BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Verzweigte Holomorphiehüllen

Von Günter Scheja in Münster

Vorgelegt von Herrn G. Aumann am 7. März 1958

Übersicht

Einleitung

Bei der systematischen Untersuchung der Existenzgebiete holomorpher Funktionen im komplexen Zahlenraum C^n beschränkte man sich lange Zeit[1] auf die unverzweigten Gebiete über dem C^n. Diese Einschränkung war durch den Stand der allgemeinen Topologie bedingt;[2] daher wird man bei einer Ausdehnung der Theorie auf sämtliche Stellen algebroiden Verhaltens von holomorphen Funktionen zunächst daran interessiert sein, verzweigte Bereiche über hinreichend allgemeinen topologischen Räumen zu untersuchen (§ 1). Dabei spielen unter den Hilfsmitteln, die man zur Konstruktion von Vereinigungen und Durchschnitten nichtschlichter Gebiete benötigt, die *Kontraktionen* eine grund-

[1] Vgl. H. Behnke und P. Thullen [3] (1934).

[2] Vgl. H. Behnke [1]; in diesem Bericht wird eine Übersicht über die Entwicklung seit 1932 gegeben.

legende Rolle, wie diejenigen Äquivalenzrelationen bezeichnet werden sollen, die wieder verzweigte Gebiete ergeben.[1]

Seit 1951 gibt es eine allgemeine Theorie der komplexen Räume,[2] die die nichtuniformisierbaren Singularitäten nicht mehr ausschließt, so daß die Möglichkeit zur Konstruktion von verzweigten Holomorphiehüllen gegeben ist, in denen nicht-uniformisierbare, d. h. „echte“ Verzweigungspunkte auftreten können.[3]

In § 2 werden verzweigte Gebiete (X, Φ) über komplexen Räumen und Familien F holomorpher Abbildungen von X in einen weiteren, fest vorgegebenen komplexen Raum Z betrachtet. Durch zwei Axiome läßt sich dann zu F eine *Holomorphiehülle* $\mathfrak{H}_{\mathrm{F}}$ – das größte Gebiet, in das sich die Elemente von F simultan holomorph fortsetzen lassen[4] – eindeutig geben. Bei unverzweigten Gebieten kommt man mit dem analogen Verfahren zur klassischen[5] unverzweigten Hülle H_{F}.

In § 3 beschränken wir uns auf Gebiete über dem C^n. Bezeichnet F die Familie aller holomorphen komplexwertigen Funktionen auf einem unverzweigten Gebiet, so stimmen $\mathfrak{H}_{\mathrm{F}}$ und H_{F} überein. Wir verwenden einen Satz über *schwach-konvexe* Gebiete zum Beweis, daß jedes holomorph-konvexe Gebiet über dem C^n ein

---

[1] Im analytischen Fall entsprechen den Kontraktionen spezielle analytische Zerlegungen. Siehe Fußnote 3 S. 14.

[2] *Normale komplexe Räume* werden in dieser Arbeit stets kurz komplexe Räume genannt. Die analytische Definition des komplexen Raumes findet sich bei H. Cartan [5] (1951/52). Wir benutzen hier die Möglichkeit, den komplexen Raum „geometrisch“ zu definieren, die auf H. Behnke und K. Stein [2] (1951) zurückgeht. Beide Definitionen erwiesen sich erst 1957 nach Ergebnissen von H. Grauert und R. Remmert [8] als gleichwertig.

[3] Es sei hier erwähnt, daß man selbst bei Mannigfaltigkeiten X über dem C^n (d. h. Gebieten ohne echte Verzweigungspunkte) i. a. mit einer echt verzweigten Holomorphiehülle zu rechnen hat, und zwar auch dann, wenn man die Konkretisierung von X über dem C^n ändert. Man betrachte beispielsweise die Mannigfaltigkeit, die man erhält, wenn man aus dem Existenzgebiet der Funktion $\sqrt{z_1 \cdot z_2}$ über dem C^n den einzigen nicht uniformisierbaren Verzweigungspunkt über dem Nullpunkt herausnimmt.

[4] Die Existenz eines solchen Gebietes wurde mit anderen Methoden auch von R. Iwahashi gezeigt in: Domaines spread on a complex space. J. Math. Soc. Japan (1957).

[5] Zur klassischen Theorie siehe H. Cartan [5] (1951/52), Exp. VII, VIII.

Holomorphiegebiet ist.[1] Der Beweis dieses Satzes geht über eine Abwandlung des klassischen unverzweigten Falles und ergibt auch, daß jedes unverzweigte Holomorphiegebiet stets Existenzgebiet einer holomorphen Funktion ist, die keine Verzweigungspunkte liefert. Die Ergebnisse dieses Paragraphen zeigen, daß die Operation $\mathfrak{H}_F$ die klassische Operation H_F sinnvoll enthält. –

Für die Anregungen zu dieser Arbeit und die stete Unterstützung möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Behnke meinen Dank aussprechen. Herrn Doz. Dr. R. Remmert danke ich für seine wertvollen Ratschläge.

§ 1. Verzweigte Bereiche über topologischen Räumen

In diesem Paragraphen seien alle topologischen Räume lokalkompakt und lokalzusammenhängend.[2]

1.1. (X, Φ) heißt ein *Bereich über* Y, wenn Φ den Raum X in den Raum Y abbildet, derart, daß jeder Punkt $x \varepsilon X$ eine offene Umgebung U besitzt, die von Φ auf ein (zusammenhängendes) Teilgebiet V von Y abgebildet wird, so daß (U, Φ, V) eine Überlagerung[3] ist. Das bedeutet genau, daß $\Phi|U$ eine eigentliche, nirgends – entartete,[4] stetige (und offene) Abbildung von U

---

[1] Bei der schwachen Konvexität wird zunächst vorausgesetzt, daß die kanonische Abbildung in die Holomorphiehülle injektiv ist. Diese Voraussetzung wurde für unverzweigte holomorph-konvexe Gebiete durch die Ergebnisse von K. Oka [9] (1953) unnötig. Im verzweigten Fall geht man so vor: Nach dem fundamentalen Satz von H. Grauert und R. Remmert ist (X, Φ) ein normaler Raum (siehe Fußnote 2 S. 10); nach Satz B von H. Grauert [8] (1955) ist der holomorph-konvexe Raum X dann holomorph-separabel. Nun ist es leicht zu zeigen, daß (X, Φ) ein Holomorphiegebiet ist (§ 3). Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch: siehe H. Grauert und R. Remmert [7] (1957).

[2] Zu den Bezeichnungen und Definitionen siehe stets: N. Bourbaki [4]. Ferner heißt eine Abbildung injektiv (surjektiv, bijektiv), wenn sie eineindeutig (auf, eineindeutig – auf) ist.

[3] Zum Begriff der Überlagerung siehe etwa K. Stein [11], § 1.

[4] Das Urbild jeder diskreten Punktmenge ist diskret.

auf V ist, wobei es eine nirgends zerlegende[1] Teilmenge A von V gibt, so daß $\Phi^{-1}(A)$ nirgends in U zerlegt und Φ lokaltopologisch auf $U - \Phi^{-1}(A)$ ist. – Der Bereich (X, Φ) heißt ein *Gebiet*, wenn X zusammenhängend ist.

Offenbar ist Φ stetig, offen und nirgends entartet. Ist Z ein weiterer Raum und τ eine stetige Abbildung von Z in X, dann ist (Z, τ) genau dann ein Bereich über X, wenn $(Z, \Phi \circ \tau)$ ein Bereich über Y ist.[2] Eine stetige spurpunkttreue[3] Abbildung τ von (Y, Φ) in einen Bereich $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})$ über Y ist also offen. Für Abbildungen von Gebieten über Y gibt es einen Identitätssatz:

Eine Abbildung ist durch das Bild eines Nichtverzweigungspunktes[4] festgelegt.

1.2. Wir betrachten in (X, Φ) über Y Äquivalenzrelationen R, die feiner als $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$ sind. Dann induziert Φ eine Abbildung Φ/R des Quotientenraumes X/R in Y. Wir nennen R eine *Kontraktion*, wenn $(X/\mathrm{R}, \Phi/\mathrm{R})$ ein Bereich über Y ist. R ist genau dann eine Kontraktion, wenn R offen und X/R ein T_2-Raum ist.[5]

Der (mengentheoretische) Durchschnitt $\sqcap_i \mathrm{R}_i$ einer Menge $\{\mathrm{R}_i\}$ von Kontraktionen ist i. a. nur auf dem unverzweigten Teil $\mathfrak{U}X$[6] von X eine Kontraktion. Man kann jedoch jede Kontraktion von $\mathfrak{U}X$ eindeutig nach X fortsetzen[7] und definiert so den Steinschen *Durchschnitt* $\bigwedge_i \mathrm{R}_i$ der Kontraktionen R_i. $\bigwedge_i \mathrm{R}_i$ ist die

---

[1] $E' \subseteq E$ *zerlegt* den Raum E *nirgends*, wenn für jede offene nicht-leere zusammenhängende Teilmenge W von E auch $W - E'$ diese drei Eigenschaften besitzt.

[2] Im analytischen Fall benötigt man einen Projektionssatz über analytische Mengen von R. Remmert [10] (Satz 23). Die nächste Folgerung (s. o.) macht jedoch keinen Gebrauch von der komplexen Struktur.

[3] *Spurpunkttreu:* $\tilde{\Phi} \circ \tau = \Phi$. Abbildungen von Bereichen in andere Bereiche über demselben Grundraum seien in dieser Arbeit stets stetig und spurpunkttreu. Bereiche werden identifiziert, wenn sie spurpunkttreu homöomorph sind.

[4] $x \in X$ heißt *Nichtverzweigungspunkt*, wenn Φ in x lokaltopologisch ist.

[5] Die Kontraktionen (X, Φ) entsprechen genau den spurpunkttreuen kontinuierlichen Zerlegungen von X im Sinne von K. Stein [11], p. 79–81.

[6] $\mathfrak{U}X$ bezeichnet die offene Menge der Nichtverzweigungspunkte in (X, Φ). $(\mathfrak{U}X, \Phi)$ ist der größte in (X, Φ) enthaltene unverzweigte Bereich.

[7] Man reduziert den Fall auf Überlagerungen und wendet dann Ergebnisse aus K. Stein [11], § 1, an.

gröbste Kontraktion, die feiner als jedes R_i ist. (Auf $\mathfrak{U}X$ stimmen STEINscher und mengentheoretischer Durchschnitt überein).

Man konstruiert nun eine *Vereinigung* von Gebieten $\{(X_j, \Phi_j)\}$ über Y in bezug auf ein Gebiet (X, Φ) über Y und feste Abbildungen $\tau_j \mid X \to X_j$, indem man die topologische Summe S der X_j durch die feinste der Kontraktionen R_i dividiert, bei denen $\{\tau_j\}$ eine Abbildung von X in S/R_i induziert. Diese feinste Kontraktion ist der STEINsche Durchschnitt aller Kontraktionen R_i der soeben genannten Art.

1.3. In bezug auf ein Gebiet (X, Φ) und Abbildungen[1] $\tau_\varkappa | X \to X_\varkappa$ definieren wie einen *Durchschnitt* der Gebiete $\{(X_\varkappa, \Phi_\varkappa) : \varkappa \in K\}$ als Vereinigung aller K-simultanen Zwischengebiete.

$(X_i, \Phi_i)\,\sigma_i$ heißt ein *Zwischengebiet* von (X, Φ) und $(X_\varkappa, \Phi_\varkappa)$, wenn σ_i eine Abbildung von (X, Φ) in das Gebiet (X_i, Φ_i) ist und wenn es eine Abbildung $\hat{\sigma}_{i\varkappa} \mid X_i \to X_\varkappa$ gibt mit $\hat{\sigma}_{i\varkappa} \circ \sigma_i = \tau_\varkappa$ ($\hat{\sigma}_{i\varkappa}$ ist eindeutig bestimmt). Das Zwischengebiet $(X_j, \Phi_j)\,\sigma_j$ heißt *größer gleich* $(X_i, \Phi_i)\,\sigma_i$, wenn es eine Abbildung $\varrho_{ij} \mid X_i \to X_j$ gibt mit $\varrho_{ij} \circ \sigma_i = \sigma_j$ (ϱ_{ij} ist eindeutig bestimmt). Durch diese Relation ist eine Ordnung in der Menge aller K-simultanen Zwischengebiete von (X, Φ) und den $(X_\varkappa, \Phi_\varkappa)$ gegeben. Diese Menge besitzt ein größtes Element, welches man als Vereinigung $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})$ aller K-simultanen Zwischengebiete erhält. Es gibt natürlich Abbildungen $\sigma \mid X \to \tilde{X}$ und $\hat{\sigma}_\varkappa \mid \tilde{X} \to X_\varkappa$ mit $\hat{\sigma}_\varkappa \circ \sigma = \tau_\varkappa$; ist ein Gebiet (X', Φ') mit einer Abbildung $\sigma' \mid \tilde{X} \to X'$ gegeben, so daß $(X', \Phi')_{\sigma' \circ \sigma}$ ein K-simultanes Zwischengebiet von (X, Φ) und den $(X_\varkappa, \Phi_\varkappa)$ ist, so ist σ' bijektiv (d. h. $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})_\sigma$ und $(X', \Phi')_{\sigma' \circ \sigma}$ sind äquivalent).

§ 2. Verzweigte Gebiete über komplexen Räumen und ihre Holomorphiehüllen

2.1. Ein verzweigter Bereich (X, Φ) über einem komplexen[2] Raum Y ist lokal durch eine *analytische* Überlagerung definiert (d. h. die Ausnahmemenge, über der die Verzweigungspunkte lie-

---

[1] Siehe Fußnote 3 S. 12.

[2] Siehe Fußnote 2 S. 10.

gen, ist eine analytische Menge). Somit gibt es eine Überdeckung von X mit Überlagerungen von Teilgebieten des C^n, die eine komplexe Struktur auf X definieren; dies ist die einzige komplexe Struktur auf X, für die Φ holomorph ist.[1] (X, Φ) wird stets auf diese Weise als komplexer Raum betrachtet. Holomorph ist eine stetige Abbildung f von X in einen komplexen Raum Z genau dann, wenn in der Umgebung eines jeden Nichtverzweigungspunktes die Abbildung $f \circ \Phi^{-1}$ holomorph ist. Eine Abbildung[2] τ von (X, Φ) in einen anderen Bereich $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})$ ist daher holomorph. Man sagt, f sei nach $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})$ (*über* die betrachtete Abbildung τ *holomorph*) *fortsetzbar*, wenn es eine holomorphe Abbildung $\tilde{f} \mid \tilde{X} \to Z$ gibt mit $\tilde{f} \circ \tau = f$.

Eine Kontraktion R in (X, Φ) liefert eine kanonische holomorphe Abbildung $\varphi \mid X \to X/\mathrm{R}$ und eine holomorphe Abbildung $\Phi/\mathrm{R} \mid X/\mathrm{R} \to Y$.[3] Jeder holomorphen Abbildung $f \mid X \to Z$ ist eine maximale Kontraktion R_f zugeordnet, über die sich f nach X/R_f fortsetzen läßt (zwei übereinanderliegende Nichtverzweigungspunkte werden identifiziert, wenn $f \circ \Phi^{-1}$ in ihnen gleiche Keime hat). – $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})_\sigma$ sei die Vereinigung der Gebiete (X_i, Φ_i) in bezug auf (X, Φ) und Abbildungen $\sigma_i \mid X \to X_i$. Ferner sei $f \mid X \to Z$ über σ_i fortsetzbar nach (X_i, Φ_i) für jeden Index i. Dann ist f über σ fortsetzbar nach $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})$.

Man erhält einen *universellen Bereich* (X^*, Φ^*) über Y von holomorphen Abbildungen in einen komplexen Raum Z aus einem Bereich $(X, \hat{\Phi})$, der aus allen Paaren von Überlagerungen von Teilgebieten aus Y und ihren holomorphen Abbildungen in Z besteht, und den man nach seiner universellen Abbildung in Z maximal kontrahiert.

Jede Zusammenhangskomponente (G_f, Φ_f) von (X^*, Φ^*) heißt *Holomorphiegebiet*;[4] (G_f, Φ_f) ist das (größte) Existenzgebiet einer

---

[1] Vgl. etwa H. Grauert und R. Remmert [7]. § 1.

[2] Siehe Fußnote 3 S. 12.

[3] Die Kontraktionen des Bereiches (X, Φ) mit abzählbarer Topologie entsprechen genau den spurpunkttreuen (normalen) analytischen Zerlegungen in X. Siehe dazu K. Stein [11], § 4. Man benötigt einen Satz von R. Remmert [10].

[4] $(\mathfrak{U} G_f, \Phi_f)$ heißt $\mathfrak{U}$Holomorphiegebiet (siehe Fußnote 6 S. 12); in der klassischen Theorie wurden nur solche („unverzweigten") Holomorphiegebiete betrachtet.

holomorphen Abbildung f in Z. Ist f eine holomorphe Abbildung eines Gebietes (X, Φ) über Y und läßt sich f über σ_i in ein Gebiet (X_i, Φ_i) fortsetzen, dann ist $(X_i, \Phi_i)_{\sigma_i}$ ein Zwischengebiet von (X, Φ) und (G_f, Φ_f).

2.2. Ein Gebiet $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})$ über Y heißt *Holomorphiehülle* $\mathfrak{H}_{\mathrm{F}}(X, \Phi)$ einer Familie F von holomorphen Abbildungen von (X, Φ) in einen komplexen Raum Z,[1] wenn folgendes gilt:[2]

I. Es gibt eine Abbildung $\sigma \mid X \to \tilde{X}$, über die sich jedes Element von F nach $\tilde{X}$ fortsetzen läßt.

II. Ist (X', Φ') ein Gebiet mit einer Abbildung $\sigma' \mid \tilde{X} \to X'$, so daß sich jedes Element von F über $\sigma' \circ \sigma$ nach X' fortsetzen läßt, dann ist σ' bijektiv.

Satz 1: Zu jedem Gebiet (X, Φ) mit einer Familie F gibt es eine eindeutig bestimmte Holomorphiehülle $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})_\sigma$ (auch σ ist eindeutig bestimmt).[3]

Man konstruiert $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})_\sigma$ als Durchschnitt der Holomorphiegebiete der Elemente aus F (siehe 1.3. und 2.1.). – Zwei Holomorphiehüllen müssen identisch sein mit ihrer Vereinigung nach Axiom II, da sich alle Elemente aus F in diese Vereinigung fortsetzen lassen (2. 1.).

Es läßt sich also von der Holomorphiehülle $\mathfrak{H}_{\mathrm{F}}(X, \Phi)$ zu (X, Φ) und F sprechen. Für ein Holomorphiegebiet (G_f, Φ_f) gilt $\mathfrak{H}_{\mathrm{F}}(G_f, \Phi_f) = (G_f, \Phi_f)$, wenn F die Funktion f enthält. Die Hüllenbildung ist involutorisch.

Die Abbildung σ von (X, Φ) in die Holomorphiehülle $\mathfrak{H}_{\mathrm{F}}$ ist genau dann injektiv,[4] wenn sich in X übereinanderliegende

---

[1] Die Beschränkung auf einen Wertebereich ist nicht notwendig.

[2] Siehe Fußnote 3 S. 12.

[3] Entgegen den Verhältnissen im klassischen unverzweigten Fall ist die Hülle $\mathfrak{H}_{\mathrm{F}}(X, \Phi)$ i. a. von der Abbildung Φ des komplexen Raumes X abhängig; so findet sich bei H. Grauert und R. Remmert [7] das Beispiel eines Holomorphiegebietes (G_f, Φ_f) über dem C^n, $n \geq 3$, mit der Eigenschaft, daß bei einer geeigneten holomorphen Abbildung Φ das Gebiet (G_f, Φ) über dem C^n nicht mehr mit seiner Holomorphiehülle (in bezug auf alle holomorphen Funktionen) übereinstimmt (Das Analogon zum Fortsetzungssatz von unverzweigten Etalierungen in die Holomorphiehülle gilt nicht). Untersuchungen hierüber sollen in einer späteren Arbeit veröffentlicht werden.

[4] Siehe Fußnote 2 S. 11.

Nichtverzweigungspunkte stets durch die Keime einer Funktion aus F trennen lassen ($\bigwedge_{f \in F} R_f = 1$).

2.3. Durch dieselben Axiome wie in 2. 2. läßt sich jedem unverzweigten Gebiet (X, Φ) eine eindeutig bestimmte unverzweigte Holomorphiehülle $H_F(X, \Phi)$ zuordnen. In sinngemäßer Abänderung ergibt sich dann Satz 1 für H_F, indem man nur die Verzweigungspunkte aus der Betrachtung ausschließt.

Jedem verzweigten Gebiet (X, Φ) ist sein unverzweigter offener Unterraum $\mathfrak{U}X$[1] zugeordnet. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{U}F$ die auf $\mathfrak{U}X$ beschränkte Familie F holomorpher Abbildungen von X. Dann gilt allgemein:

$$\mathfrak{U}\mathfrak{H}_F(X, \Phi) = H_{\mathfrak{U}F}(\mathfrak{U}X, \Phi).$$

§ 3. Holomorphiehüllen zu Familien holomorpher komplexwertiger Funktionen

3.1. Es seien (X, Φ) ein Gebiet über dem komplexen Raum Y und F eine Familie von holomorphen Funktionen auf X. Ferner sei die kanonische Abbildung σ in die Holomorphiehülle zu F injektiv.[2] Zu jedem vorgegebenen Punkt $x \in X$ kann man dann durch geeignete Linearkombination von Elementen aus F eine holomorphe Funktion auf X finden, die das Verzweigungsverhalten von X in der Umgebung von x beschreibt. (Es gilt sogar, wenn F alle endlichen Linearkombinationen seiner Elemente enthält: σ ist genau dann injektiv, wenn gilt: $\prod_{f \in F} R_f = 1$.) Falls Y und damit X eine abzählbare Basis besitzt, kann man unendliche Linearkombinationen herstellen; dann ist X sogar ein Teil gebiet eines Holomorphiegebietes.

3.2. Es sei $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})$ die Holomorphiehülle zu irgendeiner Familie F auf einem Gebiet über dem C^n. Dann ist $\mathfrak{U}\tilde{X}$ holomorph-konvex.

Nach Abschnitt 2.3. stimmt $(\mathfrak{U}\tilde{X}, \tilde{\Phi})$ nämlich mit der Hülle H zur Familie aller Funktionen auf $\mathfrak{U}\tilde{X}$ überein. Daher ist $(\mathfrak{U}\tilde{X}, \tilde{\Phi})$

---

[1] Siehe Fußnote 6 S. 12.

[2] Siehe Fußnote 2 S. 11.

ein $\mathfrak{U}$Holomorphiegebiet[1,2] und somit nach einem bekannten Satz von K. Oka[3] holomorph-konvex.

3.3. Es sei (X, Φ) ein unverzweigtes Gebiet über dem C^n und F die Familie aller holomorphen Funktionen auf X. Dann gilt:

$$\mathfrak{H}_F(X, \Phi) = H_F(X, \Phi),$$

d. h. mit der Hüllenbildung $\mathfrak{H}_F$ erhält man die klassische Theorie.

Denn $\mathfrak{U}\mathfrak{H}_F(X, \Phi) = H_F(X, \Phi)$ ist holomorph-konvex (s. o.), somit muß die kanonische Abbildung von $H_F(X, \Phi)$ in $\mathfrak{H}_F(X, \Phi)$ eigentlich und damit surjektiv sein.

3.4. Satz 2: Jedes holomorph-konvexe Gebiet (X, Φ) über dem C^n ist ein Holomorphiegebiet.

Man vgl. hier Fußnote 1 S. 11. Den letzten Teil des Beweises zu Satz 2 kann man so erhalten: Jedes holomorph-konvexe Gebiet (X, Φ) ist *schwach-konvex*, d. h. die kanonische Abbildung in die Holomorphiehülle ist injektiv, und die holomorph-konvexe Hülle einer kompakten Teilmenge von X *gerät nicht an den Rand von* (X, Φ). Die *Randzone* eines verzweigten Gebietes kann man nicht mehr mit maximalen Polyzylindern definieren wie im unverzweigten Fall; hier benutzt man zu ihrer Definition einen pseudometrischen Raum von ausgezeichneten *grobkonvexen* Teilmengen aus X, der eine abzählbare Basis besitzt. – Nach dem klassischen Konstruktionsverfahren erhält man eine Funktion, deren Holomorphiegebiet das schwach-konvexe Gebiet (X, Φ) ist.

Satz 3: Jedes schwach-konvexe Gebiet über dem C^n ist ein Holomorphiegebiet.

Es folgt nun unmittelbar, daß über dem C^n jedes $\mathfrak{U}$ Holomorphiegebiet auch ein Holomorphiegebiet ist, und daß für eine beliebige Holomorphiehülle $(\tilde{X}, \tilde{\Phi})$ stets $(\mathfrak{U}\tilde{X}, \tilde{\Phi})$ ein Holomorphiegebiet ist.

---

[1] Siehe Fußnote 4 S. 14.

[2] Siehe H. Cartan [5], Exp. VIII, Cor. 2 du th. 5.

[3] Vgl. K. Oka [9] (1953).

Literatur

[1] H. Behnke, Die analytischen Gebilde von holomorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Arch. Math. 6 (1955), 353–368.

[2] H. Behnke und K. Stein, Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Annalen 124 (1951), 1–16.

[3] H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. d. Math. 3 (1934), 1–115.

[4] N. Bourbaki, Topologie générale. Paris (1951).

[5] H. Cartan, Séminaire E. N. S., Paris (1951/52), hektographiert.

[6] H. Grauert, Charakterisierung der holomorph vollständigen Räume. Math. Annalen 129 (1955), 233–259.

[7] H. Grauert und R. Remmert, Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete. Math. Zeitschr. 67 (1957), 103–128.

[8] H. Grauert und R. Remmert, Sur les revêtements analytiques des variétés analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris 245 (1957), 918–921.

[9] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. – Domaines finis sans point critique intérieur. Jap. J. Math. 23 (1953), 97–155.

[10] R. Remmert, Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Annalen 133 (1957), 328–370.

[11] K. Stein, Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Annalen 132 (1956), 63–93.