

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Beiträge zum Wechselwirkungsproblem in linearisierter Überschallströmung\*

Von Hans J. Stetter in München

Mit 5 Figuren

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 3. Februar 1956

## Übersicht

§ 1. Das Wechselwirkungsproblem in linearisierter Überschallströmung	62
1.1 Formulierung des Problems	62
1.2 Gegenwärtiger Stand der Lösungsmethoden	63
§ 2. Beschreibung und Kritik des Verfahrens nach Nielsen	64
2.1 Die Zerlegung des Problems	64
2.2 Die Bestimmung von $\varphi^{(3)}$ nach Nielsen	66
2.3 Kritik am Nielsen-Verfahren in seiner bisherigen Form	67
§ 3. Allgemeine Berechnung von $\varphi^{(2)}$ und seinen Ableitungen	68
3.1 Lösung des Anfangswert-Randwert-Problems für die Wellengleichung	68
3.2 Integraldarstellungen für $\varphi^{(2)}$ und seine Ableitungen	69
3.3 Numerische Auswertung in allgemeinen Fällen	71
3.4 Geschlossene Auswertung für einen Spezialfall	71
§ 4. Behebung der mit der Fourier-Analyse zusammenhängenden Schwierigkeiten	72
4.1 Verbesserung der Konvergenz des Nielsen-Verfahrens	72
4.2 Die universelle Ergänzungsfunktion und die Berechnung der Hilfstabelle	74
§ 5. Allgemeine Berechnung der $\varphi_{2n}$ und $\varphi'_{2n}$	76
5.1 Die charakteristischen Funktionen $\bar{Y}_{2n}$ und $\bar{W}_{2n}$	76
5.2 Eine Taylor-Reihe für die $Y_{2n}$ und $W_{2n}$	78
5.3 Berechnung der $Y_{2n}$ und $W_{2n}$ mit einem Differenzenverfahren	81
5.4 Die Berechnung der $\varphi_{2n}$ und $\varphi'_{2n}$	83
§ 6. Numerische Beispiele	84
Literatur	86

\* Auszug aus einer Dissertation (Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule München, Juli 1955).

## § 1. Das Wechselwirkungsproblem in linearisierter Überschallströmung

### 1.1 Formulierung des Problems

Unter einem „*Wechselwirkungsproblem*“ wird im folgenden das Problem der Berechnung der Gasströmung um eine Rumpf-Tragflügel-Kombination verstanden. Es handelt sich dabei um die folgende Aufgabenstellung:

Gegeben: a) eine Rumpf-Tragflügel-Kombination  $K$  (Fig. 1)  
 b) eine Gasströmung  
 c) die Lage des Körpers a) in der Strömung b).

Gesucht: Das Strömungsfeld um  $K$ , insbesondere die auftretenden aerodynamischen Kräfte (Auftrieb, Widerstand).

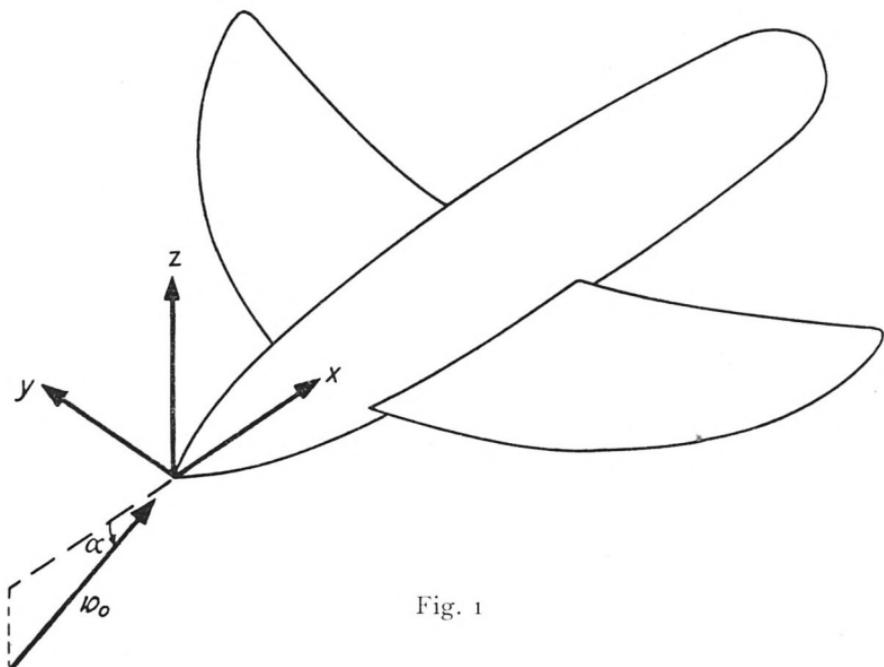


Fig. 1

Behandelt wird das Problem hier nur für eine *Überschall*-strömung und unter Voraussetzungen, die eine *linearisierte* Behandlung gestatten<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> Eine Darstellung der Theorie der linearisierten Überschallströmung findet sich z. B. in [1].

Der *schlanke* Flugkörper liegt so in einer *parallelen* Überschallströmung, daß diese nur unter *kleinen* Winkeln auf seine Oberfläche auftrifft.

Zur mathematischen Formulierung wird in den Flugkörper ein rechtwinkliges, kartesisches Koordinatensystem gemäß Fig. 1 gelegt und durch die Prandtlsche Affintransformation<sup>2</sup> die Machzahl  $M_0$  der Grundströmung zu  $\sqrt{2}$  normiert. Es ist dann das Potential  $\varphi$  einer Störströmung so zu bestimmen, daß deren Normalkomponenten überall auf der Oberfläche von  $K$  die Normalkomponenten der Grundströmung kompensieren, so daß die Gesamtströmung tangential zur Oberfläche von  $K$  verläuft.

Nach Vorgabe von  $K$  und des Vektors  $\mathbf{v}_0$  der Grundströmung im auf  $K$  bezogenen Koordinatensystem der Fig. 1 ist also eine Lösung  $\varphi(x, y, z)$  der normierten, linearisierten Potentialgleichung für das Störströmungspotential<sup>2</sup>

$$(1.1) \quad \nabla\varphi \equiv \varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0$$

zu berechnen, die der Anfangsbedingung

$$(1.2) \quad \varphi = 0 \quad \text{für } x < 0$$

und der Randbedingung

$$(1.3) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}_K} = -(\mathbf{n}_K, \mathbf{v}_0) \quad \text{auf der Oberfläche von } K$$

( $\mathbf{n}_K = \text{Normale von } K$ )

genügt.<sup>2</sup>

Abströmungsvorgänge bleiben im folgenden unberücksichtigt, d. h. es wird nur bis zu den Flügelhinterkanten gerechnet.

Wegen der mit der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer solchen Anfangswert-Randwert-Aufgabe der Wellengleichung zusammenhängenden Fragen sei z. B. auf [2] verwiesen.

## 1.2 Gegenwärtiger Stand der Lösungsmethoden

Zur Lösung der in 1.1 formulierten Aufgabe für eine einigermaßen allgemeine Gestalt von  $K$  hat Ferrari ein Iterationsverfahren entwickelt ([3]), das aber praktisch nie über die ersten beiden Schritte hinaus durchgeführt wurde.

<sup>2</sup> Vgl. z. B. [1].

Die beiden anderen wesentlichen Lösungsverfahren von Morikawa ([4]) und Nielsen ([5]) machen folgende zusätzliche Voraussetzungen bezüglich  $K$ :

- a) Der Rumpf im Bereich der Flügel und die Tragflügel selbst sind so beschaffen, daß im Rahmen der linearisierten Theorie die Randbedingung (1.3) auf einem Drehzylinder, bzw. in einer Ebene vorgeschrieben werden kann.
- b) Die Tragflügel haben reine *Überschallvorderkanten*.

Zur Lösung der so vereinfachten Aufgabe wird in [4] und [5] die Laplace-Transformation herangezogen. Morikawa kann aber nur für die Transformierte der Lösung eine Reihenentwicklung nach Bessel-Funktionen angeben. Eine für den Rechteckflügel mögliche näherungsweise Rücktransformation ist nur in einem kleinen Bereich brauchbar. Auf das Nielsen-Verfahren wird in § 2 näher eingegangen; man erhält dabei für die Lösung eine Fourier-Reihe, deren Konvergenz jedoch auch nur in einem Teilbereich des Flügels den praktischen Anforderungen genügt.

Durchgerechnet wurde mit den genannten Verfahren bis jetzt anscheinend nur der Fall des Rechteckflügels am fiktiv unendlich-langen Rumpf. Vergleiche mit experimentellen Daten (vgl. [6]) zeigen dabei, daß trotz der Linearisierung die Ergebnisse der Rechnung mit den tatsächlichen Druckverteilungen qualitativ und quantitativ recht gut übereinstimmen. So kommt einer weiteren Verbesserung der Methoden zur Lösung des linearisierten Wechselwirkungsproblems auch praktische Bedeutung zu.

## § 2. Beschreibung und Kritik des Verfahrens nach Nielsen

### 2.1 Die Zerlegung des Problems

In ihrer grundlegenden Arbeit [7] setzen Lagerstrom und Van Dyke das Potential  $\varphi$  von 1.1 aus drei Teilpotentialen additiv zusammen:  $\varphi^{(1)}$  ist das Störpotential für den *Rumpf* alleine;  $\varphi^{(2)}$  stellt auf den *Flügeln* die falschen Normalkomponenten von  $\varphi^{(1)}$  richtig, ohne den Rumpf zu berücksichtigen;  $\varphi^{(3)}$  endlich soll die falschen Normalkomponenten von  $\varphi^{(2)}$  auf dem Rumpf kompensieren, *ohne* auf den Flügeln neue Normalkomponenten entstehen zu lassen.

Demnach ist die Bestimmung von  $\varphi^{(1)}$  ein reines Rumpfproblem und die von  $\varphi^{(2)}$  ein reines Flügelproblem, während für  $\varphi^{(3)}$  Randbedingungen auf Rumpf *und* Flügeln vorgeschrieben sind. Das Nielsen-Verfahren bezieht sich nur auf die Bestimmung von  $\varphi^{(3)}$ , die dafür notwendige Kenntnis von  $\varphi^{(1)}$  und  $\varphi^{(2)}$  wird vorausgesetzt.

Unter Benutzung der Voraussetzungen a) und b) von 1.2 ergibt sich dabei in einem Zylinderkoordinatensystem nach Fig. 2 die folgende Aufgabenstellung für  $\varphi^{(3)}$  im Bereich  $z \geq 0$ :

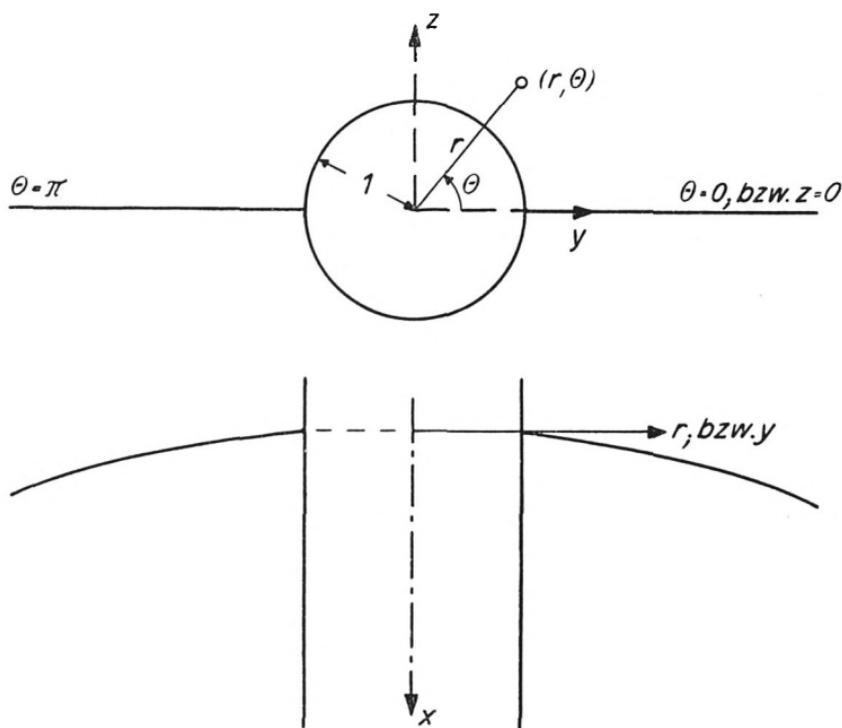


Fig. 2

Gesucht ist für  $z \geq 0$  die Lösung  $\varphi(x, r, \Theta)$  der Differentialgleichung

$$(2.1) \quad \nabla \varphi \equiv \varphi_{xx} - \varphi_{rr} - \frac{1}{r} \varphi_r - \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} = 0$$

mit

$$\begin{aligned}
 (A) \quad & \varphi = 0 && \text{für } x < 0 \\
 (2.2) \quad (R_1) \quad & \varphi_r(x, 1, \Theta) = f(x, \Theta) && \text{für } x \geq 0 \\
 & \varphi_\Theta(x, r, 0) = 0 \\
 (R_2) \quad & \varphi_\Theta(x, r, \pi) = 0 && \text{für } x \geq 0, \quad r \geq 1.
 \end{aligned}$$

Dabei ist  $f(x, \Theta)$  die negative Normalableitung von  $\varphi^{(2)}$  auf dem Rumpf ( $r = 1$ ).

## 2.2 Die Bestimmung von $\varphi^{(3)}$ nach Nielsen

Nielsen entwickelt  $f(x, \Theta)$  in eine Fourier-Reihe bezüglich  $\Theta$ , wobei aus Symmetriegründen nur die geraden  $\cos$ -Glieder (mit Koeffizienten  $f_{2n}(x)$ ) auftreten.

Setzt man entsprechend:

$$(2.3) \quad \varphi(x, r, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n}(x, r) \cos 2n\Theta,$$

so erhält man für die  $\varphi_{2n}(x, r)$  die Differentialgleichungen

$$(2.4) \quad \nabla^{(n)}[\varphi_{2n}] \equiv (\varphi_{2n})_{xx} - (\varphi_{2n})_{rr} - \frac{1}{r}(\varphi_{2n})_r + \frac{4n^2}{r^2}(\varphi_{2n}) = 0$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 (A) \quad & \varphi_{2n} = 0 && \text{für } x < 0 \\
 (2.5) \quad (R) \quad & (\varphi_{2n})_r(x, 1) = f_{2n}(x) && \text{für } x \geq 0.
 \end{aligned}$$

Damit ist die ursprüngliche, dreidimensionale Aufgabe auf eine Reihe von zweidimensionalen Aufgaben zurückgeführt.

Zur Lösung der Aufgaben (2.4)/(2.5) gibt Nielsen zwei Wege an (vgl. [5]):

1. Belegung der Achse mit Quellfunktionen  $g_{2n}(x)$  nach der Singularitätenmethode (ähnlich wie bei Karman-Moore). Die gesuchten Potentiale stellen sich dann als Faltungsintegrale dar. Dabei kann man die  $g_{2n}$  nach Nielsen aus den  $f_{2n}$  mit Hilfe eines Satzes von speziellen Funktionen  $M_{2n}(x)$ , deren Laplace-Transformierte bekannt ist, durch ein Faltungsintegral berechnen.

2. Direkter Ansatz von Faltungsintegralen über die  $f_{2n}(x)$ ; dabei benötigt man als Integralkerne einen anderen Satz von speziellen Funktionen  $W_{2n}(x, r)$ .

Nielsen sieht jedoch einen Weg zur Berechnung dieser  $W_{2n}(x, r)$  nur für  $r = 1$ , so daß diese Methode bei ihm nur für die Bestimmung der Druckwerte auf dem Rumpf benutzt werden kann.

Die wesentliche Leistung Nielsens besteht in der numerischen Berechnung der  $M_{2n}(x)$  und  $W_{2n}(x, 1)$  für kleine  $n$  und  $0 \leq x \leq 4$  (vgl. [5]).

### 2.3 Kritik am Nielsen-Verfahren in seiner bisherigen Form

- a) Es fehlen Angaben darüber, wie die Potentiale  $\varphi^{(1)}$  und  $\varphi^{(2)}$  in einem allgemeineren Fall bestimmt werden sollen. Es handelt sich zwar dabei um reine Rumpf-, bzw. Flügelprobleme (vgl. 2.1), doch bereitet insbesondere die Bestimmung der Normalkomponenten von  $\varphi^{(2)}$  auf dem Rumpf zusätzliche Schwierigkeiten, die bei normalen Flügelproblemen nicht auftreten.

Im § 3 dieser Arbeit wird deshalb die allgemeine Berechnung von  $\varphi^{(2)}$  und seinen Ableitungen behandelt.

- b) Die praktische Durchführung der Fourier-Analyse von  $f(x, \theta)$  wird für  $0 < x < 1$  durch auftretende Unstetigkeiten (Sprungstellen) behindert. Die Konvergenz der Fourier-Reihe für  $f(x, \theta)$  ist deshalb für kleine  $x$  sehr schlecht, was eine entsprechend mangelhafte Konvergenz der Fourier-Reihe für  $\varphi^{(3)}(x, r, \theta)$  für Stellen nahe hinter der von den Flügelansatzpunkten ausgehenden Mach-Linie hervorruft.

Eine Möglichkeit zur Umgehung dieser Schwierigkeiten wird im § 4 dieser Arbeit aufgezeigt.

- c) Die Methode 1 von 2.2 ist schon wegen der zweimaligen Integration sehr unbefriedigend. Darüber hinaus kommen in den Integranden der Faltungsintegrale für die  $g_{2n}$  zweierlei Singularitäten vor, deren Zusammentreffen eine logarithmische Singularität in den  $g_{2n}$  hervorruft. Eine genaue *numerische* Rechnung wird dadurch nahezu unmöglich.

Die Methode 2 von 2.2 ist aber nach Nielsen nur für  $r = 1$  verwendbar, so daß eine geeignete Methode für den Flügel

fehlt. Im § 5 dieser Arbeit wird deshalb eine Methode zur Berechnung der  $W_{2n}(x, r)$  für beliebige  $r \geq 1$  angegeben und die allgemeine Berechnung der  $\varphi_{2n}$  gezeigt.

### § 3. Allgemeine Berechnung von $\varphi^{(2)}$ und seinen Ableitungen

#### 3.1 Lösung des Anfangswert-Randwert-Problems für die Wellengleichung

Nach 2.1 handelt sich bei der Berechnung von  $\varphi^{(2)}$  darum, dieses Teilpotential so zu bestimmen, daß seine Normalkomponenten auf dem Flügel bestimmte Werte annehmen.

Es ergibt sich also für die Wellengleichung

$$(1.1) \quad \nabla^2 \varphi \equiv \varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0$$

im Bereich  $z \geq 0$  ein Anfangswert-Randwert-Problem folgender Art:

$$(3.1) \quad \begin{array}{ll} \text{(A)} & \varphi = 0 \quad \text{für } x < 0 \\ \text{(R)} & \varphi_z(x, y, 0) = c(x, y) \quad \text{vorgegeben für } x \geq 0. \end{array}$$

Aufgabenstellungen dieser Art lassen sich besonders einfach mit Hilfe der Distributionstheorie behandeln, deren Kenntnis hier vorausgesetzt wird.<sup>3</sup>

Zunächst hat man als Elementarlösung der Gleichung (1.1)<sup>4</sup>:

$$(3.2) \quad e(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{[x^2 - y^2 - z^2]_{+}^{\frac{1}{2}}} \\ = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2 - z^2}} & \text{für } x > \sqrt{y^2 + z^2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da man mit Hilfe dieser Elementarlösung spezielle Lösungen der inhomogenen Wellengleichung direkt angeben kann, versucht man, die Randbedingung (3.1.R) als Inhomogenität in die Gleichung (1.1) einzubauen.

<sup>3</sup> Etwa im Umfang der Veröffentlichung [8].

<sup>4</sup> Vgl. z. B. [8].

Durch Einsetzen der für  $z > 0$  mit  $\varphi$  übereinstimmenden Funktion

$$(3.3) \quad \psi(x, y, z) = \varphi(x, y, z) H(z) + \varphi(x, y, -z) H(-z)$$

in (1.1) erhält man (unter Berücksichtigung von  $\nabla\varphi = 0$ ):

$$(3.4) \quad \nabla\psi = -2\varphi_z(x, y, 0)\delta(z) = -2c(x, y)\delta(z).$$

Es ist dabei

$$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \geq 0 \\ 0 & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \delta(z) = \frac{d}{dz} H(z)$$

im Sinne der Distributionstheorie.

Eine spezielle Lösung von (3.4) ist dann:<sup>4</sup>

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \psi(x, y, z) &= -2c(x, y)\delta(z) * e(x, y, z) \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint \frac{c(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2]_+^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Diese Funktion erfüllt aber genau die Bedingungen (3.1):

Einmal verschwindet der Integrand nach der Definition von  $e$  für  $x < 0$  und zum andern folgt aus (3.4)

$$\lim_{z \rightarrow +0} \psi_z - \lim_{z \rightarrow -0} \psi_z = 2c(x, y),$$

während sich durch Differenzieren aus (3.5) ergibt:

$$\lim_{z \rightarrow +0} \psi_z + \lim_{z \rightarrow -0} \psi_z = 0.$$

Damit ist  $\lim_{z \rightarrow +0} \psi_z(x, y, z) = c(x, y)$ , d. h.  $\psi$  erfüllt auch (3.1.R).

Die Lösung von (1.1)/(3.1) wird also im Bereich  $z \geq 0$  durch (3.5) dargestellt.

### 3.2 Integraldarstellungen für $\varphi^{(2)}$ und seine Ableitungen

Bei der speziellen Aufgabenstellung für  $\varphi^{(2)}$  soll  $\varphi_z^{(2)}$  vor der Flügelvorderkante  $x = k(y)$  verschwinden, hinter derselben ist

<sup>4</sup> Vgl. z. B. [8].

es für  $|y| \geq 1$  durch  $\varphi_x^{(1)}(x, y, 0)$  festgelegt. Für  $|y| < 1$  kann man  $\varphi_x^{(2)}$  weitgehend willkürlich vorschreiben, jedoch muß es stetig sein und stetig an die Festlegung für  $|y| = 1$  anschließen.<sup>5</sup> Die ganze Vorschrift für die Randbedingung sei mit  $C(x, y)$  bezeichnet.

Nach 3.1 läßt sich dann  $\varphi^{(2)}$  direkt angeben:

$$(3.6) \quad \varphi^{(2)}(x, y, z) = -2 C(x, y) H(x - k(y)) * e(x, y, z) \\ = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{C(\xi, \eta) H(\xi - k(\eta))}{[(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 - z^2]_{\pm}^{\frac{1}{2}}} d\xi d\eta.$$

Nach der Differentiationsregel für Faltungsprodukte folgt daraus:

$$(3.7) \quad \varphi_x^{(2)}(x, y, z) = -2 [C_x(x, y) H(x - k(y)) \\ + C(k(y), y) \delta(x - k(y))] * e(x, y, z) \\ = -\frac{1}{\pi} \left[ \iint \frac{C_x(\xi, \eta) H(\xi - k(\eta))}{[(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 - z^2]_{\pm}^{\frac{1}{2}}} d\xi d\eta \right. \\ \left. + \int \frac{C(k(\eta), \eta) d\eta}{[(x - k(\eta))^2 - (y - \eta)^2 - z^2]_{\pm}^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Für die Normalableitungen auf dem Rumpf  $R(y^2 + z^2 = 1)$  gilt zunächst:

$$\varphi_n^{(2)} = \varphi_y^{(2)} \cos \Theta + \varphi_z^{(2)} \sin \Theta = y \varphi_y^{(2)} + z \varphi_z^{(2)}.$$

Durch Differentiation hinter dem Integral von (3.6), wie sie nach der Distributionstheorie erlaubt ist, und durch anschließende partielle Integration erhält man schließlich mit  $y^2 + z^2 = 1$ :

$$(3.8) \quad \varphi_n^{(2)}(\text{auf } R) \\ = +\frac{1}{\pi} \left[ \iint \frac{(1 - y \eta) (x - \xi) C_x(\xi, \eta) H(\xi - k(\eta))}{(1 - 2y \eta + \eta^2) [(x - \xi)^2 - (1 - 2y \eta + \eta^2)]_{\pm}^{\frac{1}{2}}} d\xi d\eta \right. \\ \left. + \int \frac{(1 - y \eta) (x - k(\eta)) C(k(\eta), \eta)}{(1 - 2y \eta + \eta^2) [(x - k(\eta))^2 - (1 - 2y \eta + \eta^2)]_{\pm}^{\frac{1}{2}}} d\eta \right].$$

<sup>5</sup> Auf diese Freiheit bei der Festlegung der Randbedingung kommen wir in 4.2 zurück.

Die Integrationsbereiche von (3.6), (3.7) und (3.8) sind dabei die im Innern der von den Aufpunkten ausgehenden Rückwärtsmachkegel liegenden Bereiche der  $x$ - $y$ -Ebene (bei den Doppelintegralen), bzw. der Flügelvorderkante (bei den einfachen Integralen).

### 3.3 Numerische Auswertung in allgemeinen Fällen

Nur in ganz speziellen Fällen (vgl. 3.4) ist die Auswertung von (3.7) und (3.8) mit Hilfe von elementaren Funktionen möglich.

Die numerische Auswertung der Integrale scheidet aber zunächst daran, daß die Integranden am Rand der Integrationsbereiche gegen Unendlich gehen. Man kann nun zeigen, daß es trotzdem stets möglich ist, die Integrale numerisch auszuwerten, wenn nur die zweite gemischte Ableitung  $C_{xy}$  von  $C(x, y)$  beschränkt ist.

Dazu führt man bei den Doppelintegralen durch

$$s = x - \xi, \quad t = \frac{y - \eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - z^2}}$$

neue Integrationsvariable ein, integriert zunächst über  $s$  und formt die verbleibenden einfachen Integrale über  $t$  partiell um, wodurch man zur arc sin-Funktion gelangt.

Bei den einfachen Integralen schließt man zunächst die „kritischen“ Stellen aus, ersetzt dort die Flügelvorderkante  $k(y)$  durch ein Geradenstück und führt dann die partielle Integration durch.

Wegen der Einzelheiten sei auf die Dissertation ([10]) verwiesen. In beiden Fällen ergibt sich als hinreichende Bedingung die Beschränktheit von  $C_{xy}$ .

Praktisch wird jedoch die direkte numerische Auswertung der Integrale (3.7) und (3.8) ohne den Einsatz von programmgesteuerten Rechenautomaten kaum möglich sein.

### 3.4 Geschlossene Auswertung für einen Spezialfall

Es soll die folgende Rumpf-Tragflügel-Kombination betrachtet werden:

Der Rumpf  $R$  sei ein (fiktiv) unendlich-langer Drehzylinder und die Tragflügel  $T$  seien eben, beide sollen unter dem gleichen Winkel  $\alpha \ll 1$  gegen die Grundströmung angestellt sein.

Es ergibt sich dann für  $\varphi^{(1)}$  (vgl. z. B. [9]):

$$\varphi^{(1)}(x, y, z) = \alpha \frac{z}{y^2 + z^2} \quad \text{für } y^2 + z^2 \geq 1$$

und daraus als Randbedingung für  $\varphi^{(2)}$ :

$$\frac{1}{\alpha} \varphi_x^{(2)}(x, y, 0) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } x < k(y) \\ -(1 + 1/y^2) & \text{für } |y| \geq 1 \\ -2 & \text{für } |y| \leq 1 \end{array} \right\} x \geq k(y).$$

Wählt man nun noch als Flügelvorderkanten gerade Linien:

$$k(y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } |y| \leq 1 \\ k \cdot (|y| - 1) & \text{für } |y| \geq 1 \quad (0 \leq k < 1), \end{array} \right.$$

dann lassen sich die Integrale (3.7) und (3.8) geschlossen auswerten und man erhält analytische Ausdrücke für  $\varphi_x^{(2)}$  auf  $R$  und  $T$  und für  $\varphi_n^{(2)}$  auf  $R$ . Diese Ausdrücke sind in der Dissertation ([10]) angegeben.

Mit  $\varphi_x^{(2)}$  hat man gleich den Beitrag des Potential  $\varphi^{(2)}$  zur Druckverteilung auf Rumpf und Flügeln, da diese in linearisierter Näherung nur von der Störströmungskomponente in der Grundströmungsrichtung abhängt. Da für die Bereiche der Flügel und des Rumpfes, die vor der von den Flügelansatzpunkten ausgehenden Machfläche liegen,  $\varphi^{(3)}$  keinen Beitrag mehr liefert, geben die Ausdrücke für  $\varphi_x^{(2)}$  schon die endgültige Druckverteilung in diesen Bereichen.

## § 4. Behebung der mit der Fourier-Analyse zusammenhängenden Schwierigkeiten

### 4.1 Verbesserung der Konvergenz des Nielsen-Verfahrens

Für die beim Nielsen-Verfahren notwendige Fourier-Analyse der Funktion  $f(x, \Theta)$  (vgl. 2.1) ergeben sich beträchtliche Schwierigkeiten aus der Tatsache, daß für  $x < \sin \Theta$   $f(x, \Theta) = 0$  ist, während es für  $x \rightarrow \sin \Theta + 0$  i. a. von Null verschiedene Werte annimmt. Für ein  $\bar{x} < 1$  ist also  $f(\bar{x}, \Theta)$  eine unstetige Funktion von  $\Theta$  (Fig. 3).

Damit ist nicht nur die Konvergenz der Fourier-Reihe von  $f(x, \theta)$  für  $x < 1$  sehr schlecht, sondern die numerische Bestimmung der Fourier-Koeffizienten selbst wird umständlich oder ungenau.

Man wird deshalb versuchen, für  $x < 1$  die Funktion  $f(x, \theta)$  im Bereich  $\arcsin x \leq \theta \leq \pi - \arcsin x$  durch eine Funktion  $\bar{f}(x, \theta)$  so zu ergänzen, daß  $f$  und  $\bar{f}$  ohne Knick ineinander übergehen und die Symmetrieverhältnisse gewahrt bleiben (Fig. 3).

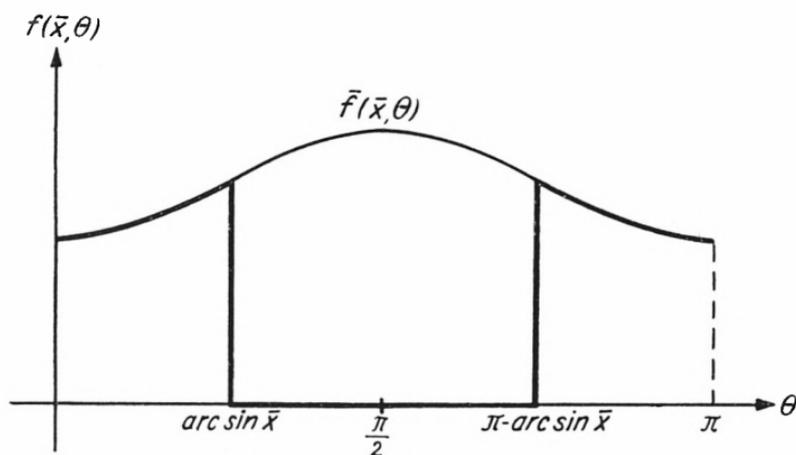


Fig. 3

Verwendet man dabei den naheliegenden Ansatz:

$$(4.1) \quad \bar{f}(x, \theta) = a(x) \sin \theta + b(x),$$

dann sind die Funktionen  $a(x)$  und  $b(x)$  eindeutig durch die Werte von  $f$  und  $f_\theta$  für  $\theta = \arcsin x$  bestimmt.

Die numerische Bestimmung der Fourier-Koeffizienten der „ergänzten“ Funktion

$$(4.2) \quad f^*(x, \theta) = \begin{cases} f(x, \theta) & \text{für } x \geq \sin \theta \\ \bar{f}(x, \theta) & \text{für } x \leq \sin \theta \end{cases}$$

bietet nun keine besonderen Schwierigkeiten mehr, man kann z. B. das Runge-Verfahren oder seine Verbesserung durch Filon ([11]) verwenden.

Man könnte nun aus den Koeffizienten von  $f^*$  ohne weiteres die von  $f$  gewinnen, da sich diejenigen von  $\bar{f}$  sogar analytisch an-

geben lassen. Dann hätte man zwar eine verbesserte Methode zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten von  $f$ , an der schlechten Konvergenz des Verfahrens für kleine  $x$  wäre jedoch nichts geändert.

Man wird deshalb statt dessen mit den Koeffizienten  $f_{2n}^*(x)$  der „falschen“ Funktion  $f^*(x, \theta)$  das Nielsen-Verfahren bis zu Ende durchführen und erst dann den Fehler dadurch berücksichtigen, daß man die sich aus  $\bar{f}(x, \theta)$  allein ergebende Druckverteilung subtrahiert, was wegen der durchgehenden Linearität des Verfahrens möglich ist.

Da jedoch die Bestimmung der Druckverteilung für  $\bar{f}$  naturgemäß für kleine  $x$  auf dieselben Konvergenzschwierigkeiten stößt wie für  $f$  selbst, gewinnt dieses Vorgehen erst dadurch praktische Bedeutung, daß man zeigen kann, daß man mit einer (bis auf einen Faktor) *universellen* Ergänzungsfunktion  $\bar{F}(x, \theta)$  auskommt, wenn man die Bestimmung von  $\varphi^{(2)}$  geeignet durchführt. Für diese Funktion  $\bar{F}$  wird man die Druckverteilung ein für allemal tabellieren und so die Konvergenzschwierigkeiten für alle weiteren Anwendungen vorweggenommen haben.

#### 4.2 Die universelle Ergänzungsfunktion und die Berechnung der Hilfstabelle

Daß man mit einer solchen universellen Ergänzungsfunktion auskommt, folgt nun aus der Tatsache, daß die Werte von  $f$  und  $f_\theta$  längs der Unstetigkeitslinie  $x = \sin \theta$  nur von den bei der Bestimmung von  $\varphi^{(2)}$  im Bereich  $|y| \leq 1$  vorgeschriebenen Randwerten abhängen (vgl. die Integrationsbereiche der betr. Integrale). Nach 3.2 kann man aber für  $|y| < 1$  die Randwerte von Stetigkeitsforderungen abgesehen willkürlich vorgeben.

Setzt man nun

$$(4.3) \quad \varphi_z^{(2)}(x, y, 0) \Big|_{|y| < 1} = \varphi_z^{(2)}(0, \pm 1, 0) = -C$$

in einem durch:  $0 \leq x \leq \sqrt{2 - \sqrt{y^2 + 1}}$ ;  $|y| \leq 1$  bestimmten Bereich der  $x$ - $y$ -Ebene (wobei  $C$  durch  $\varphi^{(1)}$  eindeutig bestimmt ist), dann erhält man für  $\bar{f}(x, \theta)$ :

$$(4.4) \quad \bar{f}(x, \theta) = C \sin \theta = C \cdot \bar{F}(x, \theta) \quad \text{für } x \leq \sin \theta.$$

Die universelle Funktion  $\bar{F}(x, \Theta)$ , für die man den dritten Schritt des Nielsen-Verfahrens durchzuführen und zu tabellieren hat, ist also gleich der bei  $x = \sin \Theta$  abgeschnittenen  $\sin$ -Funktion.

Wegen der Universalität von  $\bar{F}$  kann man die Berechnung der Hilfstabelle so durchführen, daß man für einen *Spezialfall* das Nielsen-Verfahren sowohl für das ursprüngliche  $f$  wie für auch die „ergänzte“ Funktion  $f^*$  durchführt und daraus durch Subtraktion die Verteilung für  $\bar{F}$  gewinnt. Als geeigneter Spezialfall bietet sich dabei der Fall des ebenen, gleichmäßig angestellten Rechteckflügels am nicht-angestellten, unendlich-langen Rumpf an.

Dieser Fall ist u. a. von Nielsen in [5] behandelt und liefert nach (4.3)  $C = +a$  (Anstellwinkel der Flügel), woraus sich nach (4.4)

$$\bar{f}(x, \Theta) = a \cdot \sin \Theta \quad \text{für } x \leq \sin \Theta$$

ergibt.

Andererseits erhält man nach (3.8):

$$f(x, \Theta) = -\varphi_n^{(2)}(\text{auf } R) = a z \quad \text{für } x \geq \sin \Theta.$$

Damit ergeben sich die Fourier-Koeffizienten  $f_{2n}^*$  zu:

$$\frac{1}{x} f_{2n}^*(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{für } n = 0 \\ -\frac{1}{\pi} \frac{4}{4n^2 - 1} & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

Aus diesen  $f_{2n}^*$  kann man dann nach § 5 die zu  $f^*$  gehörige Druckverteilung berechnen.

Die Druckverteilung für  $f$  ist von Nielsen in [5] angegeben, allerdings sind die Werte im Bereich kleiner  $x - |y| + 1$  infolge der in 2.3 b) und c) genannten Bedenken unzuverlässig. Für diesen speziellen Fall lassen sich aber diese Werte durch andere Verfahren noch verbessern, außerdem genügt für die Hilfstabelle eine Genauigkeit von etwa 1%, da bei der linearisierten Rechnung eine größere Genauigkeit sinnlos ist.

Nach der Aufstellung der Hilfstabelle können dann weitere, allgemeinere Fälle des Wechselwirkungsproblems ohne Konvergenzschwierigkeiten nach dem Nielsen-Verfahren durchgerechnet werden. Da die  $f_{2n}^*$  mit  $n^2$  kleiner werden, genügt die Berücksichtigung der Fourier-Komponenten bis etwa  $n = 5$ .

## § 5. Allgemeine Berechnung der $\varphi_{2n}$ und $\varphi'_{2n}$

### 5.1 Die charakteristischen Funktionen $\bar{Y}_{2n}$ und $\bar{W}_{2n}$

Zur Lösung der Anfangswert-Randwert-Aufgabe (2.4)/(2.5), die den dritten und letzten Schritt des Nielsen-Verfahrens ausmacht, sollen *charakteristische Funktionen*<sup>6</sup> eingeführt werden, mit deren Hilfe sich die  $\varphi_{2n}(x, r)$  und ihre  $x$ -Ableitungen durch eine einfache Faltung aus den  $f_{2n}(x)$  gewinnen lassen (vgl. 2.2 und 2.3 c)).

Es seien die  $\bar{Y}_{2n}$  und die  $\bar{W}_{2n}$  für  $r \geq 1$  Lösungen der Differentialgleichungen (2.4) mit den Anfangs- und Randbedingungen:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \text{(A)} \quad \bar{Y}_{2n}(x, r) &= 0 \quad \text{für } x < 0 \\ \text{(R)} \quad (\bar{Y}_{2n})_r(x, 1) &= \delta(x), \end{aligned}$$

bzw.

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \text{(A)} \quad \bar{W}_{2n}(x, r) &= 0 \quad \text{für } x < 0 \\ \text{(R)} \quad (\bar{W}_{2n})_r(x, 1) &= \delta'(x). \end{aligned}$$

Die Lösungen sind nach [2] eindeutig bestimmt, da bei homogenen Randbedingungen die Lösung identisch verschwinden würde. Die Existenz wird im weiteren durch Konstruktion gezeigt werden.

Zunächst gilt jedenfalls:

$$(5.3) \quad (\bar{Y}_{2n})_x(x, r) = \bar{W}_{2n}(x, r),$$

da die  $(\bar{Y}_{2n})_x$  gerade die für die  $\bar{W}_{2n}$  gestellte Aufgabe lösen.

Bildet man nun die Faltungsprodukte in  $x$   $f_{2n}(x) * \bar{Y}_{2n}(x, r)$  und setzt man  $f_{2n}(x) = 0$  für  $x < 0$  (die  $f_{2n}$  sind nur für  $x \geq 0$  definiert), dann kann man durch Einsetzen zeigen, daß diese Faltungsprodukte genau die Aufgaben (2.4)/(2.5) lösen. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung gilt also:

$$(5.4) \quad \varphi_{2n}(x, r) = f_{2n}(x) * \bar{Y}_{2n}(x, r).$$

<sup>6</sup> Die Bezeichnung wurde von Nielsen übernommen.

Ebenso erhält man die für die Druckverteilung wichtigeren Ableitungen  $\varphi'_{2n}(x, r) = (\varphi_{2n})_x(x, r)$  zu:

$$(5.5) \quad \varphi'_{2n}(x, r) = f_{2n}(x) * \bar{W}_{2n}(x, r).$$

Die Aufstellung der charakteristischen Funktionen – tatsächlich handelt es sich wenigstens bei den  $\bar{W}_{2n}$  um Distributionsoperatoren im Sinne von L. Schwartz (vgl. [8]) – läßt sich zurückführen auf die Berechnung von *Hilfsfunktionen*  $Z_{2n}, Y_{2n}$  und  $W_{2n}$ .

Es seien nämlich die  $Z_{2n}(x, r)$  die Lösungen der folgenden *charakteristischen* Anfangswert-Randwert-Aufgaben für die Differentialgleichungen (2.4) im Bereich  $r \geq 1$ :

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \text{(C)} \quad Z_{2n}(x, r) &= 0 \quad \text{für } x - r + 1 = 0 \\ \text{(R)} \quad (Z_{2n})_r(x, 1) &= 1. \end{aligned}$$

Die  $Z_{2n}$  sind durch (5.6) eindeutig bestimmt im abgeschlossenen Bereich  $x - r + 1 \geq 0; r \geq 1$  (Fig. 4). Sie existieren min-

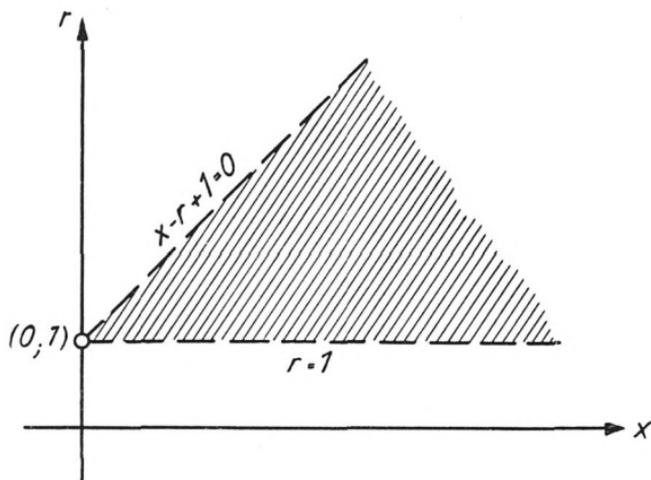


Fig. 4

destens in einer gewissen Umgebung des Punktes  $(0, 1)$  und sind dort zweimal stetig differenzierbar.<sup>7</sup> In dem Bereich  $x - r + 1 < 0; r \geq 1$ , in dem die  $Z_{2n}$  nicht eindeutig festliegen, sollen sie so fortgesetzt sein, daß sie samt ihren zweiten Ableitungen bei  $x - r + 1 = 0$  stetig sind.

<sup>7</sup> Wegen des tatsächlichen Existenzbereichs vgl. 5.3 und [12].

Weiter seien

$$(5.7) \quad Y_{2n}(x, r) = (Z_{2n})_x(x, r) \quad \text{und}$$

$$(5.8) \quad W_{2n}(x, r) = (Y_{2n})_x(x, r).$$

Da man die  $Y_{2n}$  und  $W_{2n}$  auch als Lösungen von charakteristischen Anfangswert-Randwert-Problemen vom Typ (5.6) definieren kann, ist ihre stetige Differenzierbarkeit bis zur zweiten Ableitung ebenfalls gesichert.

Setzt man nun:

$$(5.9) \quad \bar{Z}_{2n}(x, r) = Z_{2n}(x, r) \cdot H(x - r + 1),$$

was einem „Abschneiden“ der  $Z_{2n}$  längs  $x - r + 1 = 0$  entspricht, dann kann man zeigen, daß auch die  $\bar{Z}_{2n}$  im Distributionssinn Lösungen von (2.4) sind.

Die  $x$ -Ableitungen der  $\bar{Z}_{2n}$  erfüllen deshalb ebenfalls (2.4), außerdem gilt für sie aber auch (5.1.A) und (5.1.R). Das letztere folgt aus (5.9) durch Differentiation unter mehrmaliger Berücksichtigung von (5.6). Die  $(\bar{Z}_{2n})_x$  sind also identisch mit unseren  $\bar{Y}_{2n}$ .

Damit hat man für die  $\bar{Y}_{2n}$  durch Ableitung von (5.9) mit (5.6.C):

$$(5.10) \quad \bar{Y}_{2n}(x, r) = Y_{2n}(x, r) \cdot H(x - r + 1)$$

und damit nach (5.3) für die  $\bar{W}_{2n}$ :

$$(5.11) \quad \bar{W}_{2n}(x, r) = W_{2n}(x, r) \cdot H(x - r + 1) + Y_{2n}(r - 1, r) \delta(x - r + 1).$$

Die Bestimmung der charakteristischen Funktionen ist damit auf die Berechnung der  $Y_{2n}$  und  $W_{2n}$  zurückgeführt.

## 5.2 Eine Taylor-Reihe für die $Y_{2n}$ und $W_{2n}$

Es sollen die Koeffizienten einer Taylor-Reihe folgender Art für die  $Y_{2n}(x, r)$  bestimmt werden:

$$(5.12) \quad Y_{2n}(x, r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[ \frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n} \right]^{(0)}(r) \cdot (x - r + 1)^m \quad (r \geq 1).$$

Dabei sind die  $Y_{2n}(x, r)$  für ein beliebiges, aber festes  $r \geq 1$  als Funktionen von  $x$  alleine aufgefaßt und in die Taylor-Reihe um den Punkt  $(r-1, r)$  entwickelt (vgl. Fig. 4). Die partiellen Ableitungen der  $Y_{2n}$  für  $x = r-1$  sind dabei mit einem oberen Index<sup>(0)</sup> gekennzeichnet und als Funktionen von  $r$  alleine geschrieben.

Die Existenz und zweimalige stetige Differenzierbarkeit der  $\frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n}^{(0)}(r)$  folgt daraus, daß sie als Lösungen von bestimmten charakteristischen Anfangswert-Randwert-Aufgaben dargestellt werden können (vgl. die Dissertation [10]).

Die sukzessive Berechnung der  $\frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n}^{(0)}(r)$  kann nun so erfolgen:

Es gilt für jedes  $m \geq 0$ :

$$(5.13) \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n} \right] \Big|_{x=r-1} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n} \right]^{(0)}(r).$$

Weiter muß für ein  $\frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n}$  als Lösung der Gleichung (2.4) auch die in 5.3 zu entwickelnde charakteristische Gleichung (5.20.II) gelten, die unter Berücksichtigung der Beziehung (5.13) für  $\frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n}$  für  $x = r-1$  die Gestalt annimmt:

$$(5.14) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n} \right) \right]^{(0)}(r) \\ & = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n} \right) \right]^{(0)}(r) - \frac{4m^2}{r^2} \left[ \frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n} \right]^{(0)}(r). \end{aligned}$$

Es sei nun  $\frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n}^{(0)}(r)$  bereits bekannt. Dann stellen (5.13) und (5.14) ein System — bestehend aus einer linearen Gleichung und einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung — für die beiden unbekannt Funktionen von  $r$ :

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} Y_{2n}^{(0)}(r) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^m \partial r} Y_{2n}^{(0)}(r) \quad \text{dar.}$$

Als Anfangsbedingung für (5.14) hat man dabei wegen (5.5.R) und (5.7):

$$(5.15) \quad \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^m \partial r} Y_{2n}^{(0)}(1) \stackrel{!}{=} 0.$$

Das System (5.13) + (5.14)/(5.15) läßt sich nun *allgemein* lösen und liefert somit eine Rekursionsformel, die die Berechnung von  $\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} Y_{2n}^{(0)}$  und  $\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^m \partial r} Y_{2n}^{(0)}$  aus  $\frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n}^{(0)}$  für  $m \geq 0$  gestattet.

Man erhält:

$$(5.16) \quad \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} Y_{2n}^{(0)}(r) = \frac{d}{dr} \left[ \frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n} \right]^{(0)}(r) \quad (m \geq 0) \\ - \frac{1}{2\sqrt{r}} \int_1^r \sqrt{\varrho} \left( \frac{4n^2}{\varrho^2} + \frac{d^2}{d\varrho^2} \right) \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n}^{(0)}(\varrho) \right) d\varrho$$

und eine ähnliche Formel für  $\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^m \partial r} Y_{2n}^{(0)}(r)$ .

Die zur Benützung der Rekursionsformel notwendigen Ausgangsfunktionen  $Y_{2n}^{(0)}(r)$  ( $m = 0$ ) lassen sich gewinnen, indem man die Gleichungen (5.13) und (5.20.II) für die  $Z_{2n}(x, r)$  längs  $x = r - 1$  ansetzt, die Anfangsbedingung (5.6.R) verwendet und (5.6.C) berücksichtigt. Es ergibt sich so:

$$(5.17) \quad Y_{2n}^{(0)}(r) = - \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Die Rekursionsformel (5.16) mit den Ausgangsfunktionen (5.17) läßt sich am einfachsten dadurch auswerten, daß man den speziellen Ansatz:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} Y_{2n}^{(0)}(r) = \sum_{v=0}^m a_{2n,v}^{(m)} \cdot r^{-\left(v + \frac{1}{2}\right)} \quad (m \geq 0, n \geq 0)$$

macht und durch Einsetzen in (5.16) entsprechende Rekursionsformeln für die  $a_{2n,v}^{(m)}$  gewinnt. Sie sind in der Dissertation ([10]) angegeben, außerdem die numerischen Werte für die  $a_{2n,v}^{(m)}$  für kleine  $m$  und  $n = 0$ .

Aus der Reihe (5.12) lassen sich entsprechende Reihen für  $(Y_{2n})_x = W_{2n}$  und für  $(Y_{2n})_r$  ableiten, deren Koeffizienten sich ganz analog berechnen lassen.

5.3 Berechnung der  $Y_{2n}$  und  $W_{2n}$  mit einem Differenzenverfahren

Zur numerischen Lösung des charakteristischen Anfangswert-Randwert-Problems für die  $Y_{2n}(x, r)$  (vgl. 5.1):

$$(5.18) \quad \nabla^{(n)}[Y_{2n}] \equiv (Y_{2n})_{xx} - (Y_{2n})_{rr} - \frac{1}{r}(Y_{2n})_r + \frac{4n^2}{r^2} Y_{2n} = 0$$

mit

$$(5.19) \quad \begin{array}{ll} \text{(C)} & Y_{2n}(r-1, r) = -\frac{1}{\sqrt{r}} \quad \text{wegen (5.17)} \\ \text{(R)} & (Y_{2n})_r(x, 1) = 0 \quad \text{wegen (5.6.R)} \end{array}$$

wird ein sog. Charakteristikenverfahren verwendet, wie es in [13] ausführlich dargestellt ist.

Dabei wird die Gleichung (5.18) zunächst durch ein äquivalentes System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen für die drei Funktionen von  $x$  und  $r$ :  $Y_{2n}$ ,  $W_{2n}$  und  $(Y_{2n})_r$  ersetzt. In diesem sog. charakteristischen System von (5.18) kommen nur Differentiationen in den charakteristischen Richtungen von (5.18) vor:

$$(5.20) \quad \begin{array}{ll} \text{(I) a)} & \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}\right) Y_{2n} = W_{2n} + (Y_{2n})_r \quad \text{oder} \\ & \text{b)} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial r}\right) Y_{2n} = W_{2n} - (Y_{2n})_r \\ \text{(II)} & \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}\right) (W_{2n} - (Y_{2n})_r) = \frac{1}{r}(Y_{2n})_r - \frac{4n^2}{r^2} Y_{2n} \\ \text{(III)} & \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial r}\right) (W_{2n} + (Y_{2n})_r) = \frac{1}{r}(Y_{2n})_r - \frac{4n^2}{r^2} Y_{2n}. \end{array}$$

Die Gleichungen (5.20) werden dann durch *Differenzengleichungen* ersetzt, wobei man zweckmäßigerweise symmetrische Differenzenquotienten verwendet.

In einem Gitternetz aus den Punkten, für die

$$(5.21) \quad x - r + 1 = \lambda \quad \text{und} \quad x + r - 1 = \mu$$

ganzahlige Vielfache einer Größe  $2h$  sind, schreibt sich das Differenzengleichungssystem von (5.20) folgendermaßen (wegen der Bedeutung der Indizes vgl. Fig. 5, die Indizes  $2n$  sind weggelassen):

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \text{a) } \frac{1}{2\hbar} [Y_0 - Y_2] = W_1 + (Y_r)_1 \\
 & \text{b) } \frac{1}{2\hbar} [Y_0 - Y_4] = W_3 - (Y_r)_3 \\
 \text{(5.22)} \quad & \\
 \text{(II)} \quad & \frac{1}{2\hbar} [W_0 - (Y_r)_0 - W_2 + (Y_r)_2] = \frac{1}{r_1} (Y_r)_1 - \frac{4n^2}{r_1^2} Y_1 \\
 \text{(III)} \quad & \frac{1}{2\hbar} [W_0 + (Y_r)_0 - W_4 - (Y_r)_4] = \frac{1}{r_3} (Y_r)_3 - \frac{4n^2}{r_3^2} Y_3.
 \end{aligned}$$

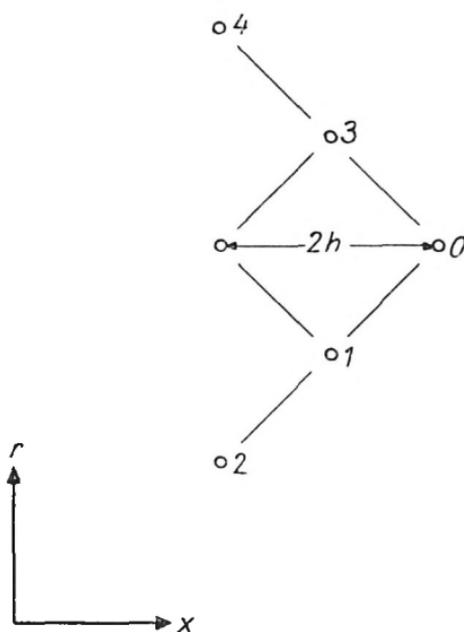


Fig. 5

Die Auflösung von (5.22) nach  $Y_0$ ,  $W_0$  und  $(Y_r)_0$  ergibt:

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= \frac{1}{2} [Y_2 + Y_4] + \hbar [W_1 + W_3 + (Y_r)_1 - (Y_r)_3] \\
 W_0 &= \frac{1}{2} [W_2 + W_4 - (Y_r)_2 + (Y_r)_4] \\
 \text{(5.23)} \quad & + \hbar [(Y_r)_1/r_1 + (Y_r)_3/r_3 - 4n^2 (Y_1/r_1^2 + Y_3/r_3^2)] \\
 (Y_r)_0 &= \frac{1}{2} [-W_2 + W_4 + (Y_r)_2 + (Y_r)_4] \\
 & + \hbar [-(Y_r)_1/r_1 + (Y_r)_3/r_3 - 4n^2 (Y_1/r_1^2 + Y_3/r_3^2)].
 \end{aligned}$$

Damit können die Werte von  $Y_{2n}$ ,  $W_{2n}$  und  $(Y_{2n})_r$  im Punkt 0 berechnet werden, wenn sie in den Punkten 1, 2, 3 und 4 bekannt sind

Man kann so sukzessiv die Funktionswerte in immer neuen Parallelreihen  $\lambda = k \cdot 2h$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) (vgl. (5.21)) berechnen, wenn die Werte für  $\lambda = 0$  und  $\lambda = 2h$  bekannt sind. Diese ergeben sich aber für  $\lambda = 0$  direkt aus Abschn. 5.2 und für  $\lambda = 2h$  aus den dort entwickelten Taylor-Reihen mit genügender Genauigkeit.

Für die Punkte mit  $r = 1$  und  $r = 1 + h$  ist eine Abänderung des Algorithmus (5.22) notwendig. Für  $r = 1$  benutzt man dabei statt (5.22.II) die Randbedingung (5.19.R) und für  $r = 1 + h$  setzt man in (5.22.II) nur einseitige Differenzenquotienten an.

Daß dieses Verfahren „konvergiert“, d. h. daß bei hinreichend kleinem  $h$  die mit dem Differenzenverfahren gewonnenen Funktionswerte von den wahren Werten beliebig wenig abweichen, ist in [12] bewiesen, wo auch die zugehörigen Existenzbeweise geführt sind. Damit ist also ein Verfahren gewonnen, das die Berechnung der  $Y_{2n}$  und  $W_{2n}$  und damit nach (5.10) und (5.11) die Aufstellung der charakteristischen Funktionen  $\bar{Y}_{2n}$  und  $\bar{W}_{2n}$  im ganzen Bereich  $x - r + 1 \geq 0$ ;  $r \geq 1$  gestattet.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß sich dieses Verfahren sehr gut für den Einsatz von programmgesteuerten Rechenanlagen eignet, mit deren Hilfe es in kurzer Zeit durchgeführt werden kann.

#### 5.4 Die Berechnung der $\varphi_{2n}$ und $\varphi'_{2n}$

Die gesuchten Lösungen  $\varphi_{2n}$  und  $\varphi'_{2n}$  des dritten Schritts des Nielsen-Verfahrens (vgl. 2.2 und 5.1) sind nach (5.4) und (5.5) mit Hilfe der  $\bar{Y}_{2n}$  und  $\bar{W}_{2n}$  darstellbar.

Die Umformung der Faltungsprodukte zu gewöhnlichen Integralen unter Benutzung von (5.10), (5.11) und (5.17) liefert dabei:

$$(5.24) \quad \varphi_{2n}(x, r) = \int_0^{x-r+1} f_{2n}(\xi) Y_{2n}(x - \xi, r) d\xi \quad \text{und}$$

$$(5.25) \quad \varphi'_{2n}(x, r) = \int_0^{x-r+1} f_{2n}(\xi) W_{2n}(x - \xi, r) d\xi - \frac{1}{\sqrt{r}} f_{2n}(x - r + 1)$$

oder entsprechende Darstellungen.

Die Formel (5.25) geht für  $r = 1$  in eine bei Nielsen in [5] angegebene Formel über (vgl. 2.2, Methode 2).

Nach den Ausführungen der beiden vorhergehenden Abschnitte ist aber auch das ursprüngliche Problem (2.4)/(2.5) des Nielsen-Verfahrens direkt für die numerische Behandlung nach dem Charakteristikenverfahren geeignet. Die notwendigen Anfangsdaten für  $x = r - 1$  erhält man aus (5.24) und (5.25), während man für die Werte auf der ersten Parallelreihe eine Taylorentwicklung wie in 5.2 ausführen kann. Allerdings erscheint eine solche direkte Berechnung der  $\varphi_{2n}$  und  $\varphi'_{2n}$  nur dann empfehlenswert, wenn eine programmgesteuerte Rechenanlage zur Verfügung steht.

## § 6. Numerische Beispiele

In der Dissertation ([10]) wird die in § 3 gewonnene analytische Darstellung von  $\varphi_n^{(2)}$  auf dem Rumpf für den Fall des Rechteckflügels am angestellten unendlich-langen Zylinderrumpf numerisch ausgewertet und für dieses  $\varphi_n^{(2)}$  die Fourier-Analyse nach § 4 durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabellen und Schaubildern dargestellt.

Weiter werden in der Dissertation die Funktionen  $Y_0$  und  $W_0$  nach dem Verfahren des § 5 tatsächlich berechnet. Die Berechnung der  $Y_{2n}$  und  $W_{2n}$  für  $n > 0$  mußte zunächst zurückgestellt werden, da ihre Durchführung für einen Handrechner zu langwierig gewesen wäre und die Münchner programmgesteuerte Rechenanlage noch nicht voll arbeitsfähig ist.

Der Verlauf von  $Y_0$  und  $W_0$  ist aus der folgenden Tabelle zu entnehmen, eine genauere Darstellung findet sich in der Dissertation.



## Literatur

- [1] Rob. Sauer: Einführung in die theoretische Gasdynamik, Springer-Verlag 1951.
- [2] J. Hadamard: Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, Paris 1932.
- [3] C. Ferrari: Interference between wing and body at supersonic speeds - theory and numerical application, Journ. Aero. Sci. 15;6, Juni 1948.
- [4] G. K. Morikawa: The wing-body problem for linearized supersonic flow, Thesis, Cal. Inst. Tech., 1949, und Progress Report 4-116, Jet Propulsion Lab., Cal. Inst. Tech.
- [5] a) J. N. Nielsen: Supersonic wing-body interference, Thesis, Calif. Inst. Tech., 1951.  
b) J. N. Nielsen - W. C. Pitts: Wing-body interference at supersonic speed with an application to combinations with rectangular wings, NACA TN 2677, Jan. 1952.
- [6] Pitts-Nielsen-Gionfriddo: Comparison between theory and experiment for interference pressure field between wing and body at supersonic speeds, NACA TN 3128, April 1954.
- [7] P. A. Lagerstrom - M. D. Van Dyke: General considerations about planar and non-planar lifting systems, Douglas Aircraft Co., Report SM-13432, Juni 1949.
- [8] Rob. Sauer: Anwendung der Distributionstheorie auf das Problem des Überschalltragflügels, Riabouchinsky-Festschrift (Memoires sur la mécanique des fluids), Paris 1954.
- [9] H. J. Stetter: Einwirkung eines drehsymmetrischen Rumpfes auf den Auftrieb eines Tragflügels in linearisierter Überschallströmung, Math. Inst. d. TH München, Mitteilung DFG 2, März 1954.
- [10] H. J. Stetter: Beiträge zum Wechselwirkungsproblem in linearisierter Überschallströmung, Dissertation, TH München, Juli 1955.
- [11] L. N. G. Filon: Proc. Roy. Soc. Edin. XLIX (1928/29).
- [12] H. Beckert: Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise für das Differenzverfahren . . . . ., Berlin, Akademie-Verlag 1950.
- [13] Rob. Sauer: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, Springer-Verlag 1952.