 2c_1(22)_1 + 4c_2(12)_1 + 6c_3(02)_1 &= 0 \\
4\,(41)_2 + 2c_1(32)_1 + 4c_2(22)_1 + 6c_3(12)_1 + 8c_4(02)_1 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12)_2 + 3c_1(03)_1 &= 0 \\
2\,(22)_2 + 3c_1(13)_1 + 6c_2(03)_1 &= 0 \\
3\,(32)_2 + 3c_1(23)_1 + 6c_2(13)_1 + 9c_3(03)_1 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(13)_2 + 4c_1(04)_1 &= 0 \\
2\,(23)_2 + 4c_1(14)_1 + 8c_2(04)_1 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(14)_2 + 5c_1(05)_1 = 0
$$

Da in jeder der Reihen (10) und (11) stets $k = \frac{1}{2}\,n\,(n+3)$ Koeffizienten auftreten, kann nur über $2n$ der Koeffizienten frei verfügt werden. Daher bestehen für die $2\,(n+1)$ Koeffizienten der Glieder n-ter Ordnung immer $2n$ Bedingungen, so daß in jeder Ordnung 2 Koeffizienten frei wählbar sind.

Potenzreihen für konforme Abbildungen des Ellipsoids in die Ebene sind daher bestimmt, wenn von jeder Ordnung zwei Koeffizienten vorliegen. Voraussetzung hierfür ist jedoch die Kenntnis der Breite φ_0 des Bezugspunktes, weil nur in diesem Fall die c_i bestimmt sind.

Aus den Gleichungen (10a), (11a) folgt durch Elimination von $\frac{d\Delta q}{df}$

$$\frac{\partial x}{\partial f} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial f}\,\frac{\partial y}{\partial l} = 0, \tag{13a}$$

und hieraus ergeben sich nach Einführen von (12) und Nullsetzen der Koeffizienten von $f^i l^k$, $\frac{1}{2}\, n\,(n+1)$ Bedingungsgleichungen, in welchen die n Größen c_i nicht mehr auftreten. Diese Gleichungen sind Linearkombinationen von (10b) und (11b), und wir wollen hiervon nur die für $n \leqq 3$ bestehenden anführen.

$$\begin{aligned}
&(10)_1(01)_1 + (10)_2(01)_2 = 0 \qquad\qquad (13\text{b})\\
&(10)_1(11)_1 + (10)_2(11)_2 + 2\left((20)_1(01)_1 + (20)_2(01)_2\right) = 0\\
&(01)_1(11)_1 + (01)_2(11)_2 + 2\left((10)_1(02)_1 + (10)_2(02)_2\right) = 0\\[4pt]
&(10)_1(21)_1 + (10)_2(21)_2 + 2\left((20)_1(11)1 + (20)_2(11)_2\right) +\\
&\qquad\qquad + 3\left((30)_1(01)_1 + (30)_2(01)_2\right) = 0\\[4pt]
&(11)_1^2 + (11)_2^2 + 2\left((21)_1(01)_1 + (21)_2(01)_2\right) +\\
&\qquad + 2\left((10)_1(12)_1 + (10)_2(12)_2\right) +\\
&\qquad + 4\left((20)_1(02)_1 + (20)_2(02)_2\right) = 0\\[4pt]
&(12)_1(01)_1 + (12)_2(01)_2 + 2\left((11)_1(02)_1 + (11)_2(02)_2\right) +\\
&\qquad\qquad + 3\left((01)_1(03)_1 + (10)_2(03)_2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Gleichungen, welche (10b) und (11b) entsprechen, erhalten wir, auch, wenn in (4a) und (5a) der Breitenunterschied f mit Hilfe von (7) durch Δq ersetzt wird. Bezeichnen wir die Koeffizienten der sich ergebenden Reihen mit $(ik)_{q_1}$, $(ik)_{q_2}$,

$$\begin{aligned} x &= \sum (ik)_{q_1}\, q^i l^k \\ y &= \sum (ik)_{q_2}\, q^i l^k, \end{aligned} \tag{14}$$

so folgen entweder aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, oder auch unmittelbar durch Vergleich aus den Gleichungen (2a) und (2b) die Bedingungen

$$(k+1)\,(i, k+1)_{q_1} + (i+1)\,(i+1, k)_{q_2} = 0 \tag{15a}$$

$$(i+1)\,(i+1, k)_{q_1} - (k+1)\,(i, k+1)_{q_2} = 0\,. \tag{16a}$$

Die Koeffizienten $(ik)_q$ sind nach dem System (17) durch die (ik) und die in (7b) angeführten Werte d_ν bestimmt, wobei sich die $(ik)_{q_1}$ oder $(ik)_{q_2}$ ergeben, wenn die $(ik)_1$ oder $(ik)_2$ verwendet werden.

$$
\begin{aligned}
(10)_q &= (10)\,d_1 \qquad\qquad (17)\\
(20)_q &= (10)\,d_2 + (20)\,d_1^2\\
(30)_q &= (10)\,d_3 + 2(20)\,d_1 d_2 + (30)\,d_1^3\\
(40)_q &= (10)\,d_4 + (20)(2\,d_1 d_3 + d_2^2) + 3(30)\,d_1^2 d_2 + (40)\,d_1^4\\
(50)_q &= (10)\,d_5 + 2(20)(d_1 d_4 + d_2 d_3) + 3\,(30)(d_1^2 d_3 + d_2^2 d_1) +\\
&\quad + 4(40)\,d_1^3 d_2 + (50)\,d_1^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(01)_q &= (01)\\
(11)_q &= (11)\,d_1\\
(21)_q &= (11)\,d_2 + (21)\,d_1^2\\
(31)_q &= (11)\,d_3 + 2(21)\,d_1 d_2 + (31)\,d_1^3\\
(41)_q &= (11)\,d_4 + (21)(2\,d_1 d_3 + d_2^2) + 3(31)\,d_1^2 d_2 + (41)\,d_1^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(02)_q &= (02) \qquad\qquad (17)\\
(12)_q &= (12)\,d_1\\
(22)_q &= (12)\,d_2 + (22)\,d_1^2\\
(32)_q &= (12)\,d_3 + 2(22)\,d_1 d_2 + (32)\,d_1^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(03)_q &= (03)\\
(13)_q &= (13)\,d_1\\
(23)_q &= (13)\,d_2 + (23)\,d_1^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(04)_q &= (04)\\
(14)_q &= (14)\,d_1\\
(05)_q &= (05)
\end{aligned}
$$

Da die d_ν und c_ν nach Definition, Koeffizienten inverser Reihen sind, lassen sich die d_ν durch die c_ν ersetzen und umgekehrt und dadurch die beiden Systeme (10), (11) und (15), (16) ineinander überführen.

Für die Umkehrreihen (8a), (9a) lassen sich entsprechende Bedingungen angeben. Wir schreiben hierzu die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in der Form

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta q}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y} &= 0 \qquad\qquad (18)\\
\frac{\partial \Delta q}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial x} &= 0
\end{aligned}
$$

und bilden durch Einsetzen von (8a) in (3a) eine nach $x^i\,y^k$ entwickelte Potenzreihe für Δq

$$\Delta q = \sum\,[i\,k]_q\,x^i y^k\,, \tag{19a}$$

aus der sich die in (18) benötigten Ableitungen leicht bilden lassen.

Für die $[i\,k]_q$ erhalten wir das System:

$$[00]_q = 0 \tag{19b}$$

$$[10]_q = [10]_1 c_1$$
$$[01]_q = [01]_1 c_1$$

$$[20]_q = [20]_1 c_1 + [10]_1^2 c_2$$
$$[11]_q = [11]_1 c_1 + 2\,[10]_1 [01]_1 c_2$$
$$[02]_q = [02]_1 c_1 + [02]_1^2 c_2$$

$$[30]_q = [30]_1 c_1 + 2\;[10]_1 [20]_1 c_2 + [10]_1^3 c_3$$
$$[21]_q = [21]_1 c_1 + 2\left([10]_1 [11]_1 + [01]_1 [20]_1\right) c_2 + 3\,[10]_1^2 [01]_1 c_3$$
$$[12]_q = [12]_1 c_1 + 2\left([10]_1 [02]_1 + [01])_1 [11]_1\right) c_2 + 3\,[10]_1 [01]_1^2 c_3$$
$$[03]_q = [03]_1 c_1 + 2\,[01]_1 [02]_1 c_2 + [01]_1^3 c_3$$

$$[40]_q = [40]\,c_1 + \left([20]^2 + 2\,[10]\,[30]\right) c_2 + 3\,[20]\,[10]^2 c_3 + [10]^4 c_4$$
$$[31]_q = [31]\,c_1 + 2\;\left([10]\,[21] + [20]\,[11] + [01]\,[30]\right) c_2 + $$
$$+ 3\left(2\,[20]\,[10]\,[01] + [11]\,[10]^2\right) c_3 + 4\,[10]^3 [01]\,c_4$$

$$[22]_q = [22]\,c_1 + \left(2\,[10]\,[12] + [11]^2 + 2\,[20]\,[02] + 2\,[01]\,[21]\right) c_2 + $$
$$+ 3\;\left([20]\,[01]^2 + 2\,[11]\,[10]\,[01] + [02]\,[10]^2\right) c_3 + 6\,[10]^2 [01]^2 c_4$$

$$[13]_q = [13]\,c_1 + 2\;\left([10]\,[03] + [11]\,[02] + [01]\,[12]\right) c_2 + $$
$$+ 3\;\left([11]\,[01]^2 + 2\,[02]\,[10]\,[01]\right) c_3 + 4\,[10]\,[01]^3 c_4$$

$$[04]_q = [04]\,c_1 + \left([02]^2 + 2\,[01]\,[03]\right) c_2 + 3\,[02]\,[01]^2 c_3 + [01]^4 c_4$$

$$[50]_q = [50]\,c_1 + 2\;\left([10]\,[40] + [20]\,[30]\right) c_2 + 3\;\left([30]\,[10]^2 + \right.$$
$$\left. + [10]\,[20]^2\right) c_3 + 4\,[20]\,[10]^3 c_4 + [10]^5 c_5$$

$$[41]_q = [41]\,c_1 + 2\;\left([10]\,[31] + [01]\,[40] + [20]\,[21] + \right.$$
$$\left. + [11]\,[30]\right) c_2 + 3\;\left(2\,[30]\,[10]\,[01] + [21]\,[10]^2 + \right.$$
$$\left. + 2\,[10]\,[20]\,[11] + [01]\,[20]^2\right) c_3 + 4\;\left(3\,[20]\,[10]^2 [01] + \right.$$
$$\left. + [11]\,[10]^3\right) c_4 + 5\,[10]^4 [01]\,c_5$$

$$[32]_q = [32]c_1 + 2\,([10][22] + [01][31] + [20][12] + [11][21] + \\ + [02][30])\,c_2 + 3\,([30][01]^2 + 2[21][10][01] + \\ + [12][10]^2 + [10]([11]^2 + 2[20][02]) + 2[01][20][11])c_3 + \\ + 4\,(3[20][10][01]^2 + 3[11][10]^2[01] + [02][10]^3)\,c_4 + \\ + [10][10]^3[01]^2 c_5$$

$$[23]_q = [23]c_1 + 2\,([10][13] + [01][22] + [20][03] + [11][12] + \\ + [02][21])\,c_2 + 3\,([21][01]^2 + 2[12][10][01] + [03][10]^2 + \\ + 2[10][11][02] + [01]([11]^2 + 2[20][02]))\,c_3 + \\ + 4\,([20][01]^3 + 3[11][10][01]^2 + 3[02][10]^2[01])\,c_4 + \\ + [10][10]^2[01]^3 c_5$$

$$[14]_q = [14]c_1 + 2\,([10][04] + [01][13] + [11][03] + \\ + [02][12])\,c_2 + 3\,([12][01]^2 + 2[03][10][01] + \\ + [10][02]^2 + 2[01][11][02])\,c_3 + 4\,([11][01]^3 + \\ + 3[02][10][01]^2)\,c_4 + 5[10][01]^4 c_5$$

$$[05]_q = [05]c_1 + 2\,([01][04] + [02][03])\,c_2 + 3\,([03][01]^2 + \\ + [01][02]^2)\,c_3 + 4[02][01]^3 c_4 + [01]^5 c_5$$

Nun können wir mit den aus Gleichung (19a) und (9a) folgenden Ableitungen von Δq, l die Bedingungsgleichungen zwischen den $[ik]_1$, $[ik]_2$ in allgemeiner Form angeben.

$$(i+1)\,[i+1, k]_q - (k+1)\,[i, k+1]_2 = 0 \tag{20a}$$

$$(k+1)\,[i, k+1]_q + (i+1)\,[i+1, k]_2 = 0 \tag{21a}$$

Wir führen das erste System noch bis $n = 5$ aus und entnehmen (21a), daß das dieser Gleichung entsprechende System (21b) aus (20b) durch Vertauschen von $[ik]_q$ mit $[ik]_2$ und Änderung des Vorzeichens von $[ik]_2$ hervorgeht.

$$\begin{aligned} [10]_q - [01]_2 &= 0 \\ 2[20]_q - [11]_2 &= 0 \\ [11]_q - 2[02]_2 &= 0 \\[1em] 3[30]_q - [21]_2 &= 0 \\ 2[21]_q - 2[12]_2 &= 0 \\ [12]_q - 3[03]_Q &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4[40]_q - [31]_2 &= 0 \\ 3[31]_q - 2[22]_2 &= 0 \\ 2[22]_q - 3[13]_2 &= 0 \\ [13]_q - 4[04]_2 &= 0 \\[1em] 5[50]_q - [41]_2 &= 0 \\ 4[41]_q - 2[32]_2 &= 0 \\ 3[32]_q - 3[23]_2 &= 0 \\ 2[23]_q - 4[14]_2 &= 0 \\ [14]_q - 5[05]_2 &= 0 \end{aligned} \tag{20b}$$

Wir haben wieder insgesamt $p = n\,(n+1)$ Bedingungsgleichungen erhalten und können in jeder Ordnung zwei Koeffizienten frei wählen. Aus den Gleichungen (14) läßt sich die Beziehung

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial l}{\partial y} = 0 \tag{22a}$$

ableiten, aus welchen für jede Ordnung n, also insgesamt $^1/_2\, n\,(n+1)$ von c_i und damit von der Lage des Nullpunktes unabhängige Bedingungsgleichungen folgen. Wir führen hiervon die bis $n \leqq 3$ geltenden an.

$$\begin{aligned}
&[10]_1[10]_2 + [01]_1[01]_2 = 0 \qquad (22\text{b})\\
&[01]_1[11]_2 + [11]_1[01]_2 + 2\left([10]_1[20]_2 + [20]_1[10]_2\right) = 0\\
&[10]_1[11]_2 + [11]_1[10]_2 + 2\left([01]_1[02]_2 + [02]_1[01]_2\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[01]_1[21]_2 + [11]_1[11]_2 + [21]_1[01]_2 +\\
&+ 3[10]_1[30]_2 + 4[20]_1[20]_2 + 3[30]_1[10]_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[01]_1[12]_2 + [11]_1[02]_2 + [02]_1[11]_2 + [12]_1[01]_2 +\\
&+ [10]_1[21]_2 + [11]_1[20]_2 + [20]_1[11]_2 + [21]_1[10]_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&3[01]_1[03]_2 + 4[02]_1[02]_2 + 3[03]_1[01]_2 + [10]_1[12]_2 +\\
&+ [11]_1[11]_2 + [12]_1[10]_2 = 0
\end{aligned}$$

3. Koeffizientenbedingungen aus den Laplaceschen Gleichungen

Werden die Reihen (14) für x, y und (19a) (9a) für Δq, l in die Laplaceschen Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \Delta q^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial l^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta q^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial l^2} = 0 \tag{23a}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta q}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial y^2} = 0 \tag{24a}$$

eingeführt, so folgen aus jeder der Gleichungen $\frac{1}{2}\, n\,(n-1)$ Bedingungsgleichungen, in welchen nur Koeffizienten dieser

Reihe und die c_ν oder d_ν enthalten sind. In allgemeiner Form lauten diese Gleichungen:

$$\begin{aligned}(i+1)(i+2)(i+2,k)_{q_1} + (k+1)(k+2)(i,k+2)_{q_1} &= 0\\ (i+1)(i+2)(i+2,k)_{q_2} + (k+1)(k+2)(i,k+2)_{q_2} &= 0\end{aligned} \tag{23b}$$

$$\begin{aligned}(i+1)(i+2)[i+2,k]_q + (k+1)(k+2)[i,k+2]_q &= 0\\ (i+1)(i+2)[i+2,k]_2 + (k+1)(k+2)[i,k+2]_2 &= 0\end{aligned} \tag{24b}$$

Die zweite der Gleichungen (24b) führt unmittelbar zu dem System (25a) für die $[ik]_2$, welches auch aus (9b) abgelesen werden kann.

$$\begin{array}{rr} i=0,\ k=1 & [20]_2 + [02]_2 = 0 \\ 2 & [21]_2 + 3\,[03]_2 = 0 \\ 3 & [22]_2 + 6\,[04]_2 = 0 \\ 4 & [23]_2 + 10\,[05]_2 = 0 \\ & \\ i=1,\ k=0 & 3\,[30]_2 + [12]_2 = 0 \\ 1 & [31]_2 + [13]_2 = 0 \\ 2 & [32]_2 + 2\,[14]_2 = 0 \\ & \\ i=2,\ k=0 & 6\,[40]_2 + [22]_2 = 0 \\ 1 & 2\,[41]_2 + [23]_2 = 0 \\ & \\ i=3,\ k=0 & 10\,[50]_2 + [32] = 0 \end{array} \tag{25a}$$

Das aus der ersten Gleichung (24b) folgende System geht aus (25a) durch Vertauschen von $[ik]_2$ mit $[ik]_q$ hervor und führt nach Benutzung der Beziehungen (19b) zu Gleichungen zwischen den $[ik]_1$. So erhalten wir beispielsweise für $n \leqq 3$ das System:

$$\begin{aligned}&([20]_1 + [02]_1)\,c_1 + ([10]_1^2 + [01]^2)\,c_2 = 0\\ &(3\,[30]_1 + [12]_1)\,c_1 + 2\,(3\,[10]_1[20]1 + [10]_1[02]_1 +\\ &\qquad + [01]_1[11]_1)\,c_2 + 3\,([10]_1^3 + [10]_1[01]_1^2)\,c_3 = 0\\ &(3\,[03]_1 + [21]_1)\,c_1 + 2\,(3\,[01]_1[02]_1 + [01]_1[20]_1 +\\ &\qquad + [10]_1[11]_1)\,c_2 + 3\,([01]_1^3 + [01]_1[10]_1^2)\,c_3 = 0\end{aligned} \tag{25b}$$

In den Gleichungen (23b) können die $(ik)_{q_1}$ und ik_{q_2} mit Hilfe der Beziehungen (17) durch die $(ik)_1$ und $(ik)_2$, sowie die d_ν ersetzt werden. Es folgen dann Systeme von Bedingungen zwischen den $(ik)_1$ und d_ν, sowie $(ik)_2$ und d_ν, die in der Form völlig gleichartig sind und die wir für $n \leqq 3$ anschreiben wollen.

$$
\begin{aligned}
(02) + (10)d_2 + (20)d_1^2 &= 0 \\
3(03) + (11)d_2 + (21)d_1^2 &= 0 \\
(12)d_1 + 3(10)d_3 + 6(20)d_1 d_2 + 3(30)d_1^3 &= 0
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Wir erkennen abschließend, daß aus den Laplaceschen Gleichungen eine allgemeine Form des in (2) enthaltenen Bildungsgesetzes folgt.

4. Umkehrung der Potenzreihen

Ein allgemeines, für beliebige Potenzreihen mit 2 Argumenten geltendes Verfahren der Reihenumkehrung wurde in [3] beschrieben (siehe auch [4]). Für konforme Abbildungen läßt sich jedoch ein einfacherer Weg angeben.

Sind die Reihen (4a), (5a) für x, y gegeben, so können nach (4b), (5b) erst die $a_\nu = a_{\nu_1} + a_{\nu_2}$ bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (01)_2 - i(01)_1 \\
a_2 &= -(02)_1 - i(02)_2 \\
a_3 &= -(03)_2 + i(03)_1 \\
a_4 &= (04)_1 + i(04)_2 \\
a_5 &= (05)_2 - i(05)_1 \quad \text{usw.}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Die $b_\nu = b_{\nu_1} + ib_{\nu_2}$, aus welchen sich die Koeffizienten der Umkehrreihen nach (8b), (9b) bilden lassen, sind Koeffizienten der Umkehrreihe (6a) von (1a) und können daher nach den bekannten Regeln für die Umkehrungen von Reihen mit einem Argument berechnet werden. Wir entnehmen die Formeln hierfür [4] und führen das Ergebnis bis zu den Gliedern fünfter Ordnung an.

$$\begin{aligned}
b_1 a_1 &= 1 \\
b_2 a_1^3 &= -a_2 \\
b_3 a_1^5 &= -a_1 a_3 + 2 a_2^2 \\
b_4 a_1^7 &= -a_1^2 a_4 + 5 a_1 a_2 a_3 - 5 a_2^3 \\
b_5 a_1^9 &= -a_1^3 a_5 + 6 a_1^2 a_2 a_4 + 3 a_1^2 a_3^2 - 21 a_1 a_2^2 a_3 + 14 a_2^4 .
\end{aligned} \tag{28}$$

In (28) können nun die Beziehungen (27) eingeführt werden, und nach Trennen der reellen und imaginären Bestandteile ergibt jede der Gleichungen zwei lineare Gleichungen für b_{ν_1}, b_{ν_2}, aus welchen diese bestimmt sind. Zum Beispiel folgen aus der ersten Gleichung

$$b_{11}(01)_2 + b_{12}(01)_1 = 1$$

$$-b_{11}(01)_1 + b_{12}(01)_2 = 0$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
b_{11}\left((01)_1^2 + (01)_2^2\right) &= (01)_2 \\
b_{12}\left((01)_1^2 + (01)_2^2\right) &= (01)_1 .
\end{aligned} \tag{29a}$$

Zweckmäßiger erscheint es jedoch, die komplexen Koeffizienten als Vektoren

$$a_\nu = A_\nu e^{i\alpha} = A_\nu(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

$$A_\nu = \sqrt{a_{\nu_1}^2 + a_{\nu_2}^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_{\nu_2}}{a_{\nu_1}}$$

einzuführen. Wir erhalten dann aus der ersten Gleichung (28) die Darstellung

$$b_1 = B_1 e^{i\beta_1} = \frac{1}{A_1} e^{-i\alpha_1},$$

welche wegen (27) wieder zu (29a) führt.

Die zweite Gleichung ergibt

$$b_2 = -\frac{A_2}{A_1^3} e^{i(\alpha_2 - 3\alpha_1)}$$

und hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
b_{21} &= -\frac{A_2}{A_1^3} \cos(\alpha_2 - 3\alpha_1) \\
b_{22} &= -\frac{A_2}{A_1^3} \sin(\alpha_2 - 3\alpha_1)
\end{aligned} \tag{29b}$$

Die weiteren Gleichungen (28) führen zu dem System (29c), in welchem für $\nu = 3, 4, 5 \ldots$ zu setzen ist:

$$b_{\nu_1} = B_\nu \cos \beta_\nu, \quad b_{\nu_2} = B_\nu \sin \beta_\nu \tag{29c}$$

$$B_\nu A^{2\nu-1} = \sqrt{u_\nu^2 + v_\nu^2}$$

$$\beta_\nu = -(2\nu - 1)\,\alpha_1 + \operatorname{arctg} \frac{v_\nu}{u_\nu}$$

$$\begin{matrix} u_3 \\ v_3 \end{matrix} = -A_1 A_3 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\alpha_1 + \alpha_2) + 2 A_2^2 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (2\alpha_2)$$

$$\begin{matrix} u_4 \\ v_4 \end{matrix} = -A_1^2 A_4 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (2\alpha_1 + \alpha_4) + 5 A_1 A_2 A_3 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \\ - 5 A_2^3 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (3\alpha_2)$$

$$\begin{matrix} u_5 \\ v_5 \end{matrix} = -A_1^3 A_5 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (3\alpha_1 + \alpha_5) + 6 A_1^2 A_2 A_4 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) + \\ + 3 A_1^2 A_3^2 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (2\alpha_1 + 2\alpha)_3 - 21 A_1 A_2^2 A_3 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) + \\ + 14 A_2^4 \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (4\alpha_2).$$

Für die Berechnung der Koeffizienten $[ik]_1$ nach (8b) werden auch noch die Werte d_ν benötigt.

Falls die Breite φ_0 des Bezugspunktes bekannt ist, können diese nach (7b) bestimmt werden. Trifft dies nicht zu, so lassen sich die c_i aus den gegebenen $(ik)_1$ $(ik)_2$ ableiten. So folgt z. B. aus (4b)

$$c_1 = \frac{(10)_1}{a_{11}} = -\frac{(11)_1}{2a_{22}} \tag{30}$$

$$c_2 = \frac{1}{a_{11}} \left((20)_1 - a_{21} c_1^2\right) = \frac{-1}{2a_{22}} \left((21)_1 - 3a_{32} c_1^2\right)$$

$$c_3 = \frac{1}{a_{11}} \left((30)_1 - 2a_{21} c_1 c_2 - a_{31} c_1^2\right)$$

$$c_4 = \frac{1}{a_{11}} \left((40)_1 - 2a_{21} c_1 c_3 - a_{21} c_2^2 - 3a_{31} c_1^2 - a_{41} c_1^4\right)$$

$$c_5 = \frac{1}{a_{11}} \left((50)_1 - 2a_{21} c_1 c_4 - 2a_{21} c_2 c_3 - 3a_{31} c_1^2 c_3 - 3a_{31} c_1 c_2^2 - \right. \\ \left. - 4a_{41} c_3^3 - a_{51} c_1^5\right)$$

und ein entsprechendes System läßt sich aus (5 b) ablesen. Da die c_ν und d_ν Koeffizienten der inversen Reihen (3 a) (1 a) sind, können die d_ν aus den c_ν nach den Umkehrformeln (28) berechnet werden, wenn darin c, d an Stelle von a, b gesetzt wird.

Nach Ermittlung der b_ν und d_ν ergeben sich die $[ik]_1$ $[ik]_2$ aus den Formeln (8 b) (9 b).

Sind umgekehrt die Koeffizienten $(ik)_1$, $(ik)_2$ aus den vorgegebenen Werten $[ik]_1$ und $[ik]_2$ zu ermitteln, so werden erst aus (9 b) die b_ν entnommen und damit aus (8 b) die d_ν ermittelt. Die Umkehrung der Koeffizienten ergibt die a_ν c_ν, und mit diesen lassen sich nach (4 b) (5 b) die gesuchten Koeffizienten $(ik)_1$ $(ik)_2$ bestimmen.

5. Sonderfälle

Für Abbildungen mit Symmetrieeigenschaften zu einem geradlinig abgebildeten Meridian sind die Koeffizienten a_ν, b_ν reell. Die hierfür geltenden Beziehungen gehen daher aus den in den vorigen Abschnitten abgeleiteten hervor, wenn darin

$$a_{\nu_1} = a_\nu, \qquad b_{\nu_1} = b_\nu, \qquad a_{\nu_2} = b_{\nu_2} = 0$$

gesetzt wird. Wir erkennen aus (2 a), (2 b), daß die Reihen für x und y nun gemeinsam ebenso viele Glieder haben wie im allgemeinen Fall jede der Reihen, also $\frac{1}{2}\, n(n+3)$.

In der Reihe für x treten nur gerade Potenzen von l auf und in der Reihe für y nur solche Produkte $f^i\, l^k$, welche in der Reihe für x nicht vorkommen. Es ist daher nicht mehr nötig, die Koeffizienten derselben durch Indizes zu unterscheiden. Entsprechendes gilt für die Umkehrreihen.

$$\begin{aligned} x &= \sum (i,\, 2k) f^i\, l^{2k} \\ y &= \sum (i,\, 2k+1) f^i\, l^{2k+1} \end{aligned} \tag{24a}$$

$$i = 0,\, 1,\, 2 \ldots n$$
$$k = 0,\, 1,\, 2 \ldots n$$

$$\begin{aligned} f &= \sum [i,\, 2k] x^i y^{2k} \\ l &= \sum [i,\, 2k+1] x^i y^{2k+1} \end{aligned} \tag{25b}$$

Wir wollen für den praktischen Gebrauch noch die (ik) $[ik]$ für $n \leqq 5$ durch die $a_\nu b_\nu$ ausdrücken (siehe auch [5]) und verweisen wegen der Koeffizientenbedingungen auf [1].

$$
\begin{aligned}
(00) &= 0 \\
(10) &= a_1 c_1 \\
(01) &= a_1 \\[4pt]
(20) &= a_1 c_2 + a_2 c_1^2 \\
(11) &= 2 a_2 c_1 \\
(02) &= -a_2 \\[4pt]
(30) &= a_1 c_3 + 2 a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^2 \\
(21) &= 2 a_2 c_2 + 3 a_3 c_1^2 \\
(12) &= -3 a_3 c_1 \\
(03) &= -a_3 \\[4pt]
(40) &= a_1 c_4 + 2 a_2 c_1 c_3 + a_2 c_2^2 + 3 a_3 c_1^2 c_2 + a_4 c_1^4 \\
(31) &= 2 a_2 c_3 + 6 a_3 c_1 c_2 + 4 a_4 c_1^3 \\
(22) &= -3 a_3 c_2 - 6 a_4 c_1^2 \\
(13) &= -4 a_4 c_1 \\
(04) &= a_4 \\[4pt]
(50) &= a_1 c_5 + 2 a_2 c_1 c_4 + 2 a_2 c_2 c_3 + 3 a_3 c_1^2 c_3 + 3 a_3 c_1 c_2^2 + 4 a_4 c_1^3 c_2 + \\
&\quad + a_5 c_1^5 \\
(41) &= 2 a_2 c_4 + 6 a_3 c_1 c_2 + 3 a_3 c_2^2 + 12 a_4 c_1^2 c_2 + 5 a_5 c_1^4 \\
(32) &= -3 a_3 c_3 - 12 a_4 c_1 c_2 + 10 a_5 c_1^3 \\
(23) &= -4 a_4 c_2 - 10 a_5 c_1^2 \\
(14) &= 5 a_5 c_1 \\
(05) &= a_5
\end{aligned}
\tag{24 b}
$$

$$
\begin{aligned}
[00] &= 0 \\
[10] &= b_1 d_1 \\
[01] &= b_1 \\[4pt]
[20] &= b_2 d_1 + b_1^2 d_2 \\
[11] &= 2 b_2 \\
[02] &= -b_2 d_1 \\[4pt]
[30] &= b_3 d_1 + 2 b_1 b_2 d_2 + b_1 d_3 \\
[21] &= 3 b_3 \\
[12] &= -3 b_3 d_1 - 2 b_1 b_2 d_2 \\
[03] &= -b_3
\end{aligned}
\tag{25 b}
$$

$[40] = b_4 d_1 + 2 b_1 b_3 d_2 + b_2^2 d_2 + 3 b_1^2 b_2 d_3 + b_1^4 d_4$

$[31] = 4 b_4$

$[22] = -6 b_4 d_1 - 6 b_1 b_3 d_2 - 2 b_2^2 d_2 - 3 b_1^2 b_2 d_3$

$[13] = -4 b_4$

$[04] = b_4 d_1 + b_2^2 d_2$

$$[50] = b_5 d_1 + 2 b_1 b_4 d_2 + 2 b_2 b_3 d_2 + 3 b_1^2 b_3 d_3 + 3 b_1 b_2^2 d_3 + 4 b_1^3 b_2 d_4 + \\ + b_1^5 d_5$$

$[41] = 5 b_5$

$$[32] = -10 b_5 d_1 - 12 b_1 b_4 d_2 - 8 b_2 b_3 d_2 - 9 b_1^2 b_3 d_3 - 6 b_1 b_2^2 d_3 - \\ - 4 b_1^3 b_2 d_4$$

$[23] = -10 b_5$

$[14] = 5 b_5 d_1 + 2 b_1 b_4 d_2 + 6 b_2 b_3 d_2 + 3 b_1 b_2^2 d_3$

$[05] = b_5$

Sind die Koeffizienten a_ν b_ν rein imaginär, so sind $a_{\nu_1} = b_{\nu_1} = 0$. Aus (2) folgen in diesem Fall die für reelle Koeffizienten bestehenden Formeln, wenn y durch $-x$ und x durch y ersetzt werden.

$$x = -\sum (i, 2k+1) f^i l^{2k+1} \qquad (24\text{c})$$
$$y = \sum (i, 2k) f^i l^{2k}$$

$$i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$f = -\sum [i, 2k+1] x^i y^{2k+1}$$
$$l = \sum [i, 2k] x^i y^{2k}. \qquad (25\text{c})$$

Die Koeffizienten dieser Reihen können wieder nach (24b) (25b) berechnet werden.

Literatur:

[1] K. Rinner, Allgemeine Koeffizientenbedingungen in Reihen für konforme Abbildungen, ZfV 1944, S. 102–107 und S. 232.

[2] Jordan-Eggert, Handbuch d. Verm.Kunde, Bd. III/2, S. 145, Stuttgart 1948.

[3] K. Rinner, Umkehrung der Reihen für die dänische Abbildung. Mittlg. des Chefs f. Kriegskarten und Vermessungswesen, 1943, Heft 2.

[4] König-Weise, Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie, Bd. 1, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, S. 501 u. ff.

[5] K. Hubeny, Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Ellipsoides. Österr. ZfV, Sonderheft 13, Wien 1953.