

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Tröpfchenmodell des Atomkerns und Zweikörperkräfte*)

Von Wolfgang Wild in München

Mit 7 Schaubildern

Vorgelegt von Herrn Fritz Bopp am 2. Dezember 1955

Übersicht

1. Einführung	371
2. Das Kraftgesetz zwischen zwei Nukleonen	373
3. Wege zur Bewältigung des Mehrkörperproblems	378
4. Die Bewegungsgleichung der Nukleonen im Ortsraum	381
5. Die Dichtenäherung der Nukleonenfeldgleichung	385
6. Die Grundgleichungen der hydrodynamischen Kerntheorie	401
7. Der Grundzustand stabiler Atomkerne	415
a) Die Nukleonenkonfiguration	415
b) Die Konstanten der Bethe-Weizsäcker-Formel	425
8. Nichtstationäre Kernschwingungen der Ladungsdichte	429
a) Freie Schwingungen	429
b) Kopplung mit Spinschwingungen	438
c) Erzwungene Schwingungen	441
d) Wirkungsquerschnitte für $(\gamma; x)$ -Prozesse	445
Zusammenfassung	450
Literaturverzeichnis	451

1. Einführung

Die Berechnung der gebundenen Zustände eines Atomkerns, insbesondere der Bindungs- und Anregungsenergien, begegnet zwei fundamentalen Schwierigkeiten:

* Auszug aus einer Dissertation (Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität München, Juli 1955)

1. Das Kraftgesetz für die Wechselwirkung der Nukleonen ist weitgehend unbekannt.
2. Die Behandlung des Atomkerns erfordert die Lösung eines Mehrkörperproblems mit starker Wechselwirkung.

Die Überwindung dieser Schwierigkeiten gelang mittels etwas radikaler Vereinfachungen in zwei Kernmodellen: dem Tröpfchenmodell, worin der Kern als ein inkompressibles Flüssigkeitströpfchen mit wohldefiniertem Rand angesehen wird, und dem Schalenmodell, nach welchem die einzelnen Nukleonen sich unabhängig voneinander in einem gemeinsamen Zentralfeld bewegen.

Beide Modelle ergänzen sich in vieler Hinsicht, im Tröpfchenmodell wird ausschließlich das kollektive Verhalten aller Nukleonen eines Atomkerns betrachtet, im Schalenmodell dagegen nur die Bewegung des unabhängigen Einzelnukleons. Das Kraftgesetz zwischen den einzelnen Nukleonen geht in beide Theorien nicht ein, die auftretenden pauschalen Kraftkonstanten werden der Erfahrung entnommen.

Eine Zusammenschau der kollektiven und individuellen Aspekte der beiden Modelle ist von Aage Bohr versucht worden. Doch berücksichtigt auch seine Theorie das Kraftgesetz zwischen den einzelnen Nukleonen nicht.

Nun ist aber in den letzten Jahren dieses Kraftgesetz durch sorgfältige Zweinukleonenstreuexperimente jedenfalls im Bereich nicht zu hoher Energie relativ genau bekanntgeworden. Eine Berechnung der Erwartungswerte der Energien leichter Kerne nach dem Variationsverfahren unter Verwendung von Eigenfunktionen aus dem Schalenmodell und Zweinukleonenkräften entsprechend den Streuexperimenten hatte zumindest teilweisen Erfolg.

Es liegt darum nahe, eine Theorie zu entwickeln, die, zwischen Schalen- und Tröpfchenmodell stehend, die aus den Zweinukleonenexperimenten bekannten Kräfte einbezieht – insbesondere deren Austauschcharakter berücksichtigt – und auf empirische pauschale Konstanten verzichtet.

Auf diese Weise werden wir zunächst zu hydrodynamischen Gleichungen gelangen, deren Konstanten Funktionen der Kraft-

konstanten sind. Anschließend bringen wir die praktische Anwendung dieser Theorie auf stationäre Zustände und auf die von Steinwedel und Jensen diskutierte Kernschwingungen der Ladung, die bei Bestrahlung von Atomkernen mit γ -Strahlen auftreten.

2. Das Kraftgesetz zwischen zwei Nukleonen

Wir stellen uns auf den Standpunkt, daß die Kräfte zwischen zwei Nukleonen nur aus Versuchen gefolgert werden sollten, die mathematisch streng beschrieben werden können. Wir stützen uns also ausschließlich auf Zweinukleonenstreuexperimente und auf die Theorie des Deuterons.

Wenn wir eine beträchtliche Vieldeutigkeit in den Potentialkonstanten und große analytische Schwierigkeiten in den nachfolgenden Rechnungen vermeiden wollen, müssen wir einige Forderungen stellen, deren Gültigkeit problematisch ist:

1. Die Kräfte zwischen zwei Nukleonen lassen sich aus einem skalaren nur vom gegenseitigen Abstand abhängigen Potential ableiten.
2. Die Kräfte sind ladungsunabhängig.
3. Die Potentiale sind monotone Funktionen des Abstandes.

Bezüglich der Berechtigung dieser Annahmen müssen wir auf die umfangreiche Literatur verweisen (Fl 52). Wir halten hier nur fest, daß nach dem heutigen Stand unseres Wissens die erwähnten drei Forderungen sich mit guten Gründen wenigstens in ausreichender Näherung aufrechterhalten lassen.

Die Auswertung der experimentellen Daten für die Zweinukleonenstreuung erfolgt nach der effective-range-Theorie von Schwinger, Bethe (Be 49), Blatt und Jackson (Bl-J 49). Diese Theorie ist bei Gültigkeit der Forderungen 1. bis 3. anwendbar auf die Interpretation der Streudaten für reine S-Streuung, d. h. für den Energiebereich < 5 MeV.

Als Kräfte verwenden wir die üblichen Austauschkräfte mit den Potentialen

$$\begin{array}{ll}
 W \cdot J(r_{12}) & \text{für die Wignerkraft} \\
 M \cdot J(r_{12}) P_M & \text{für die Majoranakraft} \\
 B \cdot J(r_{12}) \cdot P_B & \text{für die Bartlettkraft} \\
 H \cdot J(r_{12}) \cdot P_H & \text{für die Heisenbergkraft}
 \end{array} \quad (1)$$

W, M, B, H sind Konstanten von der Dimension einer Energie, P_M bedeutet Ortsaustauschoperator, P_B Spinaustauschoperator, P_H Orts- und Spinaustauschoperator. Für die Ortsabhängigkeit diskutieren wir zwei Formen:

1. das Kastenpotential

$$\begin{aligned}
 J(r_{12}) &= -e(\beta - r_{12}) \\
 &\quad (e = \text{Heavisidefunktion}) \\
 &= 1 \text{ für } \beta - r_{12} > 0 \\
 &= 0 \text{ für } \beta - r_{12} < 0
 \end{aligned} \quad (2)$$

2. das Exponentialpotential

$$J(r_{12}) = -\exp(-r_{12}/\beta)$$

Durch die Streuexperimente bei niedrigen Energien wird außer β nur $(M + W)$ und $(B + H)$ festgelegt. Eine Unterscheidung von W und M bzw. B und H wird erst möglich, wenn zu der im Schwerpunktssystem kugelsymmetrischen S-Streuung nicht-kugelsymmetrische Anteile von höheren Drehimpulsen her hinzukommen. Die beobachtete Symmetrie von Vorwärts- und Rückwärtsstreuung erfordert (Fl 52):

$$W^2 + B^2 + WB = M^2 + H^2 + MH \quad (3)$$

Diese Forderung wird am einfachsten befriedigt durch den Ansatz von Serber (Se 47)

$$W = M \quad B = H \quad (4)$$

der sich auch bei der genaueren quantitativen Beschreibung der beobachteten Wirkungsquerschnitte bei mittelhohen Energien (40–90 MeV) relativ am besten bewährt (vgl. Bl-W 53, IV; Fl 52).

Wir gelangen damit zu folgenden mit der Erfahrung in Einklang stehenden Potentialen:

Kasten-	$W = M = 14.45 \text{ MeV}$	
potential A	$H = B = 2.85 \text{ MeV}$	$\beta = 2.07 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$
Kasten-	$W = M = 12.60 \text{ MeV}$	(5)
potential B	$H = B = 2.95 \text{ MeV}$	$\beta = 2.25 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$
Exponential-	$W = M = 77.8 \text{ MeV}$	
potential	$H = B = 15.7 \text{ MeV}$	$\beta = 0.68 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$

Eine genauere Festlegung der Form der Potentiale gestatten die Zweinukleonexperimente nicht.

Wenn wir die Gesamtwechselwirkung eines Systems einfach aus der Wechselwirkung der einzelnen Nukleonenpaare aufbauen, so postulieren wir damit implizit die Gültigkeit des Superpositionsprinzips für Kräfte. Tun wir dies aber kritiklos, so gelangen wir zu Widersprüchen mit der Erfahrung; denn es ist seit langem bekannt, daß Kräfte der obigen Form, die (3) genügen, den Sättigungsbedingungen von Kemmer, Volz u. a. (Ke 37, Vo 37, Fe 37, Br 38) widersprechen und damit zu einem stabilsten Zustand der Atomkerne führen, bei dem alle Nukleonen sich in eine Kugel vom Durchmesser der Kernkraftreichweite zusammendrängen (vgl. Bl-W 53, III). Experimentell dagegen weiß man, daß alle Kerne ungefähr die gleiche Nukleondichte haben oder, was gleichbedeutend ist, daß der Kernradius dem Gesetz folgt:

$$R = R_0 \cdot A^{1/3} \tag{6}$$

mit $A = \text{Atomgewicht}$, $R_0 = \text{const.}$

Die Größe R_0 hat erfahrungsgemäß den Wert (Bl-W S. 15)

$$R_0 = 1.40 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \tag{7}$$

Der eben erwähnte Widerspruch mit der Erfahrung zwingt dazu, eine Abänderung der Kräfte anzunehmen, wenn mehrere Nukleonen zusammenwirken. Schon Wigner (Wi 36) hat je-

doch die Vermutung ausgesprochen, daß diese Abänderung bei den tatsächlichen Dichten der Atomkerne sehr klein sei, wogegen sie für die Dichten der zusammengerutschten Kerne entscheidend werde. Die Wignersche Annahme scheint wohl begründet, wenn man bedenkt, daß sich die Abänderung in einer der nachstehend beschriebenen Formen vollziehen sollte:

1. Für die Kräfte gilt das Superpositionsprinzip, sie sind aber geschwindigkeitsabhängig. Die Zweinukleonenstreuexperimente zwingen dann dazu, diese Geschwindigkeitsabhängigkeit so anzunehmen, daß sie erst für Geschwindigkeiten $\gg 10 \text{ MeV}$ (im Energiemaß) merklich wird. Dem normalen Kern entsprechen nach dem Thomas-Fermi-Modell kinetische Energien der Nukleonen von rund 15 MeV , wie wir später noch genauer zeigen wollen. Für sie sollten noch keine wesentlichen Abänderungen der Kräfte gegenüber den vorstehend angegebenen Werten auftreten. Beim zusammengerutschten Kern dagegen steigt die Geschwindigkeit infolge der Unschärferelation stark an; man muß mit beträchtlichen Abweichungen von den Werten bei niedrigen Geschwindigkeiten rechnen.
2. Zu den unveränderten Zweinukleonenkräften treten Mehrkörperkräfte hinzu, die sich aus der Mesonenfeldtheorie ergeben und von Graphen herrühren, die drei und mehr Nukleonenlinien involvieren. Es ist unmittelbar anschaulich, daß diese Mehrkörperkräfte mit wachsender Nukleonendichte sehr jäh zunehmen. Abschätzungen auf Grund der pseudoskalaren Mesonentheorie (Dr 53, Ed 54) legen nahe, daß die Mehrkörperkräfte bei den empirischen Kerndichten nur etwa 16% der Zweikörperkräfte ausmachen. Der numerische Wert 16% ist dabei sehr unsicher. Im zusammengerutschten Kern dagegen spielen die Mehrkörperkräfte eine entscheidende Rolle.
3. Die Abänderung erfolgt durch eine Selbstabstoßung der Mesonen, die durch eine nichtlineare Mesonengleichung beschrieben wird (Schi 52, Mi 54). Auch hier gilt wieder das nämliche: Die abändernden Zusatzkräfte wachsen mit zunehmender Nukleonendichte und, damit korrespondierend, mit zunehmender Mesonendichte sehr rasch an.

Für Wigners Annahme spricht weiterhin, daß eine Berechnung des Energieerwartungswertes mit Eigenfunktionen aus dem Schalenmodell, bei denen der Potentialtopf den empirischen Kernradius hatte (keine Variation des Radius), bei Verwendung der reinen Zweinukleonenkräfte zu guten Werten für die Bindungsenergie führte (Flo 54, Wi 54).

Wir erheben daher die Wignersche Vermutung zur Hypothese und formulieren sie folgendermaßen:

Die aus den Zweinukleonenexperimenten folgenden Zweikörperkräfte sind bei Wechselwirkung mehrerer Teilchen in der Weise abzuändern, daß sie für Nukleonendichten kleiner gleich den in den Kernen vorliegenden praktisch unverändert bleiben, daß aber bei wachsender Dichte gewisse abstoßende Terme zu ihnen hinzutreten, die so jäh ansteigen, daß der empirische Radius zum stabilsten wird.

Die Wirkungsweise der so hypothetisch geforderten Kräfte läßt sich etwa in einfacher Weise durch den zusätzlichen Potentialterm

$$a e^{b(\varrho - \varrho_0)} \quad a \ll |V_0| \quad b \gg 1/\varrho_0 \quad (8)$$

$a, b > 0$

(ϱ = Dichte, $\varrho_0 = \frac{3}{4\pi R_0^3}$ = empirische Nukleonendichte) beschreiben.

Trifft unsere Hypothese zu, dann erfassen wir die Wirkung der Abänderung unserer Kräfte vollständig, wenn wir dafür sorgen, daß die mittlere Nukleonendichte den empirischen Wert hat, sonst aber alles unverändert lassen. Eine solche Vorgabe der Dichte liegt vom Tröpfchenmodell her nahe, und wir werden sie später in unsere Theorie einbauen.

Wie wir später zeigen werden, gelangen wir so – mit vorgegebenem $R = R_0 \cdot A^{1/3}$ und unmodifizierten Zweinukleonenkräften – zu einer guten Übereinstimmung mit der Erfahrung. Das aber wird uns dazu führen, den hier als Hypothese formulierten Sachverhalt nachträglich als Naturgesetz anzusehen.

3. Wege zur Bewältigung des Mehrkörperproblems

Für einen Kern mit A Nukleonen (Z Protonen, N Neutronen) lautet die im Konfigurationsraum formulierte Schrödinger-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 i \hbar \dot{\psi}(\mathbf{r}_1, s_1, t_1; \mathbf{r}_2, s_2, t_2; \dots \mathbf{r}_A, s_A, t_A; t) & \quad (1) \\
 = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^A \Delta_j \psi + \sum_{i < j} (W + M P_{ij}^M + B P_{ij}^B + H P_{ij}^H) \cdot J(r_{ij}) \psi \\
 + V_{MK} \psi + \sum_{i < j} \frac{e^2}{r_{ij}} P_{ij}^c \cdot \psi
 \end{aligned}$$

Die Wellenfunktion ψ hängt ab von den Orts-, Spin- und Ladungsspinvariablen jedes Teilchens, die durch r , s , und t gekennzeichnet sind, außerdem noch von der Zeit t . Protonen und Neutronen werden durch den Ladungsspin unterschieden. Die Summationsbuchstaben i und j laufen von 1 bis A über alle Nukleonenkoordinaten. Der Operator P_{ij}^c ist $= 1$, wenn i und j Protonenzustände charakterisieren, $= 0$ in den übrigen Fällen. V_{MK} soll das Potential der Mehrkörperkräfte bedeuten.

Die Wellenfunktion ψ ist der Normierungsforderung

$$\sum_{s_i, t_i} \int \psi^* \psi d\tau_1 \dots d\tau_A = 1 \quad (2)$$

unterworfen. Außerdem muß ψ nach dem Pauliprinzip antisymmetrisch sein gegenüber der Vertauschung je zweier Teilchenkoordinaten, d. h. der Orts-, Spin- und Ladungsspinvariablen.

Eine strenge Lösung von (1) gelingt mit den heute zur Verfügung stehenden mathematischen Methoden nicht. Aber auch für eine Störungsrechnung fehlt der Ausgangspunkt, denn es gibt keine integrierbare Gleichung mit einem Anteil der Wechselwirkung, der stärker ist als alle anderen Wechselwirkungsbeiträge.

Es wurde jedoch schon früh erkannt, daß sich viele wichtige Eigenschaften des Atomkerns einfach verstehen lassen, wenn man

sich denselben als inkompressibles Flüssigkeitströpfchen vorstellt. So gelangt man u. a. zur Erklärung der Absättigung der Dichte, zur Beschreibung der Bindungsenergie mittels der halbempirischen Bethe-Weizsäcker-Formel (Bl-W VI), zu einem Verständnis der Kernspaltung (Bo 39) und der Wirkungsquerschnitte für (γ ; $x = p, d, n, \alpha$)-Prozesse [Je 50].

Diese Erfolge des Tröpfchenmodells gestatten mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit die Annahme, daß eine strenge Lösung der Gleichung (1) einen Atomkern beschreiben würde, dessen Eigenschaften denen eines klassischen Flüssigkeitströpfchens stark ähneln.

Während das Tröpfchenmodell Auskunft gibt über die kollektive Nukleonenanordnung und -bewegung, wird im Schalenmodell, das in den Jahren 1948/49 von Goeppert-Mayer sowie Haxel, Jensen und Süß aufgestellt wurde (Ma 48, Ha 49), diese Kenntnis über das kollektive System ausgenützt zur Aufstellung eines pauschalen Potentials. Von diesem wird angenommen, daß es den Hauptteil der Energie liefert, so daß sich die einzelnen Nukleonen in ihm in gewisser Näherung frei und unabhängig bewegen.

Eine genauere Analyse des Verhältnisses von Tröpfchen- und Schalenmodell ist von Aage Bohr durchgeführt worden. Veränderungen der Kollektivanordnung wie Kerndeformationen beeinflussen das Pauschalpotential und damit die Energiestufen der Einzelteilchen. Andererseits ist die Kollektivanordnung aufgebaut aus den einzelnen Nukleonenkonfigurationen. Änderungen in den letzteren, wie sie besonders einschneidend nach abgeschlossenen Schalen auftreten, müssen die kollektive Anordnung beeinflussen. Aage Bohr gelangte so zu einer Erklärung niedriger Anregungszustände der Atomkerne (Bo 52).

Der Nachteil liegt bei dem oben geschilderten Verfahren darin, daß die feineren Züge der Wechselwirkung, insbesondere der Austauschcharakter, völlig verwischt werden. Infolgedessen ist das Schalenmodell in seiner elementaren Form unzureichend für die praktische Berechnung von Bindungsenergien.

Bis zu einem gewissen Grade kann man die Berechnung der Bindungsenergien durch folgendes Variationsverfahren verbessern. Man verwendet als Eigenfunktion eine Produktfunk-

tion der Einteilchenwellenfunktionen des Schalenmodells, berechnet aber den Erwartungswert des strengen Hamiltonoperators mit dieser Näherungseigenfunktion und variiert freie Parameter. So gelangt man näher an die strenge Lösung heran. Der Radius darf aus den in Abschnitt 2 geschilderten Gründen nicht mitvariiert werden.

Es zeigte sich, daß man auf diese Weise zu einer guten Beschreibung der energetischen Verhältnisse leichter Kerne gelangen kann. Auch feinere Einzelheiten wie das Quadrupolmoment können befriedigend erfaßt werden (Flo 54, Schu 53).

Für schwere Kerne jedoch wird das Verfahren zu unhandlich. Auch sind der Anwendbarkeit des Variationsverfahrens Grenzen gesetzt. Es ist unmöglich genauere Eigenfunktionen zu berechnen, da die Wellenfunktionen stets die aus dem Schalenmodell bestimmte Form beibehalten. Dies wirkt sich besonders bei der Berechnung angeregter Zustände aus, wo das erreichbare Minimum stärkstens von der funktionalen Gestalt der Wellenfunktion abhängt. Ob in diesem Fall die Verwendung der Einteilchenfunktionen des Schalenmodells noch zulässig ist, darf bezweifelt werden.

Neben dem Schalenmodell gibt es aber noch andere Wege, Vorstellungen des Tröpfchenmodells in die strenge Theorie einzubauen. Bisher hat man der Bewegung der Nukleonen völlig den individuellen Charakter gelassen, die Wechselwirkung aber radikal ausgemittelt. Man kann sich jedoch auch innerhalb des Tröpfchens in erster Linie für die lokale Dichte der Protonen, Neutronen, Plus-Spin-Teilchen und Minus-Spin-Teilchen interessieren. Durch die materielle Bewegung der Nukleonen und durch den Austausch wird diese Dichte sich im allgemeinen mit der Zeit verändern. Es muß aber stationäre Zustände geben, bei denen eine ganz bestimmte Dichteverteilung stabil ist. Diese Zustände gilt es aufzusuchen. Man vergrößert also das Schalenmodell insofern, als man sich nicht mehr um das individuelle Nukleon kümmert, sondern nur noch um lokale gemittelte Dichten im klassischen Sinn. Andererseits aber berücksichtigt man den Einfluß der Wechselwirkung, insbesondere deren Austauschcharakter, auf die lokalen Dichten genauer als bisher. Wir streben also hydrodynamische Gleichungen für die lokalen Dichten

an, die die Wechselwirkungskräfte enthalten und deren Integration die Nukleonverteilung für den Grundzustand und – im Prinzip wenigstens – für angeregte Zustände zu bestimmen gestattet. Mit Hilfe dieser Verteilungen sollen dann die dazugehörigen Energien berechnet werden. Außerdem wollen wir nichtstationäre Bewegungen der Ladung unter dem Einfluß eines äußeren Feldes, wie sie von Steinwedel und Jensen untersucht wurden, genauer diskutieren.

Die im Konfigurationsraum formulierte Schrödinger-Gleichung, die den Teilchencharakter hervorhebt, ist für unsere Untersuchungen nicht der geeignete Ausgangspunkt. Wir werden darum im nächsten Abschnitt die feldtheoretische Beschreibung des Atomkerns, die auf den physikalischen Raum bezogen ist und in der die lokalen Dichten im Vordergrund stehen, einer näheren Untersuchung unterziehen.

4. Die Bewegungsgleichung der Nukleonen im Ortsraum

Bei der feldtheoretischen Behandlung des Atomkerns wird ein momentaner Zustand des Systems durch einen Satz von Besetzungszahlen charakterisiert:

$$\underline{N} = (N_{p+}(\mathbf{r}), N_{p-}(\mathbf{r}), N_{n+}(\mathbf{r}), N_{n-}(\mathbf{r})) \quad (1)$$

Hierin ist $N_{p+}(\mathbf{r})$ die Zahl der Protonen am Ort \mathbf{r} mit positivem Spin in bezug auf eine Vorzugsrichtung, $N_{p-}(\mathbf{r})$ die Zahl der Protonen mit negativem Spin usw.

Ein Bewegungsgesetz gibt es nur für eine statistische Gesamtheit von Systemen. Der momentane Zustand einer solchen Gibbschen Gesamtheit wird durch die Wahrscheinlichkeitsamplituden

$$\Phi(\underline{N}, t) \quad (2)$$

beschrieben, die der Normierungsbedingung

$$\sum_{\underline{N}} |\Phi(\underline{N}, t)|^2 = 1 \quad (3)$$

unterworfen sind.

Für die Wahrscheinlichkeitsamplituden Φ fordert die Quantentheorie das Transformationsgesetz

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H \cdot \Phi \quad (4)$$

Darin ist H der Hamiltonoperator.

In der Feldtheorie wird gezeigt, daß sich H als Funktion einfacher Operatoren darstellen läßt, die die Eigenschaften haben, Teilchen zu vernichten, bzw. zu erzeugen (vgl. Hu 54). Wir bezeichnen diese Operatoren mit u_i und u_i^+ :

u_i^+ erzeugt ein Teilchen der Sorte i am Ort \mathbf{r}

u_i vernichtet ein Teilchen der Sorte i am Ort \mathbf{r}

$$i = (1, 2, 3, 4) = (P_+, P_-, N_+, N_-)$$

Die Operatoren u_i^+ und u_i genügen dann den Vertauschungsrelationen (Jo 28)

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) u_k^+(\mathbf{r}') + u_k^+(\mathbf{r}') u_i(\mathbf{r}) &= \delta_{ik} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ u_i(\mathbf{r}) u_k(\mathbf{r}') + u_k(\mathbf{r}') u_i(\mathbf{r}) &= 0 \\ u_i^+(\mathbf{r}) u_k^+(\mathbf{r}') + u_k^+(\mathbf{r}') u_i^+(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

wenn sich an jedem Raumpunkt nur maximal ein Teilchen jeder Sorte aufhalten darf, wie es das Paulische Ausschließungsprinzip erfordert.

Wir müssen nun den Transformationsoperator H für unser spezielles Problem der Nukleonenwechselwirkung angeben, H läßt sich darstellen als Summe der Beiträge der kinetischen Energie und der potentiellen Energie der einzelnen Kräfte

$$H = T + V_W + V_M + V_B + V_H + V_C \quad (6)$$

T bedeutet darin den Operator der kinetischen Energie, V_W , V_M , V_B , V_H , V_C die Operatoren der potentiellen Energie von Wigner-, Majorana-, Bartlett-, Heisenberg- und elektrischer Kraft. Wir behaupten, daß die einzelnen Bestandteile von H folgendes Aussehen haben:

$$T = \frac{\hbar^2}{2m} \int d\mathbf{r} \operatorname{grad} u^+(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} u(\mathbf{r}) \quad (7)$$

$$V_W = \frac{W}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) u^+(\mathbf{r}) u^+(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}) \quad (8)$$

$$V_M = \frac{M}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) u^+(\mathbf{r}) u^+(\mathbf{r}') P^M u(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}) \quad (9)$$

$$V_B = \frac{B}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) u^+(\mathbf{r}) u^+(\mathbf{r}') P^B u(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}) \quad (10)$$

$$V_H = \frac{H}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) u^+(\mathbf{r}) u^+(\mathbf{r}') P^H u(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}) \quad (11)$$

$$V_C = \frac{e^2}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} u^+(\mathbf{r}) u^+(\mathbf{r}') P^C u(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}) \quad (12)$$

$$+ e \int d\mathbf{r} \Phi_e(\mathbf{r}) u^+(\mathbf{r}) P^E u(\mathbf{r})$$

In den obigen Formeln sind die Operatoren u_i zu einer vierkomponentigen Größe zusammengefaßt:

$$u = \begin{pmatrix} u_{P+} \\ u_{P-} \\ u_{N+} \\ u_{N-} \end{pmatrix} u^+ = (u_{P+}^+, u_{P-}^+, u_{N+}^+, u_{N-}^+) \quad (13)$$

Die Operatoren P^M usw. wirken in diesem vier·vierdimensionalen Raum und haben die Form:

$$P^B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \times (1 + \vec{\sigma} \vec{\sigma}') \quad (14)$$

$$P^H = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \vec{\sigma} \vec{\sigma}') & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \times \quad (15)$$

$$P^M = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 + \vec{\sigma} \vec{\sigma}') & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & (1 + \vec{\sigma} \vec{\sigma}') \end{bmatrix} \times \quad (16)$$

$$P^C = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 + \sigma_z) (1 + \sigma'_z) & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \times \quad (17)$$

$$P^E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \sigma_z) & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \times \quad (18)$$

Darin bedeutet

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \quad (19)$$

mit

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Dies sind die wohlbekanntenen Paulischen Spinmatrizen.

Das \times -Zeichen symbolisiert das Kroneckerprodukt: In jedes Element der Matrix vor dem \times -Zeichen ist die Matrix nach dem \times -Zeichen einzusetzen.

Die ungestrichenen Größen operieren auf $u(\mathbf{r})$, die gestrichenen auf $u(\mathbf{r}')$. Die Zahl 1 steht für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

und zwar bezüglich \mathbf{r} und \mathbf{r}' .

Für die Multiplikation von u^+ und u gelten die Regeln der Matrixmultiplikation.

Physikalisch weist man leicht nach, daß die Operatoren (14) bis (16) den zur entsprechenden Kraft gehörigen Austausch bewerkstelligen.

Der Coulombterm zerfällt in zwei Anteile. Der erste beschreibt die elektrostatische Wechselwirkung der Protonen untereinander, der zweite die potentielle Energie der Protonen in einem äußeren Feld mit dem Potential Φ_e . Weitere Terme, die das Vektorpotential enthalten, haben wir als klein vernachlässigt. P^C und P^E sind Projektionsoperatoren auf die Protonenzustände.

Den Einfluß von Mehrkörperkräften haben wir in (6) nicht explizit berücksichtigt. Wir müssen dies nach Abschnitt 2 durch eine Nebenbedingung für die Dichte an geeigneter Stelle korrigieren.

Man kann nun in bekannter Weise zeigen, daß der Hamiltonoperator (6) dem Hamiltonoperator des Konfigurationsraumes äquivalent ist. Die direkte Behandlung von (6) führt auf Gleichung (3.1) zurück und bringt damit nichts Neues. Wir werden aber in den nächsten beiden Paragraphen zeigen, daß wir von der Nukleonenfeldtheorie her bei Untersuchung der Erwartungswerte der lokalen Dichte zu einer Kernhydrodynamik, wie wir sie anstreben, gelangen können.

5. Die Dichtenäherung der Nukleonenfeldgleichung

Wenn wir zu einer anschaulichen Kernhydrodynamik gelangen wollen, so müssen wir zuerst die Operatorgleichungen des vorigen Abschnitts ersetzen durch Gleichungen, die anschauliche physikalische Größen verknüpfen. Dazu müssen wir Erwartungswerte untersuchen und deren Bewegungsgleichungen aufzufinden trachten.

Beim elektromagnetischen Maxwellfeld ist eine solche Behandlung wohlbekannt. Die Operatorgleichungen der Quantenelektrodynamik führen auf die klassischen Maxwell'schen Gleichungen für die Erwartungswerte der Feldstärken. Wenn man auf individuelle Teilcheneigenschaften des Lichtes keinen Wert legt, so erhält man aus diesen klassischen Mittelwertgleichungen bereits eine ausgezeichnete Beschreibung des physikalischen Sachverhalts (vgl. We 39).

Die für die Quantenfeldtheorie fundamentale Größe ist der Hamiltonoperator. Sein Erwartungswert liefert die ebenso grundlegende Hamiltonfunktion der klassischen Theorie.

Wir bilden deshalb

$$H_{kl} = \langle \psi^* H \psi \rangle \quad (1)$$

Wir erhalten:

$$H_{kl} = \sum_{\substack{s_1 \dots s_A \\ t_1 \dots t_A}} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_A \quad (2)$$

$$\left\{ \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^A \Delta_j \psi \right) + \psi^* \left(\sum_{i < j=1}^A (W + MP_{ij}^M + BP_{ij}^B + HP_{ij}^H) \cdot J(r_{ij}) \right) \right.$$

$$\left. + \psi^* \sum_{i < j=1}^A \frac{e^2}{r_{ij}} P^c \cdot \psi + \psi^* \sum_{j=1}^A e \Phi_e P^E \psi \right\}$$

Gleichung (2) gilt im Rahmen unseres Kraftansatzes noch exakt. ψ ist eine Lösung von (3.1).

Da an eine strenge Berechnung von ψ nicht gedacht werden kann, berechnen wir eine Näherungshamiltonfunktion \bar{H}_{kl}

mit einer Näherungsfunktion $\bar{\psi}$. Je näher $\bar{\psi}$ der strengen Lösung ψ kommt, desto näher wird \bar{H}_{kl} dem strengen Wert H_{kl} liegen.

Der übliche Weg zur Gewinnung eines geeigneten $\bar{\psi}$ besteht darin, die Wechselwirkung in Gl. (3.1) oder Gl. (4.4) radikal auszumitteln und durch ein Pauschalpotential zu ersetzen gemäß

$$i\hbar \dot{\bar{\psi}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^A \Delta_j \bar{\psi} + \sum_{j=1}^A V_0(\mathbf{r}_j) \cdot \bar{\psi} \quad (3)$$

(Gl. 3) läßt sich nach den einzelnen Teilchenkoordinaten separieren, die verbleibenden Einteilchenwellengleichungen lassen sich streng lösen. $\bar{\psi}$ wird als antisymmetrisches Produkt solcher Einteilchenwellenfunktionen dargestellt. Um der speziellen Struktur von H_{kl} Rechnung zu tragen, werden in den Einteilchenfunktionen noch ein oder zwei Parameter frei gelassen, die durch Variation festgelegt werden.

Wir wollen nun gemäß unserem Programm anders vorgehen. Wir verlangen von unserer Näherungsfunktion $\bar{\psi}$ nicht, daß sie eine strenge Lösung der Näherungsgleichung (3) ist. Unser $\bar{\psi}$ braucht (3) nur angenähert zu erfüllen. Selbstverständlich muß unser $\bar{\psi}$ dem Pauliprinzip genügen. Außerdem verlangen wir, daß dieses $\bar{\psi}$ eine Eigenfunktion ist zur z -Komponente des Spin- und Ladungsspinoperators, verzichten aber darauf, daß es auch Eigenfunktion vom Betrag des Ladungsspinoperators und von z -Komponente sowie Betrag des Gesamtdrehimpulsoperators ist. Andererseits aber wollen wir nicht nur einige Parameter von vorgegebenen Funktionen für die Variation frei lassen, sondern die funktionale Gestalt von $\bar{\psi}$ noch weitgehend für die Variationsbestimmung offenlassen. Dadurch erhält die spezielle Gestalt der Wechselwirkung einen weit größeren Einfluß auf die Form der Nukleonenverteilung als in der bisherigen Theorie.

Wir machen also für $\bar{\psi}$ den Ansatz:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \psi_1(1) & \psi_2(1) & \dots & \psi_A(1) \\ \psi_1(2) & \psi_2(2) & \dots & \psi_A(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(A) & \psi_2(A) & \dots & \psi_A(A) \end{vmatrix} \quad (4)$$

Die Argumente (1) usw. stehen für s_1, t_1, \mathbf{r}_1 usw. Die Indizes charakterisieren die Gestalt der Einteilchenwellenfunktionen.

Dadurch, daß wir nur eine Determinante verwenden anstatt einer Linearkombination, verzichten wir darauf, daß $\bar{\psi}$ eine Eigenfunktion vom Betrag des Ladungsspinoperators und vom Gesamtdrehimpulsoperator wird. Einen großen Fehler machen wir dadurch nicht, da aus energetischen Gründen nur die Einteilchenfunktionen zu den niedrigsten Energien in Frage kommen. Deshalb tragen nur wenige Determinantenfunktionen mit einem merklichen Gewichtungsfaktor zur Bildung von $\bar{\psi}$ bei, und diese Determinantenfunktionen wiederum liefern nur sehr wenig voneinander abweichende Energiewerte, so daß der Erwartungswert von H_{kl} praktisch nicht von dem mit (4) errechneten verschieden ist.

Für die Einteilchenfunktionen machen wir den Ansatz

$$\psi_n(i) = \bar{\psi}_n(i) e^{i \Delta \mathbf{t}_n(\mathbf{r}_i, t) \cdot \mathbf{r}_i} e^{i f_k(\mathbf{r}_i, t)} \sqrt{g_k(\mathbf{r}_i, t)} \quad (5)$$

$$(k = P_+, P_-, N_+, N_-)$$

mit

$$\bar{\psi}_n(i) = \delta_{m_n^s, s_i} \delta_{m_n^t, t_i} \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_i) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \quad (6)$$

Die beiden ersten Faktoren von (6) beziehen sich auf den Spin und Ladungsspin und besagen, daß die Eigenfunktion zum Index n einen Wert der Spinvariablen $m_n^s = \pm 1$ und einen Wert der Ladungsvariablen $m_n^t = \pm 1$ besitzt. $\delta_{\alpha\beta}$ bezeichnet das Kroneckersymbol. $\bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_i)$ bezeichnet eine Eigenfunktion von (3), wobei der harmonische Zeitanteil abgespalten ist. Bei der Bildung von $\bar{\psi}$ kommen von jeder Teilchensorte nur die energetisch tiefstliegenden Funktionen $\bar{\psi}_n$ zur Anwendung. Jeder Zustand kann nur von einem Teilchen jeder Sorte besetzt sein.

Die Funktionen $\bar{\psi}_n(i)$ sind Lösungen von (3). Sie sind normiert und orthogonal:

$$\sum_{s_i t_i} \int d\mathbf{r}_i \bar{\psi}_n(i)^* \bar{\psi}_m(i) = \delta_{mn} \quad (7)$$

Die Funktionen (5) verallgemeinern (6) derart, daß wir bei der Variation noch eine genügende Freiheit besitzen. Der erste Faktor

$$e^{i\Delta f_n(\mathbf{r}_i, t) \cdot \mathbf{r}_i}$$

trägt dabei der Tatsache Rechnung, daß die Wellenlänge der inneren Bewegung der Teilchen mit dem Ort und der Zeit variieren kann. Eine resultierende Geschwindigkeit einer Teilchensorte soll durch diesen Faktor nicht beschrieben werden. Wir haben also die Forderung

$$\sum_{n=1}^{N_k} \Delta f_n(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (8)$$

an die Δf_n zu stellen.

Der zweite Faktor

$$e^{if_k(\mathbf{r}, t)}$$

soll dagegen gerade eine resultierende lokale Strömungsgeschwindigkeit beschreiben, die sich der inneren Bewegung überlagert. Wir haben dabei unsere Verallgemeinerung dadurch eingeschränkt, daß wir diese resultierende Strömungsgeschwindigkeit für alle Teilchen einer Sorte als gleich angenommen haben.

Die Verhältnisse sind weitgehend analog zu denen eines klassischen Gases. Die innere Bewegung wird durch ebene Wellen beschrieben, deren Ausbreitungsvektoren sich gegenseitig wegheben und keine resultierende Strömung liefern. Dem entspricht der Anteil

$$\bar{\psi}_n e^{i\Delta f_n \mathbf{r}}$$

Durch eine äußere Kraft aber kann sich dieser ungeordneten inneren Bewegung eine resultierende Strömung überlagern. Dem entspricht

$$e^{if_k(\mathbf{r}, t)}$$

Daß wir die innere Bewegung durch zwei Faktoren charakterisieren, hat seinen Grund darin, daß $\bar{\psi}$ nur den stationären Mittelwert wiedergeben soll, während $e^{i\Delta f_n \mathbf{r}}$ den zeitlichen lokalen Schwankungen Rechnung trägt.

Der dritte Faktor $\sqrt{g_k(\mathbf{r}, t)}$ soll zeitabhängige lokale Schwankungen der Dichte beschreiben, Auch hier haben wir g nur als

abhängig von der Teilchensorte, nicht aber vom Teilchenzustand angesetzt.

Die Funktionen $\psi_n(\mathbf{r})$ sind nicht mehr allgemein orthogonal. Wegen der Spinfaktoren sind weiterhin Funktionen zu verschiedenen Teilchensorten streng orthogonal. Funktionen zur gleichen Teilchensorte sind noch näherungsweise orthogonal, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\sqrt{g_k(\mathbf{r}, t)}$ weicht nur wenig von dem Wert 1 ab und ist, verglichen mit der Nukleonenwellenlänge von $\bar{\psi}_n$, nur langsam über den Kern veränderlich.
2. Die Veränderungen der inneren Bewegung sind klein und variieren langsam von Ort zu Ort. Es gilt also

$$\left| \frac{\Delta \mathfrak{E}_n}{\mathfrak{E}_n} \right| \ll 1 \tag{9}$$

Für Zustände, die vom Grundzustand nicht sehr abweichen, sind diese Bedingungen sehr gut erfüllt.

Wenn (3) noch mit guter Näherung erfüllt werden soll, wie wir anfangs forderten, müssen die resultierenden Strömungsgeschwindigkeiten klein sein, es muß also gelten

$$|\text{grad } f_k(\mathbf{r}, t)| \ll |\mathfrak{E}_n| \tag{10}$$

Wir werden am Ende unserer Ausführungen sehen, daß die von uns berechneten f_k tatsächlich dieser Bedingung genügen.

Für den Erwartungswert des Hamiltonoperators erhalten wir nunmehr:

$$\begin{aligned} H_{kl} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^A \int \psi_j^*(\mathbf{r}) \Delta \psi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ t_1, t_2}}^{1,2} \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_i^*(\mathbf{r}_1) \psi_j^*(\mathbf{r}_2) \cdot J(r_{ij}) \\ & \cdot (W + MP_{ij}^M + BP_{ij}^B + HP_{ij}^H) (\psi_i(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_2) - \psi_j(\mathbf{r}_1) \psi_i(\mathbf{r}_2)) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ t_1, t_2}}^{1,2} \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_i^*(\mathbf{r}_1) \psi_j^*(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{r_{ij}} P_{ij}^C \\ & \cdot (\psi_i(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_2) - \psi_j(\mathbf{r}_1) \psi_i(\mathbf{r}_2)) \\ & + \sum_{j=1}^A \sum_{s,t}^{1,2} e \int d\mathbf{r} \Phi_e(\mathbf{r}) \psi_j^*(\mathbf{r}) P^E \psi_j(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{11}$$

Bei der Herleitung von (11) haben wir von der näherungsweise Orthogonalität der $\psi(i)$ Gebrauch gemacht.

Um die künftigen Rechnungen zu vereinfachen, setzen wir

$$\varphi_n = \bar{\varphi}_n e^{i \Delta \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}} \quad (12)$$

Da die innere Bewegung keinen resultierenden Strom liefern darf, muß immer gelten:

$$\sum_{n_i} \varphi_n^* \text{grad } \varphi_n - \varphi_n \text{grad } \varphi_n^* = 0 \quad (13)$$

($i = P_+, P_-, N_+, N_-$; $\sum =$ Summe über alle Zustände der Teilchensorte i .)

Dann ergibt sich für die einzelnen Anteile des Hamiltonoperators der Erwartungswert:

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \int (\text{grad } f_i)^2 \left(\sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}) \right) d\mathbf{r} \\ &+ \frac{\hbar^2}{8m} \sum_i \int \frac{(\text{grad } g_i)^2}{g_i} \left(\sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}) \right) d\mathbf{r} \\ &- \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \int \sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \Delta \varphi_n(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &- \frac{\hbar^2}{4m} \sum_i \int \sum_{n_i} \text{div} (\varphi_n^* \varphi_n \text{grad } g_i) d\mathbf{r} \\ &- \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \int \sum_{n_i} i \text{div} (\varphi_n^* \varphi_n g_i \text{grad } f_i) d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (14)$$

Bei der Umschreibung der letzten beiden Terme in vollständige Divergenzen haben wir von (13) Gebrauch gemacht. Da die vollständigen Divergenzen keinen Beitrag zu T liefern, können wir sie einfach weglassen.

Nun ist aber, wie man leicht verifiziert:

$$\sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}) = \langle \Phi | u_i^+(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) | \Phi \rangle = \varrho_i(\mathbf{r}) \quad (15)$$

also gleich dem Erwartungswert der Dichte der Nukleonensorte i am Ort \mathbf{r} . Mit der Abkürzung

$$\frac{\hbar}{m} \text{grad } f_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t) \quad (16)$$

folgt deshalb:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \int \sum_i \varrho_i \mathbf{v}_i^2 d\mathbf{r} + \frac{\hbar^2}{8m} \int \sum_i \varrho_i \left(\frac{\text{grad } g_i}{g_i} \right)^2 d\mathbf{r} \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \int \sum_i \sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \Delta \varphi_n(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (17)$$

Bei Verwendung von (15) folgt für die potentielle Energie der Wignerkraft:

$$\begin{aligned} E_{pot}^W &= \frac{W}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \cdot \sum_{i,k=1}^4 \varrho_i(\mathbf{r}) \varrho_k(\mathbf{r}') \\ &\quad - \frac{W}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{n_i, m_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}') \varphi_m^*(\mathbf{r}') \varphi_m(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}') \right) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

und für die potentielle Energie der Majoranakraft:

$$\begin{aligned} E_{pot}^M &= \frac{M}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ &\quad \cdot \left\{ \left[\sum_i \left(\sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}') \sqrt{g_i(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}')} e^{i(f_i(\mathbf{r}') - f_i(\mathbf{r}))} \right) \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\sum_k \left(\sum_{m_k} \varphi_m^*(\mathbf{r}') \varphi_m(\mathbf{r}) \sqrt{g_k(\mathbf{r}) g_k(\mathbf{r}')} e^{i(f_k(\mathbf{r}) - f_k(\mathbf{r}'))} \right) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{M}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \cdot \sum_i \varrho_i(\mathbf{r}) \varrho_i(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (19)$$

Die Wirkung des Austauschoperators äußerte sich in (19) durch Verschiebung des Kroneckersymbols und Vorzeichenumkehr.

Ganz entsprechend folgt für die potentielle Energie der Bartlett-Kraft

$$\begin{aligned}
 E_{pot}^B = & \frac{B}{2} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\
 & \cdot \{ [\varrho_{P+}(\mathbf{r}) + \varrho_{N+}(\mathbf{r})] [\varrho_{P+}(\mathbf{r}') + \varrho_{N+}(\mathbf{r}')] \\
 & + [\varrho_{P-}(\mathbf{r}) + \varrho_{N-}(\mathbf{r})] [\varrho_{P-}(\mathbf{r}') + \varrho_{N-}(\mathbf{r}')] \} \\
 & - \frac{B}{2} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\
 & \cdot \left\{ \left[\sum_{i=1,2} \left(\sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}') \sqrt{g_i(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}')} e^{i(f_i(\mathbf{r}') - f_i(\mathbf{r}))} \right) \right] \right. \quad (20) \\
 & \cdot \left[\sum_{k=1,2} \left(\sum_{m_k} \varphi_m^*(\mathbf{r}') \varphi_m(\mathbf{r}) \sqrt{g_k(\mathbf{r}) g_k(\mathbf{r}')} e^{i(f_k(\mathbf{r}) - f_k(\mathbf{r}'))} \right) \right] \\
 & + \left[\sum_{i=3,4} \left(\sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}') \sqrt{g_i(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}')} e^{i(f_i(\mathbf{r}') - f_i(\mathbf{r}))} \right) \right] \\
 & \cdot \left. \left[\sum_{k=3,4} \left(\sum_{m_k} \varphi_m^*(\mathbf{r}') \varphi_m(\mathbf{r}) \sqrt{g_k(\mathbf{r}) g_k(\mathbf{r}')} e^{i(f_k(\mathbf{r}) - f_k(\mathbf{r}'))} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Für die Heisenberg-Kraft gilt statt dessen:

$$\begin{aligned}
 E_{pot}^H = & - \frac{H}{2} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\
 & \cdot \{ [\varrho_{P+}(\mathbf{r}) + \varrho_{P-}(\mathbf{r})] [\varrho_{P+}(\mathbf{r}') + \varrho_{P-}(\mathbf{r}')] \\
 & \cdot [\varrho_{N+}(\mathbf{r}) + \varrho_{N-}(\mathbf{r})] [\varrho_{N+}(\mathbf{r}') + \varrho_{N-}(\mathbf{r}')] \} \\
 & + \frac{H}{2} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (21) \\
 & \cdot \left\{ \left[\sum_{i=1,3} \left(\sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}') \sqrt{g_i(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}')} e^{i(f_i(\mathbf{r}') - f_i(\mathbf{r}))} \right) \right] \right. \\
 & \cdot \left[\sum_{k=1,3} \left(\sum_{m_k} \varphi_m^*(\mathbf{r}') \varphi_m(\mathbf{r}) \sqrt{g_k(\mathbf{r}) g_k(\mathbf{r}')} e^{i(f_k(\mathbf{r}) - f_k(\mathbf{r}'))} \right) \right] \\
 & + \left[\sum_{i=2,4} \left(\sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}') \sqrt{g_i(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}')} e^{i(f_i(\mathbf{r}') - f_i(\mathbf{r}))} \right) \right] \\
 & \cdot \left. \left[\sum_{k=2,4} \left(\sum_{m_k} \varphi_m^*(\mathbf{r}') \varphi_m(\mathbf{r}) \sqrt{g_k(\mathbf{r}) g_k(\mathbf{r}')} e^{i(f_k(\mathbf{r}) - f_k(\mathbf{r}'))} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich die Coulombenergie zu

$$E_{pot}^C = \frac{e^2}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \left\{ (\varrho_{P+}(\mathbf{r}) + \varrho_{P-}(\mathbf{r})) (\varrho_{P+}(\mathbf{r}') + \varrho_{P-}(\mathbf{r}')) \right. \\ \left. - \sum_{i=1,2} \left(\sum_{n_i; m_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}') \varphi_m^*(\mathbf{r}') \varphi_m(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}') \right) \right\} \quad (22)$$

und für den Anteil des äußeren Feldes erhalten wir

$$E_{pot}^A = e \int d\mathbf{r} \Phi_e(\mathbf{r}) \{ \varrho_{P+}(\mathbf{r}) + \varrho_{P-}(\mathbf{r}) \} \quad (23)$$

Hiermit ist uns eine teilweise Zurückführung des Erwartungswertes des Hamiltonoperators auf eine Funktion der lokalen Dichten und der Strömungsgeschwindigkeiten gelungen.

Um die weiteren Rechnungen nicht zu kompliziert werden zu lassen, nehmen wir für die $\bar{\varphi}_n$ ebene Wellen:

$$\bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_j) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \bar{\mathbf{k}}_n \cdot \mathbf{r}_j} \quad (24)$$

Die $\bar{\mathbf{k}}_n$ legen wir durch die Forderung der Periodizität auf dem Rand fest. Sie haben dann die Form

$$\bar{\mathbf{k}}_n = \frac{2\pi}{L} \vec{\nu} \quad (25)$$

oder

$$\bar{k}_x = \frac{2\pi}{L} \nu_x \quad \bar{k}_y = \frac{2\pi}{L} \nu_y \quad \bar{k}_z = \frac{2\pi}{L} \nu_z \quad (26)$$

(L = Kastenlänge, L^3 = Kernvolumen).

Die Funktionen (24) bilden bekanntlich eine brauchbare Näherung für die Beschreibung von sich frei innerhalb eines Potentialtopfes bewegenden Teilchen. Für die Randzone wird allerdings die Näherung schlecht.

Wenn von einer Teilchensorte i N_i Teilchen vorhanden sind, so sind im Grundzustand alle Wellen mit

$$\nu_{x_i}^2 + \nu_{y_i}^2 + \nu_{z_i}^2 \leq \nu_{max_i}^2 \quad (27)$$

je einfach besetzt. $v_{max,i}$ wird durch N_i festgelegt, denn es muß sein:

$$\frac{4\pi}{3} v_{max,i}^3 = N_i \quad (28)$$

oder

$$v_{max,i} = \left(\frac{3N_i}{4\pi} \right)^{1/3} \quad (29)$$

Mit (24) und (12) erhalten wir

$$\sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}) = \frac{N_i}{V} = \varrho_i \quad (30)$$

Durch Vergleich mit (15) sehen wir, daß

$$\varrho_i(\mathbf{r}) = g_i(\mathbf{r}) \cdot \varrho_i \quad (31)$$

ist. Man erkennt, daß

$$\int g_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1 \quad (32)$$

als Normierungsbedingung gelten muß.

Mit

$$\mathbf{f}_v = \bar{\mathbf{f}}_v + \Delta \mathbf{f}_v(\mathbf{r}, t) \quad (33)$$

können wir φ_n als ebene Welle mit ortsabhängigem Ausbreitungsvektor schreiben:

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{f}_v \mathbf{r}} \quad (34)$$

Um die Werte \mathbf{f}_v zu erkennen, stellen wir im Anschluß an Macke (Ma 54) folgende Überlegung an:

Sehen wir von der hier nicht interessierenden Strömungsgeschwindigkeit ab, so können wir statt (24) als Ausgangsfunktion

$$\tilde{\varphi}_n = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\tilde{\mathbf{f}}_v \tilde{\mathbf{r}}} \quad (35)$$

verwenden, wobei die $\tilde{\mathbf{r}}$ Funktionen von \mathbf{r} sind, die wir etwa mit einer Funktion a ansetzen als

$$\tilde{\mathbf{r}} = (1 + a) \mathbf{r} \quad (36)$$

Die Dichte am Ort \mathbf{r} ist dann gegeben durch

$$\tilde{\varrho}_n = \frac{G}{V} \quad (37)$$

wobei

$$G = \left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \right| \quad (38)$$

die Funktionaldeterminante der Transformation von \mathbf{r} nach $\tilde{\mathbf{r}}$ bedeutet.

Wir gelangen zu völliger Übereinstimmung mit unserem Ansatz, wenn wir fordern:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_v &= (1 + a) \bar{\mathbf{f}}_v \\ g &= G \end{aligned} \quad (39)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} G &\approx \begin{vmatrix} 1 + a + x \frac{\partial a}{\partial x} & y \frac{\partial a}{\partial x} & z \frac{\partial a}{\partial x} \\ x \frac{\partial a}{\partial y} & 1 + a + y \frac{\partial a}{\partial y} & z \frac{\partial a}{\partial y} \\ x \frac{\partial a}{\partial z} & y \frac{\partial a}{\partial z} & 1 + a + z \frac{\partial a}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= (1 + a)^3 + (1 + a)^2 (x a_x + y a_y + z a_z) + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

Wenn

$$(\mathbf{r} \text{ grad}) a \ll (1 + a) \quad (41)$$

bleibt, was wegen der vorausgesetzten Kleinheit von a und wegen der relativ langsamen Veränderlichkeit sehr gut erfüllt ist, so gilt

$$\mathbf{f}_v = g^{1/3} \bar{\mathbf{f}}_v \quad (42)$$

Damit folgt in gleicher Näherung

$$\begin{aligned} &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \int \sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \Delta \varphi_n(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \int \sum_{n_i} \mathbf{f}_n^2(\mathbf{r}) \frac{g_i(\mathbf{r})}{V} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (43)$$

Nun ist aber

$$\sum_{n_i} \mathbf{f}_n^2 \approx 4\pi \cdot \frac{(2\pi)^2}{L^2} g_i^{2/3} \int_0^{y_{max}} v^2 v^2 dv = \frac{4\pi}{L^2} (2\pi)^2 g_i^{2/3} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{3N_i}{4\pi} \right)^{1/3} \quad (44)$$

und daraus ergibt sich für die innere kinetische Energie:

$$\frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \int d\mathbf{r} \sum_i \varrho_i^{5/3} \quad (45)$$

Für die gesamte kinetische Energie erhalten wir

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} \int \sum_i \varrho_i v_i^2 d\mathbf{r} + \frac{\hbar^2}{8m} \int \sum_i \varrho_i \left(\frac{\text{grad } g_i}{g_i}\right)^2 d\mathbf{r} \\ & + \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \int \sum_i \varrho_i^{5/3} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (46)$$

Wir haben somit der kinetischen Energie eine Form gegeben, in der nur noch die durch Variation zu bestimmenden Variablen ϱ_i und v_i auftreten. Der letzte Term beschreibt die innere kinetische Energie und ist identisch mit dem Thomas-Fermi-Anteil. Den mittleren Term hat v. Weizsäcker (Wei 35) erstmals hergeleitet. Der erste Term beschreibt die kinetische Energie der Nukleonenströmung und ist zwar nicht aus der Quantenmechanik des Atomkernes, wohl aber aus dem klassischen Tröpfchenmodell geläufig.

Nunmehr wollen wir die in der potentiellen Energie auftretenden Ausdrücke der Form

$$\sum_{n_i} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}') \sqrt{g_i(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}')} e^{i(f_i(\mathbf{r}') - f_i(\mathbf{r}))} = C_i \quad (47)$$

untersuchen. Mit (34) und (42) erhalten wir

$$\begin{aligned} C_i = & \frac{\sqrt{g_i(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}')}}{V} e^{i(f_i(\mathbf{r}') - f_i(\mathbf{r}))} \\ & \sum_{v_x v_y v_z} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{L} \left[(g_i(\mathbf{r}))^{1/3} \mathbf{r} \vec{v} - (g_i(\mathbf{r}'))^{1/3} \mathbf{r}' \vec{v} \right] \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

Da sich nach Wigner und Seitz (Wi 34) die Orientierung unseres Abstandsvektors $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ zu dem willkürlichen Koordinatensystem x, y, z nicht physikalisch auswirken darf, so erhalten wir für (47)

$$C_i = \frac{\sqrt{g_i(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}')}}{v} e^{i(f_i(\mathbf{r}') - f_i(\mathbf{r}))} \sum_{v_x v_y v_z} \exp \frac{2\pi i}{L} i v_x \cdot \gamma \quad (49)$$

mit

$$\gamma = \left| (g_i(\mathbf{r}))^{1/3} \mathbf{r} - g_i(\mathbf{r}')^{1/3} \mathbf{r}' \right| \quad (50)$$

Wir untersuchen nunmehr

$$S = \sum_{v_x v_y v_z} \exp \frac{2\pi i}{L} v_x \cdot \gamma \quad (51)$$

Wenn wir die Summation durch eine Integration ersetzen, so gelangen wir zu:

$$S = \frac{\pi \cdot L^3}{2\pi^3 \gamma^3} \left(\sin \left(\frac{2\pi\gamma}{L} v_{max_i} \right) - \left(\frac{2\pi\gamma}{L} v_{max_i} \right) \cos \left(\frac{2\pi\gamma}{L} v_{max_i} \right) \right) \quad (52)$$

Wir berücksichtigen (29) und kürzen ab:

$$x_i = \frac{2\pi}{L} \left(\frac{3N_i}{4\pi} \right)^{1/3} \gamma \quad (53)$$

Dann folgt für (47)

$$C_i = \sqrt{\varrho_i(\mathbf{r}) \varrho_i(\mathbf{r}')} \left(3 \frac{\sin x_i - x_i \cos x_i}{x_i^3} \right) e^{i(f_i(\mathbf{r}') - f_i(\mathbf{r}))} \quad (54)$$

Wenn wir bedenken, daß g nur wenig von 1 abweichen und außerdem langsam veränderlich sein soll, so dürfen wir in ausgezeichnete Näherung setzen

$$\gamma = (g_i(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}'))^{1/6} \cdot s \quad (55)$$

mit

$$s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (56)$$

(55) gilt für große s nicht mehr allzu gut. Für diese aber wird C_i sehr klein, und außerdem sind die Kernkräfte nicht mehr wirksam. Dann aber wird x_i :

$$x_i = 2\pi \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} (\varrho_i(\mathbf{r}) \cdot \varrho_i(\mathbf{r}'))^{1/6} \cdot s \quad (57)$$

Damit ist es nunmehr möglich, auch die potentielle Energie als alleinige Funktion der lokalen Dichten und der Potentiale f_i der Strömungsgeschwindigkeiten zu schreiben:

$$E_{pot}^W = \frac{W}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \cdot \{ (\varrho_{P+} + \varrho_{P-} + \varrho_{N+} + \varrho_{N-}) (\varrho'_{P+} + \varrho'_{P-} + \varrho'_{N+} + \varrho'_{N-}) - \omega_{P+}^2 \varrho_{P+} \varrho'_{P+} - \omega_{P-}^2 \varrho_{P-} \varrho'_{P-} - \omega_{N+}^2 \varrho_{N+} \varrho'_{N+} - \omega_{N-}^2 \varrho_{N-} \varrho'_{N-} \} \quad (58)$$

mit der Abkürzung

$$\varrho'_{P+} = \varrho_{P+}(\mathbf{r}') \quad (59) \quad \omega_{P+} = 3 \frac{\sin x_{P+} - x_{P+} \cos x_{P+}}{x_{P+}^3} \quad (60)$$

usw.

ω_{P+} ist definiert durch (57) und (60) und ist also eine Funktion des Abstandes und der lokalen Dichten. Für die Austauschkräfte erhalten wir:

$$\begin{aligned} E_{pot}^M = & \frac{M}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ & \cdot \{ -(\varrho_{P+} \varrho'_{P+} + \varrho_{P-} \varrho'_{P-} + \varrho_{N+} \varrho'_{N+} + \varrho_{N-} \varrho'_{N-}) \\ & + \omega_{P+}^2 \varrho_{P+} \varrho'_{P+} + \omega_{P-}^2 \varrho_{P-} \varrho'_{P-} + \omega_{N+}^2 \varrho_{N+} \varrho'_{N+} + \omega_{N-}^2 \varrho_{N-} \varrho'_{N-} \\ & + \omega_{P+} \omega_{P-} \sqrt{\varrho_{P+} \varrho'_{P+}} \sqrt{\varrho_{P-} \varrho'_{P-}} (e^{i(f_{P+} - f'_{P+})} e^{i(f'_{P-} - f_{P-})} + \text{c. c.}) \\ & + \omega_{P+} \omega_{N+} \sqrt{\varrho_{P+} \varrho'_{P+}} \sqrt{\varrho_{N+} \varrho'_{N+}} (e^{i(f_{P+} - f'_{P+})} e^{i(f'_{N+} - f_{N+})} + \text{c. c.}) \\ & + \omega_{P+} \omega_{N+} \sqrt{\varrho_{P+} \varrho'_{P+}} \sqrt{\varrho_{N-} \varrho'_{N-}} (e^{i(f_{P+} - f'_{P+})} e^{i(f'_{N-} - f_{N-})} + \text{c. c.}) \\ & + \omega_{P-} \omega_{N+} \sqrt{\varrho_{P-} \varrho'_{P-}} \sqrt{\varrho_{N+} \varrho'_{N+}} (e^{i(f_{P-} - f'_{P-})} e^{i(f'_{N+} - f_{N+})} + \text{c. c.}) \\ & + \omega_{P-} \omega_{N-} \sqrt{\varrho_{P-} \varrho'_{P-}} \sqrt{\varrho_{N-} \varrho'_{N-}} (e^{i(f_{P-} - f'_{P-})} e^{i(f'_{N-} - f_{N-})} + \text{c. c.}) \\ & + \omega_{N+} \omega_{N-} \sqrt{\varrho_{N+} \varrho'_{N+}} \sqrt{\varrho_{N-} \varrho'_{N-}} (e^{i(f_{N+} - f'_{N+})} e^{i(f'_{N-} - f_{N-})} + \text{c. c.}) \} \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} E_{pot}^B = & \frac{B}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ & \cdot \{ (\varrho_{P+} + \varrho_{N+}) (\varrho'_{P+} + \varrho'_{N+}) + (\varrho_{P-} + \varrho_{N-}) (\varrho'_{P-} + \varrho'_{N-}) \\ & - \omega_{P+}^2 \varrho_{P+} \varrho'_{P+} - \omega_{P-}^2 \varrho_{P-} \varrho'_{P-} - \omega_{N+}^2 \varrho_{N+} \varrho'_{N+} - \omega_{N-}^2 \varrho_{N-} \varrho'_{N-} \\ & - \omega_{P+} \omega_{P-} \sqrt{\varrho_{P+} \varrho'_{P+}} \sqrt{\varrho_{P-} \varrho'_{P-}} (e^{i(f_{P+} - f'_{P+})} e^{i(f'_{P-} - f_{P-})} + \text{c. c.}) \\ & - \omega_{N+} \omega_{N-} \sqrt{\varrho_{N+} \varrho'_{N+}} \sqrt{\varrho_{N-} \varrho'_{N-}} (e^{i(f_{N+} - f'_{N+})} e^{i(f'_{N-} - f_{N-})} + \text{c. c.}) \} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} E_{pot}^H = & \frac{H}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ & \cdot \{ -(\varrho_{P+} + \varrho_{P-}) (\varrho'_{P+} + \varrho'_{P-}) - (\varrho_{N+} + \varrho_{N-}) (\varrho'_{N+} + \varrho'_{N-}) \\ & + \omega_{P+}^2 \varrho_{P+} \varrho'_{P+} + \omega_{P-}^2 \varrho_{P-} \varrho'_{P-} + \omega_{N+}^2 \varrho_{N+} \varrho'_{N+} + \omega_{N-}^2 \varrho_{N-} \varrho'_{N-} \\ & + \omega_{P+} \omega_{N+} \sqrt{\varrho_{P+} \varrho'_{P+}} \sqrt{\varrho_{N+} \varrho'_{N+}} (e^{i(f_{P+} - f'_{P+})} e^{i(f'_{N+} - f_{N+})} + \text{c. c.}) \\ & + \omega_{P-} \omega_{N-} \sqrt{\varrho_{P-} \varrho'_{P-}} \sqrt{\varrho_{N-} \varrho'_{N-}} (e^{i(f_{P-} - f'_{P-})} e^{i(f'_{N-} - f_{N-})} + \text{c. c.}) \} \end{aligned} \quad (63)$$

$$E_{pot}^c = \frac{e^2}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (64)$$

$$\cdot \{(\varrho_{P+} + \varrho_{P-})(\varrho'_{P+} + \varrho'_{P-}) - \omega_{P+}^2 \varrho_{P+} \varrho'_{P+} - \omega_{P-}^2 \varrho_{P-} \varrho'_{P-}\}$$

und für den Anteil des äußeren Feldes hat (23) schon die gewünschte Form.

Die Herleitung der hydrodynamischen Grundgleichungen aus den obigen Energieausdrücken soll im nächsten Abschnitt erfolgen.

An dieser Stelle aber müssen wir noch auf einen wichtigen Punkt eingehen: Die Strömungsgeschwindigkeiten \mathbf{v}_i und die lokalen Dichten ϱ_i sind nicht voneinander unabhängig. Ihren Zusammenhang könnte man aus der Schrödingergleichung (3.1) herleiten, von der $\bar{\psi}$ ja eine Näherungslösung sein soll. Ein solches Vorgehen wäre aber unserer Methode, Gleichungen für Erwartungswerte zu untersuchen, nicht gemäß. Wir stellen darum ganz in Analogie zur klassischen Hydrodynamik den Zusammenhang durch die Kontinuitätsgleichungen her.

Wir untersuchen also die zeitliche Variation von ϱ_i und erhalten unter Berücksichtigung von (4.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho_i}{\partial t} &= (\langle \dot{\Phi}^* | u_i^+ u_i | \Phi \rangle + \langle \Phi^* | u_i^+ u_i | \dot{\Phi} \rangle) \\ &= \frac{1}{i\hbar} (\langle \Phi^* | u_i^+ u_i H | \Phi \rangle - \langle \Phi^* | H u_i^+ u_i | \Phi \rangle) \quad (65) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle \Phi^* | [u_i^+ u_i, H] | \Phi \rangle \end{aligned}$$

Auf die übliche Weise läßt sich zeigen, daß (65) äquivalent ist:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \varrho_i}{\partial t} &= \sum_{\substack{1,2 \\ s_1 \dots s_A \\ t_1 \dots t_A}} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_A \cdot \left\{ \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^A \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) \delta_{i, s_j t_j} \Delta_j \psi \right) \right. \\ &+ \psi^* \sum_{k < j=1}^A (\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k) \delta_{i, s_k t_k} + \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) \delta_{i, s_j t_j}) \\ &\cdot (W + MP_{k_j}^M + BP_{k_j}^B + HP_{k_j}^H) \cdot J(r_{k_j}) \psi \\ &+ \psi^* \sum_{k < j=1}^A (\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k) \delta_{i, s_k t_k} + \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) \delta_{i, s_j t_j}) \frac{e^2}{r_{ij}} P^c \psi \\ &\left. + \psi^* \sum_{j=1}^A e \Phi_e \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) \delta_{i, s_j t_j} P^E \psi \right\} - [\text{c. c.}] \quad (66) \end{aligned}$$

$\delta_{i, s_j t_j}$ besagt, daß s_j und t_j die Sorte i charakterisieren müssen. Die weitere Entwicklung von (66) geht genauso vor sich wie vorher die Berechnung des Energieerwartungswertes.

Es folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho_{P+}}{\partial t} = & - \operatorname{div} \varrho_{P+} \mathbf{v}_{P+} + \frac{1}{i\hbar} \int d\mathbf{r}' \omega_{P+} \omega_{P-} \sqrt{\varrho_{P+} \varrho'_{P+}} \sqrt{\varrho_{P-} \varrho'_{P-}} \\ & \cdot (M - B) \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \cdot (e^{i(f'_{P+} - f_{P+})} e^{i(f_{P-} - f'_{P-})} - \text{c. c.}) \\ & + \frac{1}{i\hbar} \int d\mathbf{r}' \omega_{P+} \omega_{N+} \sqrt{\varrho_{P+} \varrho'_{P+}} \sqrt{\varrho_{N+} \varrho'_{N+}} (M + H) \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ & \cdot (e^{i(f'_{P+} - f_{P+})} e^{i(f_{N+} - f'_{N+})} - \text{c. c.}) \quad (67) \\ & + \frac{1}{i\hbar} \int d\mathbf{r}' \omega_{P+} \omega_{N-} \sqrt{\varrho_{P+} \varrho'_{P+}} \sqrt{\varrho_{N-} \varrho'_{N-}} \cdot M \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ & \cdot (e^{i(f'_{P+} - f_{P+})} e^{i(f_{N-} - f'_{N-})} - \text{c. c.}) \end{aligned}$$

Die Kontinuitätsgleichung für die anderen Teilchensorten erhält man durch Vertauschung der Symbole: P und N , bzw. $+$ und $-$, bzw. P und N und $+$ und $-$.

Zu dem normalen konvektiven Anteil kommt von den Austauschkräften her noch ein zusätzlicher Beitrag hinzu, der besagt, daß sich die Dichte einer Teilchensorte an einem bestimmten Ort im Kern auch dadurch ändern kann, daß das Teilchen mittels der Austauschkräfte die Sorte wechselt. Wir verdeutlichen dies noch mehr, wenn wir die Kontinuitätsgleichung für die Gesamtprotonendichte angeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varrho_{P+} + \varrho_{P-}) = & - \operatorname{div} (\varrho_{P+} \mathbf{v}_{P+} + \varrho_{P-} \mathbf{v}_{P-}) \\ & + \frac{1}{i\hbar} \int d\mathbf{r}' \omega_{P+} \omega_{N+} \sqrt{\varrho_{P+} \varrho'_{P+}} \sqrt{\varrho_{N+} \varrho'_{N+}} (M + H) \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ & (e^{i(f'_{P+} - f_{P+})} e^{i(f_{N+} - f'_{N+})} - \text{c. c.}) \\ & + \frac{1}{i\hbar} \int d\mathbf{r}' \omega_{P-} \omega_{N-} \sqrt{\varrho_{P-} \varrho'_{P-}} \sqrt{\varrho_{N-} \varrho'_{N-}} (M + H) \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ & (e^{i(f'_{P-} - f_{P-})} e^{i(f_{N-} - f'_{N-})} - \text{c. c.}) \quad (68) \\ & + \frac{1}{i\hbar} \int d\mathbf{r}' \omega_{P+} \omega_{N-} \sqrt{\varrho_{P+} \varrho'_{P+}} \sqrt{\varrho_{N-} \varrho'_{N-}} \cdot M \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ & (e^{i(f'_{P+} - f_{P+})} e^{i(f_{N-} - f'_{N-})} - \text{c. c.}) \\ & + \frac{1}{i\hbar} \int d\mathbf{r}' \omega_{P-} \omega_{N+} \sqrt{\varrho_{P-} \varrho'_{P-}} \sqrt{\varrho_{N+} \varrho'_{N+}} \cdot M \cdot J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ & \cdot (e^{i(f'_{P-} - f_{P-})} e^{i(f_{N+} - f'_{N+})} - \text{c. c.}) \end{aligned}$$

Die Bartlettkraft, die nur den Spin austauscht, kann die Gesamtprotonendichte nicht verändern und tritt in (68) nicht mehr auf. Für die Gesamtdichte der Nukleonen erhält man einfach:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varrho_{P+} + \varrho_{P-} + \varrho_{N+} + \varrho_{N-}) \\ = - \operatorname{div} (\varrho_{P+} \mathbf{v}_{P+} + \varrho_{P-} \mathbf{v}_{P-} + \varrho_{N+} \mathbf{v}_{N+} + \varrho_{N-} \mathbf{v}_{N-}) \end{aligned} \quad (69)$$

Die Austauschkräfte liefern hier gar keinen Betrag mehr, da sie nur die Teilchensorten austauschen können, aber die Gesamtdichte der Materie nicht mehr beeinflussen. Die Aussage der Formeln (67) bis (69) entspricht also durchaus dem, was man anschaulich erwartet.

6. Die Grundgleichungen der hydrodynamischen Kerntheorie

Die im vorangehenden Abschnitt hergeleiteten Ausdrücke für die Hamiltonfunktion und die Kontinuitätsgleichungen reichen aus, um in bekannter Weise aus dem Hamiltonschen Prinzip eine Kernhydrodynamik abzuleiten. Die auftretenden Gleichungen haben aber eine komplizierte Struktur: Wir gelangen zu nichtlinearen Integrodifferentialgleichungen.

Glücklicherweise jedoch gestattet die kurze Reichweite der Kernkräfte eine erhebliche Vereinfachung. Unsere erste Aufgabe wird es deshalb sein, die Hamiltonfunktion und die Kontinuitätsgleichungen auf eine einfachere Form zu bringen.

Zu diesem Zweck machen wir die Variablentransformation:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathfrak{s} \quad (1)$$

und entwickeln die Funktionen von \mathbf{r}' nach Taylor:

Dann erhalten wir für die Wignerkraft:

$$\begin{aligned} E_{pot}^W = \sum_{i, k=1}^4 \frac{W}{2} \int d\mathbf{r} \int d^3\mathfrak{s} \cdot J(\mathfrak{s}) \\ \sum_{r=0}^{\infty} \left(\varrho_i \frac{(\mathfrak{s} \nabla)^r}{r!} \varrho_k - \delta_{ik} \varrho_i \omega_i \frac{(\mathfrak{s} \nabla)^r}{r!} \omega_k \varrho_k \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Die Winkelintegration bezüglich \mathfrak{s} kann ohne Schwierigkeiten durchgeführt werden und liefert:

$$E_{pot}^W = \sum_{i,k=1}^4 \frac{W}{2} \int d\mathfrak{r} \int d^3 \mathfrak{s} \cdot J(s) \quad (3)$$

$$\left\{ \varrho_i \varrho_k - \delta_{ik} \bar{\omega}_i \bar{\omega}_k \varrho_i \varrho_k + \frac{s^2}{6} (\varrho_i \Delta \varrho_k - \delta_{ik} \varrho_i \bar{\omega}_i \Delta \varrho_k \bar{\omega}_k) + \dots \right\}$$

Bei der Integration fallen also alle Glieder heraus, die die Komponenten von \mathfrak{s} nicht in gerader Potenz enthalten. Die Größe s hat die Bedeutung

$$s = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'| \quad (4)$$

Außerdem haben wir abgekürzt:

$$\bar{\omega}_k = \omega_k(s, \varrho_k(\mathfrak{r}), \varrho_k(\mathfrak{r}')) \quad (5)$$

Die Form (3) von (5.58) hat eine einfache Gestalt und enthält überdies keine neue Näherung. Für die weitere Analyse aber bietet sie eine eigentümliche Schwierigkeit. Da im Innern des Kernes die Dichten langsam veränderliche Funktionen des Ortes sein sollen und da die Kernkräfte eine kurze Reichweite haben, genügt es, in (3) für E_{pot}^W die ersten Entwicklungsglieder zu berücksichtigen. In der Randzone dagegen ändert sich die Dichte rasch, und wir müßten sehr viele Glieder mitnehmen. Wir erhalten aber eine brauchbare Annäherung an die tatsächlichen Verhältnisse, wenn wir annehmen, daß für $|\mathfrak{r}'| < R$ die Dichte $\varrho(\mathfrak{r}')$ durch die Taylorreihe wiedergegeben wird, dagegen für $|\mathfrak{r}'| > R$ $\varrho(\mathfrak{r}') = 0$ gilt. Dann können wir uns bei der Berechnung von (5) stets auf die ersten Glieder der Taylorentwicklung beschränken, und der Einfluß der Oberfläche des Kernes äußert sich in einer Beschränkung des Integrationsgebietes.

Wir schreiben darum (3) um in:

$$E_{pot}^W = \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2R} ds \cdot p(\mathfrak{r}, s) \cdot \kappa_W(\mathfrak{r}, s) \quad (6)$$

mit

$$\kappa_W(\mathfrak{r}, s) = \sum_{i,k=1}^4 \frac{W}{2} J(s) \left\{ \varrho_i \varrho_k - \delta_{ik} \varrho_i \varrho_k \bar{\omega}_i \bar{\omega}_k + \frac{s^2}{6} (\varrho_i \Delta \varrho_k - \delta_{ik} \varrho_i \bar{\omega}_i \Delta \bar{\omega}_k \varrho_k) + \dots \right\} \quad (7)$$

$$p(\mathfrak{r}, s) = \int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^{+1} d\zeta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \delta(s - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\zeta'}) \quad (8)$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{r}, s) &= \frac{2\pi}{r} \int_0^R r' dr' \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}^{|\mathbf{r}+\mathbf{r}'|} \alpha d\alpha \delta(s-\alpha) \\
 &= \frac{2\pi}{r} \int_0^r r' dr' \int_{r-r'}^{r+r'} \alpha d\alpha \delta(s-\alpha) \\
 &\quad + \frac{2\pi}{r} \int_r^R r' dr' \int_{r'-r}^{r'+r} \alpha d\alpha \delta(s-\alpha) \\
 &= \begin{cases} 4\pi s^2 & \text{für } R > s+r \\ \frac{\pi s}{r} (R^2 - (s-r)^2) & \text{für } s-r < R < s+r \\ 0 & \text{für } R < s-r \end{cases}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Eine für die meisten Zwecke ausreichende Näherung erhalten wir, wenn wir bilden:

$$\begin{aligned}
 p(s) &= \frac{1}{\frac{4\pi}{3} R^3} \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_0^{2\pi} d\varphi p(\mathbf{r}, s) \\
 &= 4\pi \left(s^2 - \frac{3}{4} \frac{s^3}{R} + \frac{1}{16} \frac{s^5}{R^3} \right)
 \end{aligned} \tag{10}$$

Es folgt für E_{pot}^W :

$$E_{pot}^W = \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2R} ds \cdot p(s) \cdot \kappa_W(\mathbf{r}, s) \tag{11}$$

Nunmehr untersuchen wir ω_j . Wir setzen dazu

$$\varrho_i = \bar{\varrho}_i + \delta_i \tag{12}$$

wobei

$$\bar{\varrho}_i = \frac{N_i}{A} \frac{3}{4\pi R_0^3} \tag{13}$$

die mittlere Dichte der Sorte i darstellt. δ_i gibt die Abweichungen von der Gleichverteilung an. Damit erhalten wir:

$$\omega_i = \omega(x_i) = \omega(\bar{x}_i) + (x_i - \bar{x}_i) \left(\frac{d\omega}{dx_i} \right)_{x_i = \bar{x}_i} + \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dx_i^2} \right)_{x_i = \bar{x}_i} + \dots \quad (14)$$

worin

$$x_i = 2\pi \left(\frac{9}{16\pi^2} \frac{N_i}{A} \right)^{1/3} \cdot \frac{s}{R_0} \quad (15)$$

und

$$\omega(x_i) = 3 \frac{\sin \bar{x}_i - \bar{x}_i \cos \bar{x}_i}{\bar{x}_i^3} = \frac{3}{\bar{x}_i} j_1(x_i) \quad (16)$$

ist, wobei $j_1(x)$ die sphärische Besselfunktion zum Index 1 bezeichnet.

Da

$$\begin{aligned} x_i - \bar{x}_i &= 2\pi \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \cdot s \cdot ((\bar{\varrho}_i + \delta_i)^{1/3} - \bar{\varrho}_i^{1/3}) \\ &= x_i \left(\frac{1}{3} \frac{\delta_i}{\bar{\varrho}_i} - \frac{1}{9} \frac{\delta_i^2}{\bar{\varrho}_i^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (17)$$

ist, so erhalten wir für (14)

$$\begin{aligned} \omega(x_i) &= \frac{3}{\bar{x}_i} j_1(x_i) - \frac{\delta_i}{\bar{\varrho}_i} j_2(x_i) + \frac{\delta_i^2}{\bar{\varrho}_i^2} \frac{1}{6} (j_2(x_i) + x_i j_3(x_i)) + \dots \\ &= t_i + u_i \frac{\delta_i}{\bar{\varrho}_i} + v_i \frac{\delta_i^2}{\bar{\varrho}_i^2} + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

wenn wir bis zu Gliedern zweiter Ordnung gehen und von den Sätzen über die Ableitung von Besselfunktionen Gebrauch machen. Die Abkürzungen t_i , u_i , v_i haben nach (18) die Bedeutung

$$t_i = \frac{3}{\bar{x}_i} j_1(x_i) \quad u_i = -j_2(x_i) \quad (19)$$

$$v_i = \frac{1}{6} (j_2(x_i) + x_i j_3(x_i))$$

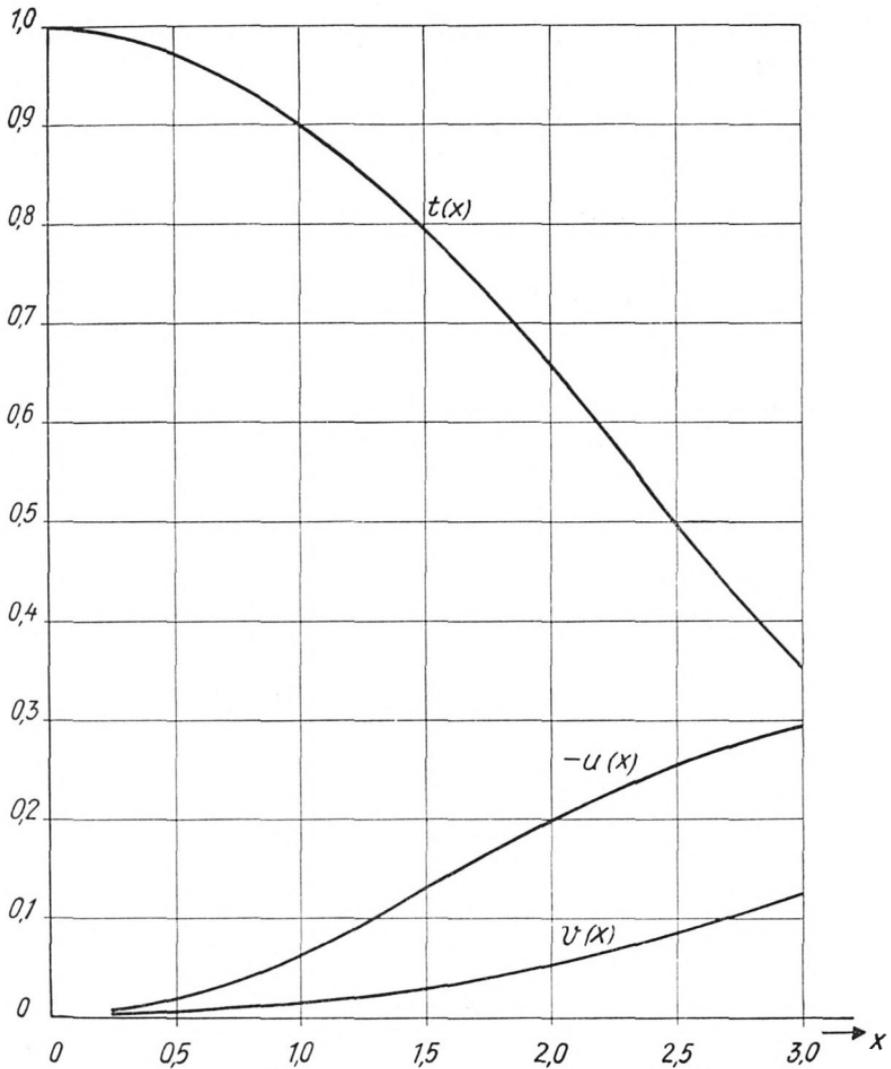


Schaubild 1. Korrelationsfunktionen $t(x)$, $u(x)$ und $v(x)$ für kleine Argumente.

Sie sind nur noch Funktionen von s . Der Funktionsverlauf ist in Schaubild 1 aufgetragen. Man erkennt, daß für kleine $x_i (< 2)$ die Relation erfüllt ist

$$|v_i| < |u_i| \ll t_i \quad (20)$$

Nach (15) liefern aber wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte nur Werte von $x < \text{ungefähr } 2$ merkbare Beiträge. Die Reihe (18) nimmt darum rapid ab, und für die meisten Fälle reicht es aus, wenn nur das erste Glied beibehalten wird.

Durch Einsetzen von (18) erhalten wir in völlig ausreichender Näherung:

$$E_{pot}^W = \frac{W}{2} \int dr \int p(s) \cdot J(s) ds \cdot \sum_{i,k=1}^4 \left\{ \varrho_i \varrho_k \left[\left(1 - \delta_{ik} \left(t_k^2 + \frac{\varrho_k - \bar{\varrho}_k}{\bar{\varrho}_k} 2 t_k u_k \right) \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{s^2}{6} \varrho_i \Delta \varrho_k [1 - \delta_{ik} t_k^2] \right\} \quad (21)$$

Ganz entsprechend dürfen wir bei den anderen Kernkräften vorgehen:

Für die Majoranakraft erhalten wir:

$$E_{pot}^M = \frac{M}{2} \int d\mathbf{r} \int p(s) \cdot J(s) ds \sum_{i,k=1}^4 \left\{ \varrho_i \varrho_k \left(t_i t_k - \delta_{ik} + \frac{\varrho_k - \bar{\varrho}_k}{\bar{\varrho}_k} u_k t_i + \frac{\varrho_i - \bar{\varrho}_i}{\bar{\varrho}_i} u_i t_k \right) \right. \\ + \frac{s^2}{6} \varrho_i \Delta \varrho_k (t_i t_k - \delta_{ik}) + \frac{s^2}{12} \nabla \varrho_k \nabla \varrho_i (t_i t_k - \delta_{ik}) \\ - \frac{s^2}{12} \frac{(\nabla \varrho_k)^2}{\varrho_k} \varrho_i (t_i t_k - \delta_{ik}) \\ \left. - \frac{s^2}{6} \varrho_i \varrho_k \frac{m^2}{\hbar^2} (v_i - v_k)^2 (t_i t_k - \delta_{ik}) \right\} \quad (22)$$

In ganz analoger Weise gelangen wir für die Bartlettkraft zu:

$$E_{pot}^B = \frac{B}{2} \int d\mathbf{r} \int p(s) \cdot J(s) ds \cdot \left\{ (\varrho_{P+} + \varrho_{N+}) (\varrho_{P+} + \varrho_{N+}) \right. \\ \left. + (\varrho_{P-} + \varrho_{N-}) (\varrho_{P-} + \varrho_{N-}) \right. \\ - \varrho_{P+}^2 \left(t_{P+}^2 + \frac{\varrho_{P+} - \bar{\varrho}_{P+}}{\bar{\varrho}_{P+}} 2 t_{P+} u_{P+} \right) - \varrho_{P-}^2 \left(t_{P-}^2 + \frac{\varrho_{P-} - \bar{\varrho}_{P-}}{\bar{\varrho}_{P-}} 2 t_{P-} u_{P-} \right) \\ - \varrho_{N+}^2 \left(t_{N+}^2 + \frac{\varrho_{N+} - \bar{\varrho}_{N+}}{\bar{\varrho}_{N+}} 2 t_{N+} u_{N+} \right) - \varrho_{N-}^2 \left(t_{N-}^2 + \frac{\varrho_{N-} - \bar{\varrho}_{N-}}{\bar{\varrho}_{N-}} 2 t_{N-} u_{N-} \right) \\ - \varrho_{P+} \varrho_{P-} \left(2 t_{P+} t_{P-} + \frac{\varrho_{P-} - \bar{\varrho}_{P-}}{\bar{\varrho}_{P-}} 2 t_{P+} u_{P-} + \frac{\varrho_{P+} - \bar{\varrho}_{P+}}{\bar{\varrho}_{P+}} 2 t_{P-} u_{P+} \right) \\ - \varrho_{N+} \varrho_{N-} \left(2 t_{N+} t_{N-} + \frac{\varrho_{N-} - \bar{\varrho}_{N-}}{\bar{\varrho}_{N-}} 2 t_{N+} u_{N-} + \frac{\varrho_{N+} - \bar{\varrho}_{N+}}{\bar{\varrho}_{N+}} 2 t_{N-} u_{N+} \right) \\ \left. + \frac{s^2}{6} (\varrho_{P+} + \varrho_{N+}) \Delta (\varrho_{P+} + \varrho_{N+}) + \frac{s^2}{6} (\varrho_{P-} + \varrho_{N-}) \Delta (\varrho_{P-} + \varrho_{N-}) \right\} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{6} \varrho_{P+} t_{P+}^2 \Delta \varrho_{P+} - \frac{\hbar^2}{6} \varrho_{P-} t_{P-}^2 \Delta \varrho_{P-} - \frac{\hbar^2}{6} \varrho_{N+} t_{N+}^2 \Delta \varrho_{N+} - \frac{\hbar^2}{6} \varrho_{N-} t_{N-}^2 \Delta \varrho_{N-} \\
& - \frac{\hbar^2}{6} t_{P+} t_{P-} \\
& \cdot \left(\varrho_{P+} \Delta \varrho_{P-} + \varrho_{P-} \Delta \varrho_{P+} + \nabla \varrho_{P+} \nabla \varrho_{P-} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \varrho_{P+})^2}{\varrho_{P+}} \varrho_{P-} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \varrho_{P-})^2}{\varrho_{P-}} \varrho_{P+} \right) \\
& - \frac{\hbar^2}{6} t_{N+} t_{N-} \tag{23} \\
& \cdot \left(\varrho_{N+} \Delta \varrho_{N-} + \varrho_{N-} \Delta \varrho_{N+} + \nabla \varrho_{N+} \nabla \varrho_{N-} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \varrho_{N+})^2}{\varrho_{N+}} \varrho_{N-} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \varrho_{N-})^2}{\varrho_{N-}} \varrho_{N+} \right) \\
& + \frac{\hbar^2}{6} \frac{2m^2}{\hbar^2} (t_{P+} t_{P-} \varrho_{P+} \varrho_{P-} (v_{P+} - v_{P-})^2 + t_{N+} t_{N-} \varrho_{N+} \varrho_{N-} (v_{N+} - v_{N-})^2) \Big\}
\end{aligned}$$

Für die Heisenbergkraft folgt entsprechend:

$$E_{pot}^H = \frac{\hbar^2}{2} \int d\mathbf{r} \int p(s) \cdot J(s) \cdot ds$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ -(\varrho_{P+} + \varrho_{P-})(\varrho_{P+} + \varrho_{P-}) - (\varrho_{N+} + \varrho_{N-})(\varrho_{N+} + \varrho_{N-}) \right. \\
& + \varrho_{P+}^2 \left(t_{P+}^2 + \frac{\varrho_{P+} - \bar{\varrho}_{P+}}{\bar{\varrho}_{P+}} 2 t_{P+} u_{P+} \right) + \varrho_{P-}^2 \left(t_{P-}^2 + \frac{\varrho_{P-} - \bar{\varrho}_{P-}}{\bar{\varrho}_{P-}} 2 t_{P-} u_{P-} \right) \\
& + \varrho_{N+}^2 \left(t_{N+}^2 + \frac{\varrho_{N+} - \bar{\varrho}_{N+}}{\bar{\varrho}_{N+}} 2 t_{N+} u_{N+} \right) + \varrho_{N-}^2 \left(t_{N-}^2 + \frac{\varrho_{N-} - \bar{\varrho}_{N-}}{\bar{\varrho}_{N-}} 2 t_{N-} u_{N-} \right) \\
& + \varrho_{P+} \varrho_{N+} \left(2 t_{P+} t_{N+} + \frac{\varrho_{N+} - \bar{\varrho}_{N+}}{\bar{\varrho}_{N+}} 2 t_{P+} u_{N+} + \frac{\varrho_{P+} - \bar{\varrho}_{P+}}{\bar{\varrho}_{P+}} 2 t_{N+} u_{N+} \right) \\
& + \varrho_{P-} \varrho_{N-} \left(2 t_{P-} t_{N-} + \frac{\varrho_{N-} - \bar{\varrho}_{N-}}{\bar{\varrho}_{N-}} 2 t_{P-} u_{N-} + \frac{\varrho_{P-} - \bar{\varrho}_{P-}}{\bar{\varrho}_{P-}} 2 t_{N-} u_{P-} \right) \tag{24} \\
& - \frac{\hbar^2}{6} (\varrho_{P+} + \varrho_{P-}) \Delta (\varrho_{P+} + \varrho_{P-}) - \frac{\hbar^2}{6} (\varrho_{N+} + \varrho_{N-}) \Delta (\varrho_{N+} + \varrho_{N-}) \\
& + \frac{\hbar^2}{6} \varrho_{P+} t_{P+}^2 \Delta \varrho_{P+} + \frac{\hbar^2}{6} \varrho_{P-} t_{P-}^2 \Delta \varrho_{P-} + \frac{\hbar^2}{6} \varrho_{N+} t_{N+}^2 \Delta \varrho_{N+} + \frac{\hbar^2}{6} \varrho_{N-} t_{N-}^2 \Delta \varrho_{N-} \\
& + \frac{\hbar^2}{6} t_{P+} t_{N+} \\
& \cdot \left(\varrho_{P+} \Delta \varrho_{N+} + \varrho_{N+} \Delta \varrho_{P+} + \nabla \varrho_{P+} \nabla \varrho_{N+} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \varrho_{P+})^2}{\varrho_{P+}} \varrho_{N+} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \varrho_{N+})^2}{\varrho_{N+}} \varrho_{P+} \right) \\
& + \frac{\hbar^2}{6} t_{P-} t_{N-} \\
& \cdot \left(\varrho_{P-} \Delta \varrho_{N-} + \varrho_{N-} \Delta \varrho_{P-} + \nabla \varrho_{P-} \nabla \varrho_{N-} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \varrho_{P-})^2}{\varrho_{P-}} \varrho_{N-} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \varrho_{N-})^2}{\varrho_{N-}} \varrho_{P-} \right) \\
& - \frac{\hbar^2}{6} \frac{2m^2}{\hbar^2} (t_{P+} t_{N+} \varrho_{P+} \varrho_{N+} (v_{P+} - v_{N+})^2 + t_{P-} t_{N-} \varrho_{P-} \varrho_{N-} (v_{P-} - v_{N-})^2) \Big\}
\end{aligned}$$

Für die Coulombenergie dürfen wir die Taylorentwicklung wegen der großen Reichweite der Coulombkraft nicht durchführen. Wir halten an der Form (5.64) fest.

Auch die kinetische Energie bedarf keiner weiteren Umformung.

Demgegenüber müssen wir bei den Kontinuitätsgleichungen ebenso vorgehen wie oben. Aus (5.67) folgt nach einiger Rechnung, wenn wir die niedrigsten Näherungen beibehalten,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho_{P+}}{\partial t} = & - \operatorname{div} \left\{ \varrho_{P+} \mathbf{v}_{P+} - \frac{2m}{\hbar^2} \int \dot{p}(s) \cdot J(s) ds \cdot \frac{s^2}{6} \right. \\ & [(M-B) \omega_{P+} \omega_{P-} \varrho_{P+} \varrho_{P-} (\mathbf{v}_{P+} - \mathbf{v}_{P-}) \\ & + (M+H) \omega_{P+} \omega_{N+} \varrho_{P+} \varrho_{N+} (\mathbf{v}_{P+} - \mathbf{v}_{N+}) \\ & \left. + M \cdot \omega_{P+} \omega_{N-} \varrho_{P+} \varrho_{N-} (\mathbf{v}_{P+} - \mathbf{v}_{N-}) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

sowie die entsprechenden Gleichungen, die durch Vertauschung von + und - bzw. P und N , bzw. + und - und P und N daraus hervorgehen.

Man erkennt, daß sich die Kontinuitätsgleichungen in der Form schreiben lassen

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_i \mathbf{v}_i^s = 0 \quad (26)$$

Die Sortengeschwindigkeit \mathbf{v}_i^s ist aber nicht identisch mit der Geschwindigkeit der Teilchen der Sorte i , da wir nicht nur konvektiven Spin- und Landungstransport haben.

Die Integrationen nach s sind in allen obigen Ausdrücken ausführbar und liefern Konstanten für unsere hydrodynamischen Gleichungen.

Wir wollen für den allgemeinen Fall nur die Hauptterme der Grundgleichungen herleiten, um nicht zu schwerfällige Formeln zu erhalten. Die nächsthöhere Näherung wurde von uns ebenfalls berechnet; sie liefert einen vernachlässigbaren Beitrag.

Wir nennen

$$\begin{aligned} a &= \int J(s) p(s) ds \\ b_{ik} &= \int J(s) p(s) t_i t_k ds \\ c_{ik} &= \int J(s) p(s) \frac{s^2}{6} t_i t_k ds \end{aligned} \quad (27)$$

und erhalten, wenn wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{a}{2} (W - M + B - H) + \frac{b_{ii}}{2} (-W + M - B + H) \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{a}{2} (W - H) + \frac{b_{12}}{2} (M - B) \\ \alpha_{13} = \alpha_{31} &= \frac{a}{2} (W + B) + \frac{b_{13}}{2} (M + H) \\ \alpha_{14} = \alpha_{41} &= \frac{a}{2} W + \frac{b_{14}}{2} M \\ \alpha_{23} = \alpha_{32} &= \frac{a}{2} W + \frac{b_{23}}{2} M \\ \alpha_{24} = \alpha_{42} &= \frac{a}{2} (W + B) + \frac{b_{24}}{2} (M + H) \\ \alpha_{34} = \alpha_{43} &= \frac{a}{2} (W - H) + \frac{b_{34}}{2} (M + H) \end{aligned} \quad (28)$$

und

$$\begin{aligned} \mu_{ii} &= 0 \\ \mu_{12} = \mu_{21} &= -\frac{2m}{\hbar^2} c_{12} (M - B) \\ \mu_{13} = \mu_{31} &= -\frac{2m}{\hbar^2} c_{13} (M + H) \\ \mu_{14} = \mu_{41} &= -\frac{2m}{\hbar^2} c_{14} \cdot M \\ \mu_{23} = \mu_{32} &= -\frac{2m}{\hbar^2} c_{23} \cdot M \\ \mu_{24} = \mu_{42} &= -\frac{2m}{\hbar^2} c_{24} \cdot (M + H) \\ \mu_{34} = \mu_{43} &= -\frac{2m}{\hbar^2} c_{34} (M - B) \end{aligned} \quad (29)$$

verwenden für die Hamiltonfunktion: (einschließlich Mehrkörperkräfte)

$$\begin{aligned}
 H = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{m}{2} \left(\sum_{i=1}^4 \varrho_i v_i^2 + \sum_{i,k=1}^4 \frac{\mu_{ik}}{2} \varrho_i \varrho_k (v_i - v_k)^2 \right) \right. \\
 + \sum_{i=1}^4 \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \varrho_i^{5/3} + \sum_{i,k=1}^4 \alpha_{ik} \varrho_i \varrho_k + a e^{b(\varrho - \varrho_0)} \\
 \left. + (\varrho_1 + \varrho_2) e \Phi_e + \frac{e^2}{2} \int d\mathbf{r}' \frac{(\varrho_1 + \varrho_2) (\varrho'_1 + \varrho'_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} \quad (30)
 \end{aligned}$$

Vom Standpunkt der hydrodynamischen Theorie stellen die in v_i quadratischen Terme die kinetische Energie des Systems dar. Die erste Summe enthält den Anteil der konvektiven Bewegung, die Doppelsumme rührt von der Trägheit des Mesonenaustausches her.

Die übrigen Terme beschreiben die potentielle Energie, auch der von der inneren Bewegung herrührende Term proportional $\varrho_i^{5/3}$. Man muß Arbeit leisten, um die Dichte an einem Punkt zu erhöhen, da man wegen des Pauliprinzips die Geschwindigkeit der inneren Bewegung vergrößern muß.

Die Kontinuitätsgleichung hat nun die Form

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} = - \operatorname{div} \left(\varrho_i v_i + \sum_{k=1}^4 \mu_{ik} \varrho_i \varrho_k (v_i - v_k) \right) \quad (31)$$

Da v_i und ϱ_i die dynamischen Variablen sind, folgt aus H die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}
 L = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{m}{2} \left(\sum_i \varrho_i v_i^2 + \sum_{i,k} \frac{\mu_{ik}}{2} \varrho_i \varrho_k (v_i - v_k)^2 \right) \right. \\
 - \sum_i \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \varrho_i^{5/3} - \sum_{i,k} \alpha_{ik} \varrho_i \varrho_k - a e^{b(\varrho - \varrho_0)} \\
 \left. - e (\varrho_1 + \varrho_2) \Phi_e - \int d\mathbf{r}' \frac{e^2}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\varrho_1 + \varrho_2) (\varrho'_1 + \varrho'_2) \right\} \quad (32)
 \end{aligned}$$

die sich auch als

$$L = T_H - U_H \quad (33)$$

schreiben läßt, wo T_H und U_H die oben beschriebene kinetische bzw. potentielle Energie unserer hydrodynamischen Theorie darstellt.

Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen benutzen wir das Hamiltonsche Prinzip. Bei der Variation müssen die Kontinuitätsgleichungen berücksichtigt werden, wir koppeln sie mit Lagrangeschen Parametern an. Es folgt:

$$\begin{aligned} \delta \int L dt = \delta \int dt d\tau \left\{ \frac{m}{2} \sum_i \varrho_i (\text{grad } \varphi_i)^2 \right. \\ + \frac{m}{2} \sum_{i,k} \frac{\mu_{ik}}{2} \varrho_i \varrho_k (\text{grad } (\varphi_i - \varphi_k))^2 - \sum_i \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \varrho_i^{5/3} \\ - \sum_{i,k} \alpha_{ik} \varrho_i \varrho_k - e (\varrho_1 + \varrho_2) \Phi_e - a e^{b(\varrho - \varrho_0)} \\ \left. - \frac{e^2}{2} \int d\tau' \frac{(\varrho_1 + \varrho_2)(\varrho'_1 + \varrho'_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \sum_i \lambda_i \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} - \text{div } \varrho_i \text{ grad } \varphi_i \right) \right. \\ \left. - \sum_{i,k} (\lambda_i - \lambda_k) \text{div } \frac{\mu_{ik}}{2} \varrho_i \varrho_k \text{ grad } (\varphi_i - \varphi_k) \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

Hierbei haben wir

$$\mathfrak{v}_i = -\text{grad } \varphi_i \quad (35)$$

gesetzt, was im Rahmen unserer Vorstellungen immer möglich ist (vgl. [5.16]).

Wir variieren φ_e und erhalten:

$$\begin{aligned} -m \text{div } (\varrho_e \text{ grad } \varphi_e) - m \sum_{k=1}^4 \mu_{ek} \text{div } \varrho_e \varrho_k \text{ grad } (\varphi_e - \varphi_k) \\ - \text{div } \varrho_e \text{ grad } \lambda_e - \sum_{k=1}^4 \mu_{ek} \text{div } \varrho_e \varrho_k \text{ grad } (\lambda_e - \lambda_k) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich λ_e bestimmen. Wir erhalten einfach:

$$\lambda_e = -m \varphi_e \quad (37)$$

Führen wir die Variation von ϱ_e aus, so folgt nach (34):

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2} (\text{grad } \varphi_e)^2 + \frac{m}{2} \sum_{k=1}^4 \mu_{ek} \varrho_k ((\text{grad } (\varphi_e - \varphi_k))^2 \\ & - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \varrho_e^{2/3} - 2 \sum_k \alpha_{ek} \varrho_k - ab e^{b(\varrho - \varrho_0)} \\ & - e \Phi_g (\delta_{e1} + \delta_{e2}) - \frac{\partial \lambda_e}{\partial t} + \text{grad } \varphi_e \text{ grad } \lambda_e \\ & + \sum_k \mu_{ek} \varrho_k \text{ grad } (\lambda_e - \lambda_k) \text{ grad } (\varphi_e - \varphi_k) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

wobei

$$\Phi_g = \Phi_e + e \int d\mathbf{r}' \frac{\varrho'_1 + \varrho'_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (39)$$

das gesamte am Ort \mathbf{r} wirksame elektrische Potential ist. Mit (37) folgt:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \varphi_e}{\partial t} - \frac{m}{2} (\text{grad } \varphi_e)^2 - \frac{m}{2} \sum_k \mu_{ek} \varrho_k (\text{grad } (\varphi_e - \varphi_k))^2 \\ - 2 \sum_k \alpha_{ek} \varrho_k - ab e^{b(\varrho - \varrho_0)} - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \varrho_e^{2/3} - e \Phi_g (\delta_{e1} + \delta_{e2}) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Durch Anwendung von $-\text{grad}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + m \mathbf{v}_e \text{ grad } \mathbf{v}_e + \frac{m}{2} \text{ grad} \left(\sum_k \mu_{ek} \varrho_k (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_k)^2 \right) \\ + \sum \gamma_{ek} \text{ grad } \varrho_k + ab^2 \text{ grad } \varrho e^{b(\varrho - \varrho_0)} \\ - e \mathfrak{E} (\delta_{e1} + \delta_{e2}) = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

wenn wir

$$\gamma_{ik} = 2 \alpha_{ik} + \delta_{ik} \frac{\hbar^2}{3m} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \frac{1}{\varrho_i^{1/3}} \quad (42)$$

setzen.

Die Struktur von (41) entspricht ganz derjenigen der phänomenologischen Theorie von Jensen und Steinwedel. Im allgemeinen dürfen wir \mathbf{v} und $\nabla \varrho$ als kleine Größen ansehen – nur

unter dieser Voraussetzung gilt unsere Ableitung – und dürfen in guter Näherung mit der linearisierten Gleichung

$$m \frac{\partial \mathfrak{v}_e}{\partial t} + \sum_k \gamma_{ek} \text{grad } \varrho_k + ab^2 \text{grad } \varrho e^{b(\varrho - \varrho_0)} - e \mathfrak{E} (\delta_{e1} + \delta_{e2}) = 0 \quad (43)$$

rechnen.

In der Näherung der linearisierten Gleichung wollen wir noch mittels (31) \mathfrak{v}_e eliminieren und eine Differentialgleichung für die lokalen Dichten allein aufstellen.

Dazu multiplizieren wir die Gleichung für \mathfrak{v}_e mit

$$\left(1 + \sum_k \mu_{ek} \bar{\varrho}_k\right)$$

die übrigen Gleichungen für $\mathfrak{v}_i (i \neq e)$ mit

$$- \mu_{ei} \bar{\varrho}_i$$

und addieren unter Bildung von $-\text{div}$:

$$m \frac{1}{\varrho_e} \frac{\partial^2 \varrho_e}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^4 \gamma_{ei} \Delta \varrho_i - \sum_{i,k=1}^4 \mu_{ei} \bar{\varrho}_i (\gamma_{ek} - \gamma_{ik}) \Delta \varrho_k \quad (44)$$

$$+ 4\pi e^2 (\varrho_1 + \varrho_2) \left[\left(1 + \sum_{k=1}^4 \mu_{ek} \bar{\varrho}_k\right) (\delta_{e1} + \delta_{e2}) - \sum_{i=1}^4 \mu_{ei} \bar{\varrho}_i (\delta_{i1} + \delta_{i2}) \right]$$

$$- \text{div} (ab^2 \text{grad } \varrho e^{b(\varrho - \varrho_0)}) = 0$$

da

$$\text{div } \mathfrak{E}_a = 0 \quad (45)$$

und

$$\text{div } \mathfrak{E}_{\text{coul}} = 4\pi e (\varrho_1 + \varrho_2) \quad (46)$$

ist.

Für die meisten Zwecke ist es vorteilhaft, noch eine Variablentransformation durchzuführen:

Es sei

$$\eta_k = \sum_{i=1}^4 g_{ki} \varrho_i \quad (47)$$

$$\varrho_i = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \eta_k \quad (48)$$

mit

$$g_{ki} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

Wir erhalten dann aus (44):

$$\begin{aligned} m \sum_{e,\mu} \frac{1}{4\bar{\varrho}^e} g_{ve} g_{e\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta_\mu &= \sum_{\mu,e,i} \frac{\Delta\eta_\mu}{4} \gamma_{ei} g_{ve} g_{i\mu} \\ + \sum_{\mu,e,k,i} \mu_{ei} \bar{\eta}_i (\gamma_{ek} - \gamma_{ik}) \frac{\Delta\eta_\mu}{4} g_{ve} g_{k\mu} & \quad (50) \\ - 2\pi e^2 (\varrho + \xi) \left\{ \sum_{e=1}^4 g_{ve} (\delta_{e1} + \delta_{e2}) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{e,k} \mu_{ek} \bar{\varrho}_k g_{ve} (\delta_{k1} + \delta_{k2} - \delta_{e1} - \delta_{e2}) \right\} \\ - \sum_e g_{ve} \operatorname{div} (ab^2 \operatorname{grad} \varrho e^{b(\varrho - \varrho_0)}) & \end{aligned}$$

Besonders einfach werden die Verhältnisse im Fall des „Normal-kerns“, der charakterisiert ist durch

$$\bar{\varrho}_{P+} = \bar{\varrho}_{P-} = \bar{\varrho}_{N+} = \bar{\varrho}_{N-} = \frac{\varrho_0}{4} \quad (51)$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = \gamma_{44} &= \bar{\gamma}_{11} \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{34} = \gamma_{43} &= \bar{\gamma}_{12} \\ \gamma_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{24} = \gamma_{42} &= \bar{\gamma}_{13} \\ \gamma_{14} = \gamma_{41} = \gamma_{23} = \gamma_{32} &= \bar{\gamma}_{14} \end{aligned} \quad (52)$$

und

$$\begin{aligned} \mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{34} = \mu_{43} &= \bar{\mu}_{12} \\ \mu_{13} = \mu_{31} = \mu_{24} = \mu_{42} &= \bar{\mu}_{13} \\ \mu_{14} = \mu_{41} = \mu_{23} = \mu_{32} &= \bar{\mu}_{14} \end{aligned} \quad (53)$$

Eine sehr gute Annäherung an (50) erhalten wir, wenn wir auch bei Kernen, für die (51) nicht erfüllt ist, (52) und (53) als

gültig ansehen. Eine Begründung für dieses Vorgehen erhält man sofort, indem man analog zu (14) bis (20) zeigt, daß

$$t_i = t_0 + u_0 \frac{\bar{\varrho}_i - \frac{\varrho_0}{4}}{\frac{\varrho_0}{4}} \quad (54)$$

mit

$$t_0 = \frac{3}{x_0} j_1(x_0) \quad (55)$$

und

$$u_0 = -j_2(x_0) \quad (56)$$

sowie

$$x_0 = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \cdot \frac{s}{R_0} \quad (57)$$

ist.

Wegen $|u_0| \ll t_0$ ist bis auf Glieder zweiter Ordnung

$$t_i \approx t_0 \quad (58)$$

und damit gilt auch (52), (53) bis auf Glieder zweiter Ordnung.

Damit wären wir am Ziel. Die genauere physikalische Diskussion dieser Gleichungen soll in den nächsten Abschnitten erfolgen.

7. Der Grundzustand stabiler Atomkerne

a) Die Nukleonenkonfiguration

Das erste Problem, auf das wir unsere hydrodynamische Kerntheorie anwenden wollen, ist die Berechnung der Nukleonenkonfiguration und der Bindungsenergie von stabilen Kernen.

Da ein stabiler Atomkern sich in einem stationären Zustand befindet und die Nukleonenkonfiguration zeitunabhängig ist, tritt eine erhebliche Vereinfachung der Formeln ein.

Wir knüpfen zweckmäßigerweise an die Ausdrücke für die Bindungsenergie an, die wir im vorhergehenden Abschnitt hergeleitet haben. Wenn wir von den ϱ_i zu den η_i übergehen und explizit einführen:

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \varrho = \varrho_{P+} + \varrho_{P-} + \varrho_{N+} + \varrho_{N-} \\
 \eta_2 &= \xi = \varrho_{P+} + \varrho_{P-} - \varrho_{N+} - \varrho_{N-} \\
 \eta_3 &= \eta = \varrho_{P+} - \varrho_{P-} + \varrho_{N+} - \varrho_{N-} \\
 \eta_4 &= \zeta = \varrho_{P+} - \varrho_{P-} - \varrho_{N+} + \varrho_{N-}
 \end{aligned} \tag{1}$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 E &= \int d\mathbf{r} \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3}{16\pi}\right)^{2/3} \varrho^{5/3} \left(1 + \frac{5}{9} \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\varrho^2}\right) \\
 &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int ds \cdot J(s) \cdot p(\mathbf{r}, s) \cdot \varrho^2 \left\{ \left(W - \frac{M}{4} + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + t_0^2 \left(-\frac{W}{4} + M - \frac{B}{2} + \frac{H}{2} \right) \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int ds \cdot J(s) p(\mathbf{r}, s) \xi^2 \left\{ \left(-\frac{M}{4} - \frac{H}{2} \right) + t_0^2 \left(-\frac{W}{4} - \frac{B}{2} \right) \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int ds \cdot J(s) p(\mathbf{r}, s) \eta^2 \left\{ \left(-\frac{M}{4} + \frac{B}{2} \right) + t_0^2 \left(-\frac{W}{4} + \frac{H}{2} \right) \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int ds \cdot J(s) p(\mathbf{r}, s) \zeta^2 \left\{ -\frac{M}{4} - t_0^2 \frac{W}{4} \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \cdot \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\{ \frac{1}{4} (\varrho + \xi) (\varrho' + \xi') \right. \\
 &\quad \left. - \frac{t_0^2}{8} [(\varrho + \xi) (\varrho' + \xi') - (\eta + \zeta) (\eta' + \zeta')] \right\}
 \end{aligned} \tag{2}$$

In dieser Formel sind vernachlässigt die höheren Glieder der Taylorentwicklung, höhere als quadratische Glieder in $\xi/\varrho, \eta/\varrho, \zeta/\varrho$ und die Abweichungen der ω_i, ω_k von t_0^2 . Wir dürfen sicher sein, daß alle diese vernachlässigten Terme sehr klein sind gegen die beibehaltenen, denn wie wir gleich zeigen werden, sind $\varrho, \xi, \eta, \zeta$ näherungsweise konstant, außerdem sind $\xi, \eta, \zeta \ll \varrho$, und schließlich wissen wir aus Abschnitt 6, daß die Abweichung der ω_i, ω_k von t_0^2 relativ klein ist.

Eine genauere Berechnung ist von uns durchgeführt worden. Die Ergebnisse weichen von denen, die aus (2) gefolgert wurden, nur unwesentlich ab.

Wir beschränken unsere weiteren Betrachtungen auf den Fall völliger Inkompressibilität, der früher schon von Danos (Da 52) untersucht wurde:

$$\varrho = \varrho_0 \quad (3)$$

Um die Bestimmungsgleichungen für die Nukleonenverteilung zu erhalten, brauchen wir nur (2) nach ξ , η , ζ zu variieren:

$$2\xi \cdot \frac{K_\xi(\mathbf{r})}{\varrho_0} + e^2 \int \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot \frac{1}{4} (\varrho'_0 + \xi') = 0 \quad (4)$$

$$2\eta \cdot \frac{K_\eta(\mathbf{r})}{\varrho_0} = 0 \quad 2\zeta \frac{K_\zeta(\mathbf{r})}{\varrho_0} = 0 \quad (5)$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} \frac{K_\xi(\mathbf{r})}{\varrho_0} &= \frac{\hbar^2}{6m} \left(\frac{3}{16\pi} \right)^{2/3} \varrho_0^{-1/3} \\ &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{s} \cdot J(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \left\{ \left(-\frac{M}{4} - \frac{H}{2} \right) + t_0^2 \left(-\frac{W}{4} - \frac{B}{2} \right) \right\} \\ \frac{K_\eta(\mathbf{r})}{\varrho_0} &= \frac{\hbar^2}{6m} \left(\frac{3}{16\pi} \right)^{2/3} \varrho_0^{-1/3} \\ &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{s} \cdot J(\mathbf{s}) \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \left\{ \left(-\frac{M}{4} + \frac{B}{2} \right) + t_0^2 \left(-\frac{W}{4} + \frac{H}{2} \right) \right\} \\ \frac{K_\zeta(\mathbf{r})}{\varrho_0} &= \frac{\hbar^2}{6m} \left(\frac{3}{16\pi} \right)^{2/3} \varrho_0^{-1/3} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{s} \cdot J(\mathbf{s}) \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \left\{ -\frac{M}{4} - t_0^2 \cdot \frac{W}{4} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

In (4) und (5) haben wir den kleinen Anteil des Coulombtauschintegrals weggelassen. Aus (5) folgt:

$$\eta = 0 \quad \zeta = 0 \quad (7)$$

In (6) ist $\mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ durch (6.9) gegeben. Vergleichen wir $K_\xi(\mathbf{r})$ mit dem Mittelwert \bar{K}_ξ , so sehen wir, daß der Beitrag der kinetischen Energie unverändert ist. Für den Beitrag der potentiellen Energie gilt:

$$\begin{aligned} \frac{K_{\xi p}(r)}{\bar{K}_{\xi p}} &= 1 \quad \text{für } r < R - b \\ \frac{K_{\xi p}(r)}{\bar{K}_{\xi p}} &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{R-r}{b} \right)^3 \right) + \frac{3}{16} \left(1 - \left(\frac{R-r}{b} \right)^2 \right) \left(\frac{R-r}{b} \frac{R+3r}{r} - \frac{b}{r} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Hierbei ist unter $\bar{K}_{\xi\rho\nu}$ der Volumenanteil der gemittelten potentiellen Energie der Asymmetriekraft, also

$$\bar{K}_{\xi\rho\nu} = \frac{\varrho_0}{2} \int dS \cdot 4\pi s^2 \left\{ \left(-\frac{M}{4} - \frac{H}{2} \right) + t_0^2 \left(-\frac{W}{4} - \frac{B}{2} \right) \right\} \quad (9)$$

verstanden.

Die obigen Formeln sind für ein Kastenpotential hergeleitet. (8) gilt exakt für den ersten Term in der geschweiften Klammer, für den Term mit t_0^2 dagegen nur in sehr guter Näherung. Für das Exponentialpotential erhalten wir eine gute Näherung, wenn wie die Formeln (8) und (9) übernehmen und für b den Wert

$$b = \beta / 0.282$$

einsetzen. (Vgl. Bl.-J. 49.)

In Schaubild 2 ist $K_{\xi}(r)$ für das Kastenpotential II und Radien von 5 bzw. $7 \cdot 10^{-13}$ cm aufgetragen. Man sieht, daß der Abfall der Form und Größe nach weitgehend unabhängig von R ist, im Abstand b vom Rand beginnt und am Rand auf einen Wert $\approx \frac{2}{3} K_{\xi}(0)$ hinführt.

Würden wir unzulässigerweise in (4) den Wert \bar{K}_{ξ} für $K_{\xi}(r)$ einsetzen, so erhielten wir durch Anwendung des Operators Δ die im Innern des Kernes gültige Gleichung:

$$\Delta \xi - \frac{4\pi e^2}{8 \bar{K}_{\xi}} (\varrho_0 + \xi) = 0 \quad (10)$$

Unter Einführung von

$$\varrho_{\rho} = \frac{\varrho_0 + \xi}{2} \quad (11)$$

und

$$D^2 = \frac{4\pi e^2 \varrho_0}{8 \bar{K}_{\xi}} \quad (12)$$

gelangen wir zu der Gleichung

$$\Delta \varrho_{\rho} - D^2 \varrho_{\rho} = 0 \quad (13)$$

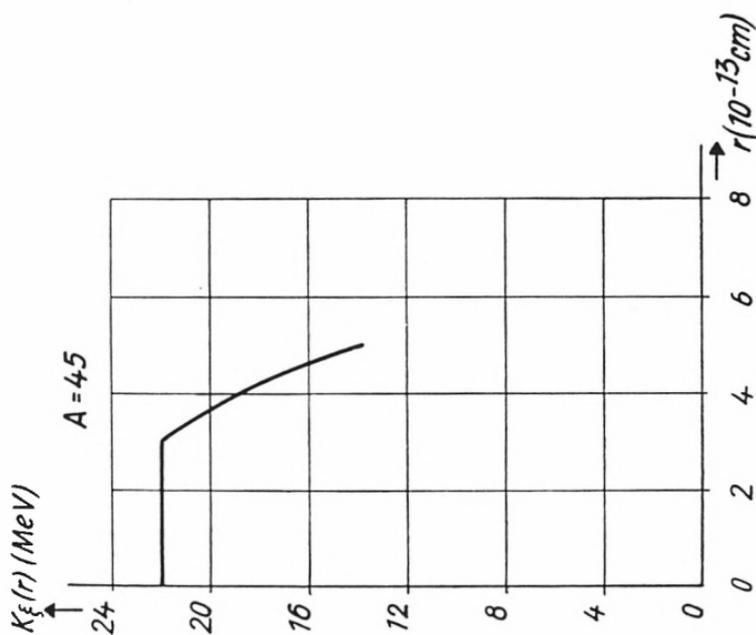
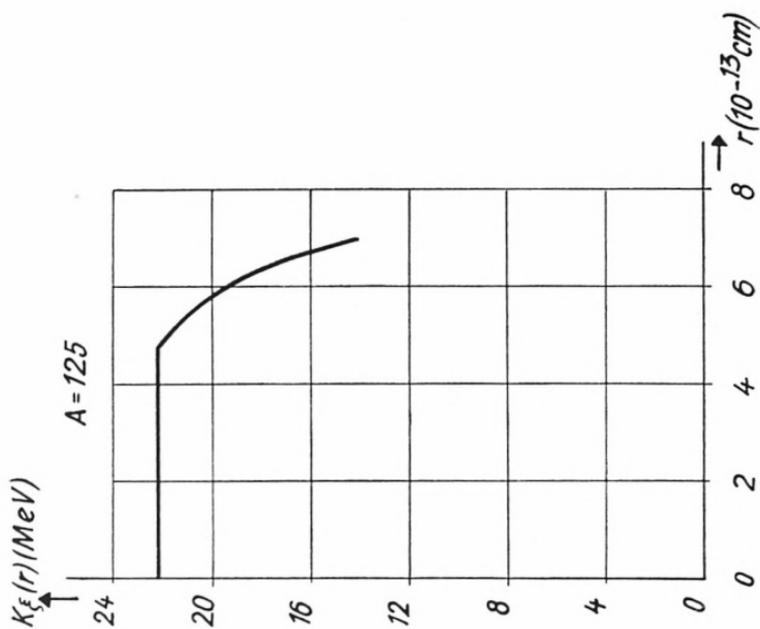


Schaubild 2. Die in (7.6) definierten ortsabhängigen Asymmetrienergien für zwei Kerne vom Atomgewicht 45 und 125. Für die Berechnung ist das Kastenpotential II zugrunde gelegt.

Genau dieselbe Gleichung hat Danos (Da 52) aus dem phänomenologischen Tröpfchenmodell gefolgert. Sein mit einer Asymmetriekonstanten von 20 MeV berechneter Wert für D^2 :

$$D^2 = 0.955 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-2}$$

stimmt sehr gut überein mit unseren Werten:

$$D^2 = 1.008 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-2} \quad \text{für das Kastenpotential I}$$

$$D^2 = 0.953 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-2} \quad \text{für das Kastenpotential II}$$

$$D^2 = 0.992 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-2} \quad \text{für das Exponentialpotential.}$$

Wegen der deutlichen Abweichungen, die $K_\xi(r)$ von \bar{K}_ξ aufweist, dürfen wir unsere Diskussion aber nicht an (13) anschließen, sondern müssen auf (4) zurückgreifen.

Für eine kugelsymmetrische Verteilung können wir in dem Integral in (4) die Integration nach ϑ und φ durchführen und erhalten:

$$\varrho_p(r) = \frac{1}{2} \varrho_0 - \frac{4\pi e^2}{8K_\xi(r)} \cdot \varrho_0 \left(\frac{1}{r} \int_0^r r'^2 \varrho_p' dr' + \int_r^R r' \varrho_p' dr' \right) \quad (14)$$

Wir lösen (14) durch Iteration und gelangen in niedrigster Näherung zu:

$$\varrho_p(r) = \frac{1}{2} \varrho_0 \left(1 - \frac{3}{16} \frac{e^2}{K_\xi(r)} \cdot \frac{1}{R_0} A^{2/3} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{r^2}{R^2} \right) \right) \quad (15)$$

Man liest aus dieser Formel bereits alle wichtigen qualitativen Ergebnisse ab. Für $K_\xi = \text{const}$ erkennt man, daß eine Zunahme von $\frac{A}{2} - z$ proportional $A^{2/3}$ auftritt. Die Protonendichte wächst gegen den Rand zu an. Mit dem $K_\xi(r)$ von (6) dagegen erhalten wir einen Anstieg nur bis $r = R - b$. Dann tritt infolge des Absinkens von $K_\xi(r)$ ein Abfall der Protonendichte ein. Dieser Abfall nimmt seiner Größe nach mit $A^{2/3}$ zu und ist für leichte Kerne gering, für schwere aber merklich. Der Mittelwert von $\frac{A}{2} - z$ bleibt gegenüber $K_\xi = \text{const}$ praktisch ungeändert.

In Schaubild 3 ist der Verlauf der Protonendichte mit r für einen relativ leichten, einen mittleren und einen schweren Kern aufgetragen.

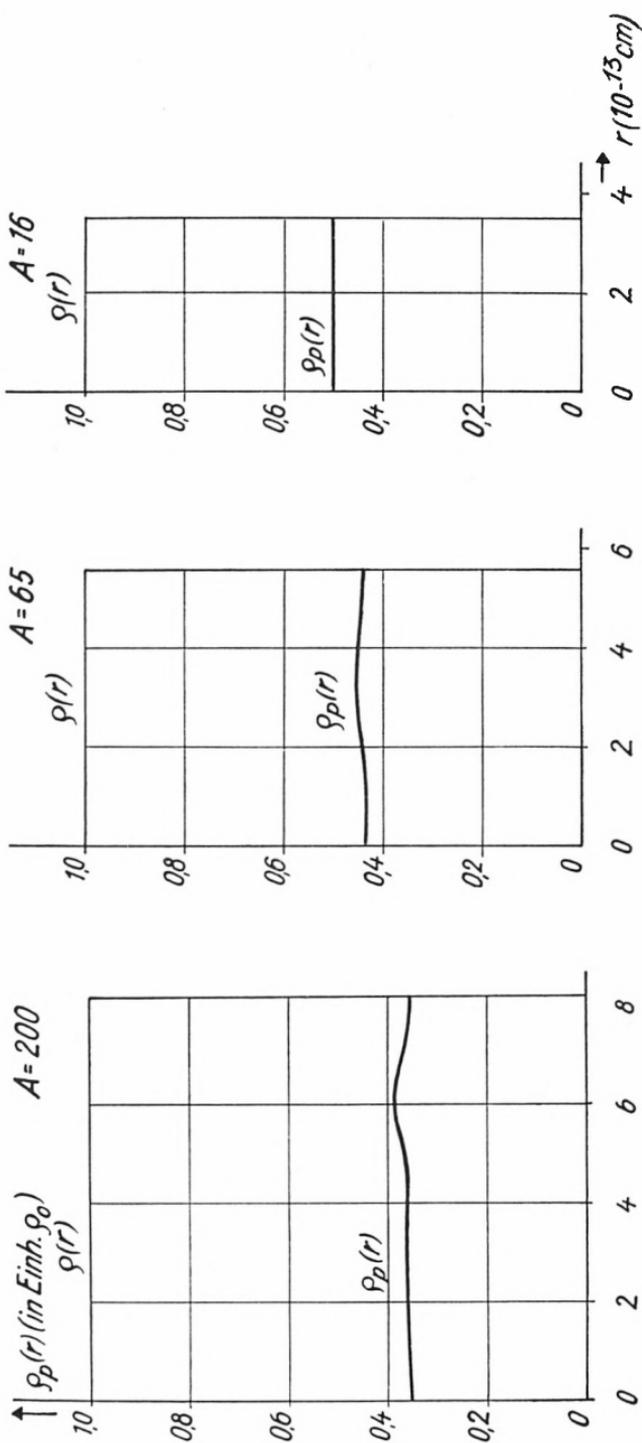


Schaubild 3. Für drei inkompressible Atomkerne vom Atomgewicht $A = 200$, $E = 65$, $E = 16$ mit unstetigem Randabfall ist die stabilste Protonendichte nach (7.15) als Funktion von r aufgetragen. Die Ordinate ist in Vielfachen von ρ_0 geeicht.

Bei unserer Ableitung haben wir das absolute Energieminimum für vorgegebenes A aufgesucht und keine Rücksicht darauf genommen, daß Z_+ , Z_- , N_+ , N_- ganzzahlig sein müssen. Außerdem können bekanntlich Kerne, die nicht unmittelbar am Grund der Energietalsole liegen, stabil gegen β^+ und β^- -Zerfall sein, weil die Umwandlung in den stabilsten Kern über energetisch ungünstigere Zwischenkerne erfolgen muß. Schließlich müßten wir bei Verwendung von richtigen Potentialtopfeigenfunktionen an Stelle von ebenen Wellen und bei Berücksichtigung der Spinbahnkopplung in (2) noch Zusatzterme berücksichtigen, in die die Schalenstruktur der Kerne eingeht.

In formaler Weise können wir all dem dadurch Rechnung tragen, daß wir die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}\int \xi d\tau &= Z_+ + Z_- - N_+ - N_- \\ \int \eta d\tau &= Z_+ - Z_- + N_+ - N_- \\ \int \zeta d\tau &= Z_+ - Z_- - N_+ + N_-\end{aligned}\quad (16)$$

mit Lagrangeschen Parametern bei der Variation berücksichtigen und diese Parameter durch Einsetzen der Lösung in (16) festlegen. Für stabile Kerne kann $Z_+ + N_+ - Z_- - N_-$ und $Z_+ + N_- - Z_- - N_+$ nicht viel von 0, $Z - N$ nicht viel von dem nach (15) berechneten stabilsten Wert abweichen. Dem ist auch wirklich so, wie ein Blick auf die Tabelle der stabilen Kerne beweist. Die Näherung (15) liefert allerdings für schwere Kerne noch keine allzu gute Übereinstimmung, wir müssen einen Iterationsschritt weitergehen.

Wir geben für einige A den stabilsten Wert von $\frac{N-Z}{A}$ an und vergleichen ihn mit den in der Natur auftretenden Werten.

A	$\left(\frac{N-Z}{A}\right)_{\text{th.}}$	$\left(\frac{N-Z}{A}\right)_{\text{exp.}}$
40	0.084	0 bis 0.10
100	0.142	0.12 bis 0.16
160	0.187	0.175 bis 0.20
200	0.216	0.200
238	0.228	0.226

Die Abnahme der Protonendichte am Rand, die wir aus (15) abgelesen haben, führt dazu, daß bei Radiusmessungen mittels elektromagnetischer Methoden ein kleinerer Wert für R gemessen wird als bei der Radiusbestimmung mit Hilfe von Nukleonenstreuexperimenten. Der Oberflächeneffekt der Ladungsasymmetrienergie erklärt also mindestens teilweise den zunächst so überraschenden Befund des verkleinerten Protonenradius. Zu diesem Ergebnis kamen auch mit etwas anderen Methoden Wildermuth und Mittelstaedt in kürzlich erschienenen Arbeiten (Wm 54, Mi 55).

Für eine quantitative Beschreibung des experimentellen Befundes kann aber (15) nicht ausreichen, wenn wir mit $K_{\xi}(r)$ nach (6) arbeiten. In Wirklichkeit fällt nämlich die Gesamtdichte nicht jäh ab, vielmehr tritt ein stetiger Abfall innerhalb einer Randzone von der Breite ca. $1,6 \cdot 10^{-13}$ cm auf (Wei 35). In dieser Randzone hat die kinetische Energie einen kleineren Wert als im Kerninneren, da die Teilchen bei ihrem Anlaufen gegen den Potentialberg am Rand abgebremst werden. Der Beitrag der potentiellen Energie beginnt in einem Abstand b vom Anfang des Randabfalls abzusinken, die Abnahme ist aber zunächst weniger steil als nach (8). Am Ende der Randzone ist der Beitrag der potentiellen Energie auf einen Wert abgefallen, der etwas kleiner ist als $K_{\xi p}(R)$ nach (8).

In Schaubild 4 haben wir halbquantitativ den Verlauf von $K_{\xi}(r)$ bei stetigem Randabfall dargestellt. Es ist anzunehmen, daß die Wirklichkeit nicht stark von diesem abgeschätzten Verlauf abweicht.

Um ϱ_p zu erhalten, brauchen wir nur in (15) ϱ_0 durch ϱ zu ersetzen und den korrigierten Wert für $K_{\xi}(r)$ zu verwenden. Der Dichteverlauf für ϱ_p bei vorgegebenem ϱ ist für $A = 200$ in Figur 5 aufgetragen. Der Radius der Protonenersatzkugel sollte etwa $7,7 \cdot 10^{-13}$ cm betragen und ist damit um rund $0,5 \cdot 10^{-13}$ cm kleiner als der Kernradius nach Nukleonenstreuversuchen. Wendet man, was allerdings wenig sinnvoll, aber bisher üblich ist, die Formel

$$R_p = R_{p_0} \cdot A^{1/3} \quad (18)$$

an, so erhält man für R_{p_0} bei $A = 200$

$$R_{p_0} \approx 1,32 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (19)$$

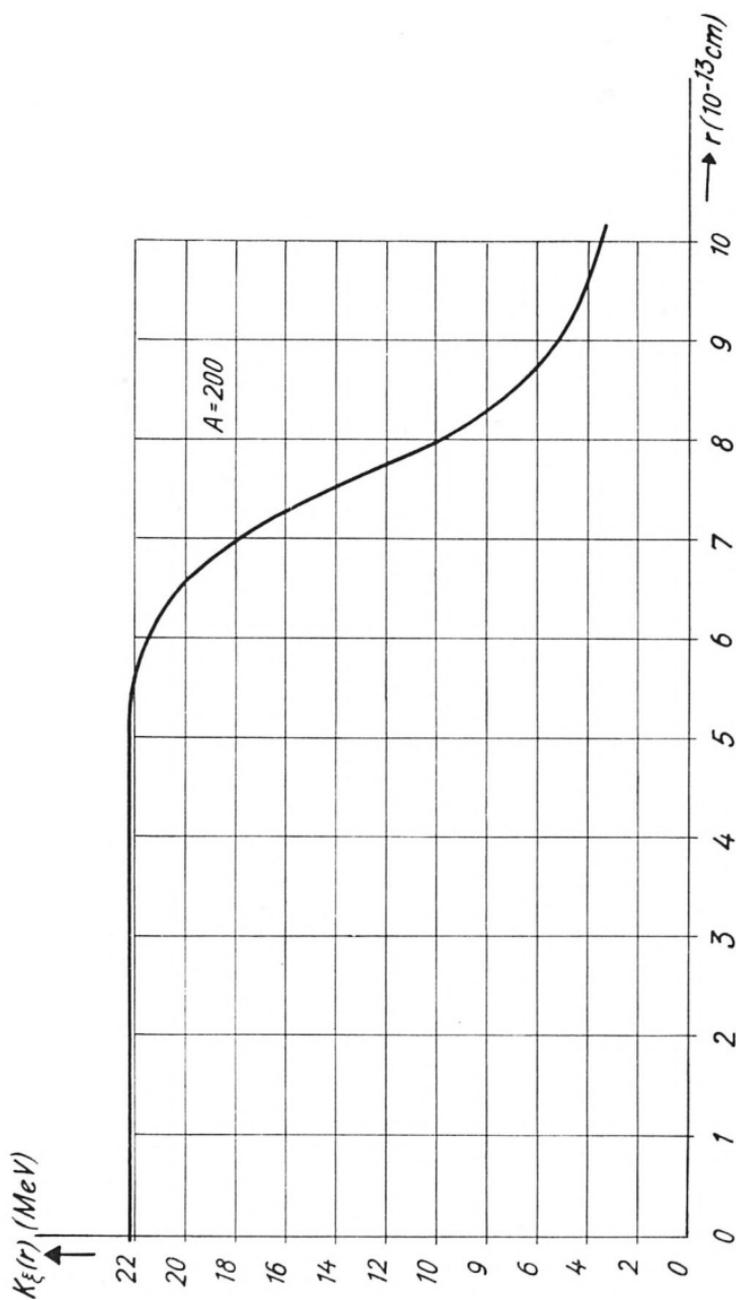


Schaubild 4. Für den Kern $A = 200$ ist der vermutliche Verlauf der Asymmetrieenergie bei stetigem Randabfall als Funktion von r aufgetragen. Die Kurve ist nicht berechnet, sondern aus qualitativen Überlegungen gewonnen. Sie ist als Skizze zu werten und hat keine Beweiskraft.

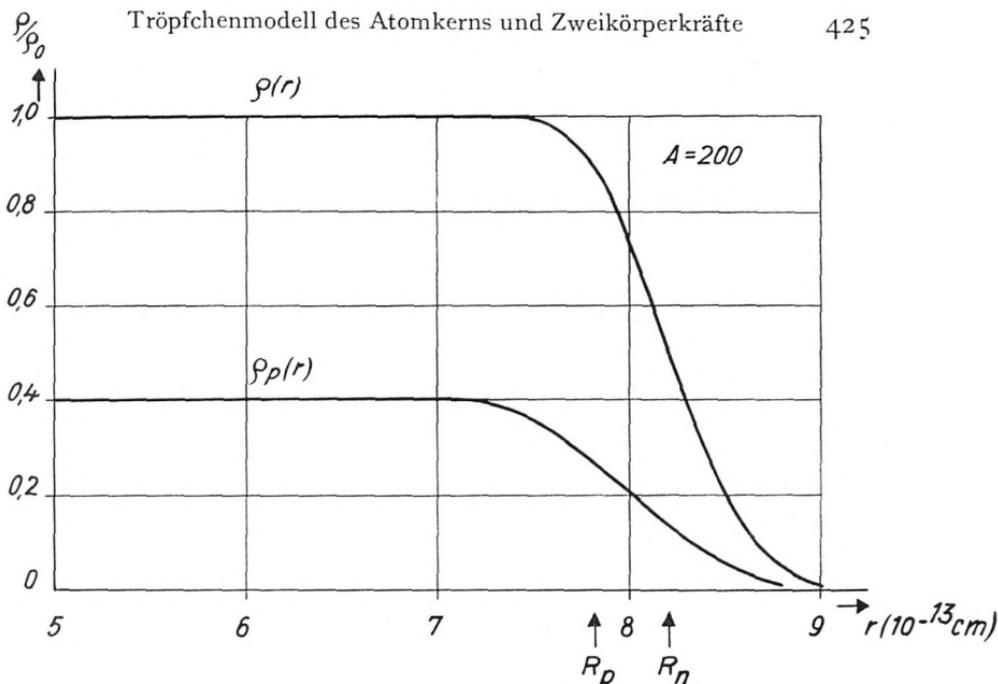


Schaubild 5. In dieser Figur ist der stabilste Dichteverlauf der Ladung bei vorgegebener stetig abfallender Gesamtnucleondichte unter Verwendung der Asymmetrieenergie des Schaubildes 4 dargestellt. Auch diese Figur hat im wesentlichen nur qualitative Bedeutung.

Dies stimmt gut überein mit den Überlegungen von Wildermuth, deckt aber nur ungefähr die Hälfte der experimentell beobachteten Radiusabweichung. Der Differenzbetrag ist nach Wildermuth wahrscheinlich auf eine inkonsequente Analyse der Meßergebnisse zurückzuführen.

Abschließend möchten wir noch betonen, daß unsere quantitativen Aussagen über den Protonenradius noch eine beträchtliche Unsicherheit besitzen, daß aber allen qualitativen Folgerungen großes Vertrauen geschenkt werden dürfte.

b) Die Konstanten der Bethe-Weizsäcker-Formel

Nach Abschnitt a) gilt in guter Näherung

$$\begin{aligned}
 \varrho &= \varrho_0 \\
 \xi &= (Z_+ + Z_- - N_+ - N_-)/A \cdot \varrho_0 \\
 \eta &= (Z_+ - Z_- + N_+ - N_-)/A \cdot \varrho_0 \\
 \zeta &= (Z_+ - Z_- - N_+ + N_-)/A \cdot \varrho_0
 \end{aligned} \tag{20}$$

Wir dürfen dann ohne weiteren Fehler $p(\mathbf{r}, s)$ durch $p(s)$ ersetzen¹ und erhalten aus (2)

$$\begin{aligned}
 E = A \cdot \left\{ -a + c \cdot A^{-1/3} + dZ^2 \cdot A^{-4/3} \right. \\
 + K_{\xi} \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 + K_{\eta} \left(\frac{Z_+ + N_+ - Z_- - N_-}{A} \right)^2 \\
 \left. + K_{\zeta} \left(\frac{Z_+ + N_+ - Z_- - N_-}{A} \right)^2 \right\} \quad (21)
 \end{aligned}$$

Aus der niedrigsten sinnvollen Näherung unserer Theorie folgt also die Bethe-Weizsäcker-Formel. Wir haben gezeigt, daß diese Näherung bereits eine gute Approximation der Wirklichkeit darstellen sollte, so daß (21) den empirischen Befund gut wiedergeben müßte; diese Erwartung wird bekanntlich sehr gut bestätigt.

Für die Konstanten von (21) liefern die Potentiale aus § 1:

Kastenpotential I

$$a = -12.55 \text{ MeV} \quad (22)$$

$$c = 22.6 \text{ MeV}$$

$$K_{\xi} = (20.75 - 10.45 \cdot A^{-1/3}) \text{ MeV} \quad (= 18.65 \text{ für } A = 125)$$

$$K_{\eta} = (13.60 - 4.54 \cdot A^{-1/3}) \text{ MeV} \quad (= 12.50 \text{ für } A = 125)$$

$$K_{\zeta} = (17.20 - 7.52 \cdot A^{-1/3}) \text{ MeV} \quad (= 15.70 \text{ für } A = 125)$$

Kastenpotential II

$$a = -14.45 \text{ MeV}$$

$$c = 25.4 \text{ MeV}$$

$$K_{\xi} = (22.35 - 12.35 \cdot A^{-1/3}) \text{ MeV} \quad (= 19.80) \quad (23)$$

$$K_{\eta} = (13.20 - 4.40 \cdot A^{-1/3}) \text{ MeV} \quad (= 12.30)$$

$$K_{\zeta} = (17.75 - 8.40 \cdot A^{-1/3}) \text{ MeV} \quad (= 16.10)$$

¹ Die beträchtlichen Abweichungen von Asymmetrieenergie und Protonendichte vom Mittelwert, die in der Randzone auftreten, könnten zu der Vermutung Anlaß geben, daß mit (20) die Asymmetrieenergie falsch berechnet werden könnte. Das ist aber nicht der Fall, weil sich beide Effekte weitgehend kompensieren; wo $K_{\xi}(r)$ klein ist, da ist q_n und q_p groß und umgekehrt.

Exponentialpotential

$$a = -14.15 \text{ MeV}$$

$$c = 27.9 \text{ MeV}$$

$$K_{\xi} = (21.65 - 13.1 \cdot A^{-1/3}) \text{ MeV} \quad (= 19.05) \quad (24)$$

$$K_{\eta} = (13.90 - 5.55 \cdot A^{-1/3}) \text{ MeV} \quad (= 12.80)$$

$$K_{\zeta} = (17.75 - 9.32 \cdot A^{-1/3}) \text{ MeV} \quad (= 15.90)$$

Für die Konstante d der Coulombenergie erhalten wir

$$\begin{aligned} d &= 0.617(1 - 1.14A^{-2/3} + 1.21A^{-1}) \\ &= (0.595 \text{ für } A = 125) \end{aligned} \quad (25)$$

Vergleichen wir unser Ergebnis mit der empirischen Formel, so springt zunächst das zusätzliche Auftreten von zwei weiteren Asymmetrietermen neben der bekannten Asymmetrieenergie der Ladung in die Augen. Man erkennt aber sofort, daß diese Terme der experimentellen Bestimmung praktisch unzugänglich sind und darum in einer empirischen Formel fehlen müssen. Für alle stabilen Kerne sind nämlich die Faktoren

$$\left(\frac{Z_+ + N_+ - Z_- - N_-}{A}\right)^2, \quad \left(\frac{Z_+ + N_- - Z_- - N_+}{A}\right)^2 \quad (26)$$

sehr klein. Es besteht ja beim Spin - wenn man von der Schalenstruktur absieht - kein Anlaß zum Überwiegen einer Sorte, im Gegensatz zu den Verhältnissen bei der Ladung, wo der Coulombeffekt die Protonenzahl herabzudrücken strebt.

Ein weiteres Novum ist der Oberflächeneffekt der Asymmetrieenergie. Auch er entgeht der experimentellen Beobachtung, da die Ladungsasymmetrieenergie erst für schwere Kerne merklich wird und bei diesen der Oberflächeneffekt nur noch wenig mit A variiert. Experimentell wird man immer etwa die Konstante beobachten, die für $A^{-1/3} = 0.2$ in Klammern angegeben ist. Das vorliegende experimentelle Material legt die möglichen Konstantensätze noch nicht völlig fest. Es werden diskutiert:

	Heisenberg	Feenberg	Fermi
$a =$	-15.74	-14.0	-19.67 MeV
$b =$	22.0	18.1	20.5 MeV
$c =$	16.5	13.1	15.37 MeV

Was die quantitative Übereinstimmung mit den empirischen Konstanten anbetrifft, so ist diese bei Volumen- und Ladungsasymmetrieenergie sowie natürlich beim Coulombterm gut. Vor allem beim Exponentialpotential, das von der Streuung her am besten begründet ist, haben wir Übereinstimmung mit den Feenbergschen Werten bei einem maximalen Fehler von etwa 5%. Ein besseres Ergebnis können wir nicht erwarten, einmal wegen des Näherungscharakters unserer Theorie, zum anderen wegen der Unsicherheit des Radius R und der Werte der Potentialkonstanten.

Eine deutliche Abweichung müssen wir nur bei der Konstanten der Oberflächenenergie feststellen, die um 50–100% zu groß ausfällt. Das ist nicht verwunderlich, denn wir dürfen nur erwarten, daß wir den Oberflächeneffekt der potentiellen Energie leidlich erfaßt haben. Die kinetische Energie der inneren Bewegung aber mußte bei unserem Ansatz für die Einteilchenwellenfunktionen viel zu groß ausfallen, da wir einen Topf mit unendlich hohen Wänden zugrunde gelegt haben. Wegen der Unmöglichkeit des Austritts aus dem Kernvolumen muß allein infolge der Unschärferelation der mittlere Teilchenimpuls wesentlich größer werden als bei einem Pauschalpotential mit endlicher Tiefe und entsprechend endlicher Breite der Randzone.

Man sieht aus dieser Diskussion bereits, daß ein besseres Erfassen des Oberflächeneffektes ein Abgehen von dem einfachen Ansatz (5.24) für die Einteilchenwellenfunktionen erfordert.

Bezüglich der Asymmetrieenergie sind ähnliche Ergebnisse auf etwas anderem Wege früher von Schlögl (Schl 53) erhalten worden, der nicht die pauschale Asymmetrieenergie, sondern die lokalen Symmetriekräfte bei seiner Ableitung in den Vordergrund stellte. Seine Werte

$$K_{\xi} = 19.5 \text{ MeV} \quad K_{\eta} = 11.5 \text{ MeV}$$

$$K_{\zeta} = 15,5 \text{ MeV}$$

stimmen mit den unseren recht gut überein. Allerdings erhöhen sich die Werte nach Korrektur eines Rechenfehlers um jeweils 6 MeV.

Unser Ergebnis ist insofern höchst bemerkenswert, als allein mit Zweikörperkräften die Bindungsenergie weitgehend richtig beschrieben werden kann, wenn der Parameter Kernradius nicht variiert, sondern vorgegeben wird. Unser Ergebnis liefert damit den Beweis für die in § 1 aufgestellte Hypothese von der Wirkungsweise der Mehrkörperkräfte.

Jede genauere Berechnung der Bindungsenergie läßt sich nicht mehr in eine für alle Kerne gültige Formel einpassen, sondern erfordert individuelle Kernkonstanten. Diese weichen aber sehr wenig von den Werten (22)–(24) ab. So erhalten wir beim U^{238} für die Asymmetrienergie bei Verwendung von $t_i t_k$ statt t_0^2 eine um 1% niedrigere Konstante. Diese Abweichung ist noch kleiner, als man erwarten könnte, was davon herrührt, daß sich die in den Einzeltermen auftretenden Abweichungen größtenteils kompensieren.

Wir dürfen also beim heutigen Stand von Theorie und Experiment mit bester Berechtigung an den universellen Konstanten in der Bethe-Weizsäcker-Formel festhalten.

8. Nichtstationäre Kernschwingungen der Ladungsdichte

Wir wollen uns nun den nichtstationären Lösungen von (6.50) zuwenden.

Wie Jensen und Steinwedel gezeigt haben (Je 50), lassen sich die bei (γ, x) -Prozessen ($x = p, d, n, 2n$) auftretenden Resonanzfrequenzen im Bereich von 10 bis 25 MeV deuten als Eigenfrequenzen der Schwingungen von Neutronen- und Protonenflüssigkeit im Kerntröpfchen.

Solche Ladungsschwingungen werden angeregt durch ein äußeres Feld. Freie Schwingungen sind nach (6.50) möglich, klingen aber wegen der stets vorhandenen Dämpfung rasch ab.

a) Freie Schwingungen

Wir wollen unsere Diskussion mit der Analyse der freien Ladungsschwingungen beginnen. Um das Problem zu ver-

einfachen, beschränken wir unsere Diskussion vorerst auf den einfachsten Fall, nämlich auf Kerne, die die Bedingungen

$$\bar{\varrho}_{P+} = \bar{\varrho}_{P-} = \frac{\bar{\varrho}_p}{2} \quad ; \quad \bar{\varrho}_{N+} = \bar{\varrho}_{N-} = \frac{\bar{\varrho}_n}{2} \quad (1)$$

erfüllen.

Dann vereinfachen sich die Gleichungen (6.50) bei Benutzung der Währung (6.52, 53) zu:

$$m \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_p} + \frac{1}{\bar{\varrho}_n} \right) + m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_p} - \frac{1}{\bar{\varrho}_n} \right) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \Delta \varrho (\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12} + \bar{\gamma}_{13} + \bar{\gamma}_{14}) \\ &+ \Delta \xi (\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{13} - \bar{\gamma}_{14}) \cdot \frac{1}{2} (\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14}) (\bar{\varrho}_n - \bar{\varrho}_p) \\ &- 4 \operatorname{div} (a b^2 \operatorname{grad} \varrho e^{b(\varrho - \varrho_0)}) \\ &- 4 \pi e^2 (\varrho + \xi) \left(1 + \frac{\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14}}{2} (\bar{\varrho}_n - \bar{\varrho}_p) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &m \frac{\partial^2 \varrho_p}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_p} - \frac{1}{\bar{\varrho}_n} \right) + m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_p} + \frac{1}{\bar{\varrho}_n} \right) \\ &= \Delta \xi \cdot (\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{13} - \bar{\gamma}_{14}) \left(1 + \frac{\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14}}{2} \varrho_0 \right) \quad (3) \\ &- 4 \pi e^2 (\varrho + \xi) \left(1 + \frac{\varrho_0}{2} (\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_p} + \frac{1}{\bar{\varrho}_n} \right) + m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_p} - \frac{1}{\bar{\varrho}_n} \right) \\ &= \Delta \eta (\bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{12} + \bar{\gamma}_{13} - \bar{\gamma}_{14}) \left(1 + \frac{\varrho_0}{2} (\bar{\mu}_{12} + \bar{\mu}_{14}) \right) \quad (4) \\ &+ \Delta \zeta (\bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{13} + \bar{\gamma}_{14}) \left(\frac{\bar{\varrho}_n - \bar{\varrho}_p}{2} (\bar{\mu}_{13} - \bar{\mu}_{12}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_p} + \frac{1}{\bar{\varrho}_n} \right) + m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_p} - \frac{1}{\bar{\varrho}_n} \right) \\ &= \Delta \eta (\bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{12} + \bar{\gamma}_{13} - \bar{\gamma}_{14}) \left(\frac{\bar{\varrho}_n - \bar{\varrho}_p}{2} (\bar{\mu}_{14} - \bar{\mu}_{12}) \right) \quad (5) \\ &+ \Delta \zeta (\bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{13} + \bar{\gamma}_{14}) \left(1 + \frac{\varrho_0}{2} (\bar{\mu}_{12} + \bar{\mu}_{13}) \right) \end{aligned}$$

Man sieht, daß die durch η und ζ beschriebenen Spinschwingungen vollständig von den Ladungsschwingungen entkoppelt sind und daß $\eta = 0$, $\zeta = 0$ eine mögliche Lösung darstellt.

Die uns hinfort allein interessierenden Ladungsschwingungen wollen wir unter der Annahme untersuchen, daß die Mehrkörperkräfte fast völlige Inkompressibilität erzwingen. Die erste Gleichung (2) wird dann mit bester Näherung durch

$$\varrho = \varrho_0 \quad (6)$$

gelöst, wobei der Wert von ξ ohne Einfluß bleibt. (In (3) spielen die Mehrkörperkräfte keine Rolle. Mit (6) können wir umformen:

$$m \frac{\partial^2 \varrho_p}{\partial t^2} = \frac{\bar{\varrho}_p \bar{\varrho}_n}{\varrho_0} \Delta \varrho_p (\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{13} - \bar{\gamma}_{14}) \left(1 + \frac{\varrho_0}{2} (\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14}) \right) - 4\pi e^2 \varrho_p \left(1 + \frac{\varrho_0}{2} (\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14}) \right) \frac{\bar{\varrho}_p \bar{\varrho}_n}{\varrho_0} \quad (7)$$

oder

$$\frac{\partial^2 \varrho_p}{\partial t^2} - u^2 \Delta \varrho_p + A^2 \varrho_p = 0 \quad (8)$$

mit

$$u^2 = \frac{NZ}{A^2} \frac{\varrho_0}{m} (\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{13} - \bar{\gamma}_{14}) \left(1 + \frac{\varrho_0}{2} (\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14}) \right) \quad (9)$$

$$A^2 = \frac{NZ}{A^2} \frac{\varrho_0}{m} \cdot 4\pi e^2 \left(1 + \frac{\varrho_0}{2} (\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14}) \right) \quad (10)$$

Hinzu kommt die Randbedingung, daß an der Oberfläche die Radialgeschwindigkeit der Nukleonenströmung gleich der Geschwindigkeit der Oberfläche sein muß. Wenn wir annehmen, daß der Rand starr ist, wenn wir also von der Kopplung mit Oberflächenschwingungen absehen, folgt aus (6.43):

$$(\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12}) \text{grad}_r \varrho_p + (\bar{\gamma}_{13} + \bar{\gamma}_{14}) \text{grad}_r \varrho_n = 2e \mathfrak{E}_r + a b^2 e^{b(e-\varrho_0)} \text{grad}_r \varrho \quad (11)$$

$$(\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12}) \text{grad}_r \varrho_n + (\bar{\gamma}_{13} + \bar{\gamma}_{14}) \text{grad}_r \varrho_p = a b^2 e^{b(e-\varrho_0)} \text{grad}_r \varrho \quad \text{für } r = R \quad (12)$$

Subtraktion bzw. Addition liefert

$$(\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{13} - \bar{\gamma}_{14}) (\text{grad}_r \varrho_p - \text{grad}_r \varrho_n) = 2e \mathfrak{E}_r \quad (13)$$

$$(\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12} + \bar{\gamma}_{13} + \bar{\gamma}_{14}) \text{grad}_r \varrho = 2e \mathfrak{E}_r + 2ab^2 e^b (e^{-\varrho_0}) \text{grad}_r \varrho \quad (14)$$

Bei entsprechend singulärem Verhalten der Mehrkörperkraft folgt die Randbedingung

$$\text{grad}_r \varrho_p = \frac{e \mathfrak{E}_r}{(\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{13} - \bar{\gamma}_{14})} \quad \text{für } r = R. \quad (15)$$

Als Lösung von (8) haben wir

$$\varrho_p = \varrho_{p_s} + \gamma(\mathbf{r}, t) \quad (16)$$

ϱ_{p_s} beschreibt den im vorigen Abschnitt hergeleiteten stationären Anteil, während γ die nichtstationären Dichteschwankungen angibt.

Für die nichtstationären Ladungsschwingungen machen wir den Ansatz:

$$\gamma = \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm} j_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} e^{i\omega t} \quad (17)$$

Dann gilt für die Frequenz die Beziehung

$$\omega^2 = k^2 u^2 + A^2 \quad (18)$$

Die Wellenzahl k folgt aus der Randbedingung (15). Für den stationären Anteil von Dichte und Feldstärke gilt nach (7.4) die Beziehung (15) im ganzen Kern.¹ Für den nichtstationären Anteil folgt

$$e \frac{\partial j_l}{\partial r} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \Big|_{r=R} = -e \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (19)$$

$$= -e \frac{\partial}{\partial r} \frac{e}{r} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^R d\varphi' \sum_{v=0}^{\infty} P_v(\cos \Theta) \left(\frac{r'}{r}\right)^v j_l(kr') P_l^m(\cos \vartheta') e^{im\varphi'} d \cos \vartheta' r'^2 dr' \Big|_{r=R}$$

mit

$$\varepsilon = (\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{13} - \bar{\gamma}_{14}) = 8K_{\xi} / \varrho_0 \quad (20)$$

¹ In diesem Abschnitt rechnen wir mit dem Mittelwert \bar{K}_{ξ} , was bei der Problemstellung in erster Näherung gerechtfertigt ist.

Nach dem Additionstheorem der Kugelfunktionen ist

$$P_\nu(\cos \Theta) = \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} \frac{(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!} P_\nu^\mu(\cos \vartheta) P_\nu^\mu(\cos \vartheta') e^{i\mu(\varphi-\varphi')} \quad (21)$$

Es folgt

$$\varepsilon \frac{\partial j_l}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{e^2}{R^{\varepsilon+2}} \frac{4\pi(l+1)}{2l+1} \int_0^R r'^{l+2} j_l(kr') dr' \quad (22)$$

Für $l=0$ folgt

$$\frac{X \cos X - \sin X}{X^2} = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon} \frac{\sin X - X \cos X}{X^2} \quad (23)$$

mit

$$X = kR \quad (24)$$

und dies erfordert

$$X = 0 \quad k_0 = 0 \quad (25)$$

Wegen der Normierungsforderung

$$\int \varrho_p \delta\tau = Z \quad (26)$$

muß aber dann

$$A_0 = 0 \quad (27)$$

sein.

Für den Dipolfall folgt:

$$\frac{8\pi}{3} \frac{e^2 R^2}{\varepsilon} = \frac{\frac{1}{X} j_1(X) - j_2(X)}{j_2(X)} \quad (28)$$

oder

$$Q = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2 R^2}{\varepsilon} = -\frac{2}{3} X^2 \frac{\cotg X - \frac{1}{X} + \frac{X}{2}}{\cotg X - \frac{1}{X} + \frac{X}{3}} \quad (29)$$

Nun ist Q eine kleine Größe

Kastenpotential I

$$Q = \frac{23 \cdot 55}{1914 - 964 \cdot A^{-1/2}} \cdot A^{3/2} \quad (30)$$

Kastenpotential II

$$Q = \frac{23 \cdot 55}{2050 - 1139 \cdot A^{-1/3}} \cdot A^{2/3} \quad (30)$$

Exponentialpotential

$$Q = \frac{23 \cdot 55}{1991 - 1207 \cdot A^{-1/3}} \cdot A^{2/3}$$

Vernachlässigen wir Q gänzlich, so ist

$$\cotg X_0 = \frac{2 - X_0^2}{2X_0} \quad (31)$$

die Bedingungsgleichung für die Lösung. (31) wird erfüllt durch

$$X_0 = \pm 2.08; \pm 5.95; \pm 9.20; \pm 12.42 \text{ usw.} \quad (32)$$

Um für nichtverschwindendes Q die Korrektur zu erhalten, setzen wir

$$X = X_0 + \delta \quad (33)$$

Dann folgt aus (29):

$$-\frac{2X^2}{3Q} = 1 - \frac{X}{6} \frac{1}{\cotg X - \frac{2-X^2}{2X}} \quad (34)$$

und nach Entwicklung bis zu Gliedern erster Ordnung in Q und δ

$$\delta = -\frac{QX_0}{X_0^4 - 2X_0^2} \quad (35)$$

Für die Frequenz ω erhalten wird dann

$$\omega_a^2 = \frac{X_a^2 u^2}{R^2} \left(1 + \frac{A^2 R^2}{u^2 X_a^2} \right) = \frac{X_a^2 u^2}{R^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{Q}{X_a^2} \right) \quad (36)$$

wobei a die Anregungsstufe bezeichnet. Entwickeln wir bis zu Gliedern erster Ordnung in Q , so folgt

$$\omega_a = \frac{u X_{0a}}{R} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{Q}{X_{0a}^2} - \frac{Q}{X_{0a}^4 - 2X_{0a}^2} \right) \quad (37)$$

Die Coulombkraft vergrößert also die Resonanzfrequenzen. Die Abweichung in der Frequenz

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = Q \left(\frac{3}{4X_{0a}^2} - \frac{1}{X_{0a}^3 - 2X_{0a}^2} \right) \quad (38)$$

läßt sich für $X_0 \alpha = 2,08$ mit ausreichender Genauigkeit durch

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} \approx 1 \cdot 10^{-3} \cdot A^{2/3} \quad (39)$$

darstellen. Die Frequenzerhöhung erreicht für die schwersten Kerne $\approx 4\%$.

Unser Ergebnis unterscheidet sich von dem bei Danos (Da 52) hergeleitetem. Danos konnte sein Ergebnis interpolieren durch die Formel

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = 1.16 \cdot 10^{-4} \cdot A^{1.3} \quad (40)$$

Die Größenordnung stimmt allerdings überein. Der Unterschied ist darauf zurückzuführen, daß Danos auch noch die örtliche Variation der stationären Protonendichte berücksichtigt, für diese Dichte aber einen unzutreffenden Wert mit gegen den Rand zu wachsender Protonendichte zugrunde legt.

Wir verzichten auf eine analoge Behandlung, da wir gesehen haben, daß eine genauere Untersuchung derartiger Effekte eine sorgfältigere Berücksichtigung der Oberflächenstruktur notwendig macht. Es muß dann nämlich konsequenterweise nicht nur die Variation der Dichte im Kerninnern, sondern auch die Abänderung der Randbedingung durch den stetigen Randabfall und die Ortsabhängigkeit der Symmetriekraft mitberücksichtigt werden.

Die unverschobene Frequenz wird durch eine Formel von fast der gleichen Form wiedergegeben wie bei Steinwedel und Jensen. Der wichtigste Unterschied ist, daß an die Stelle der Nukleonenmasse eine effektive Masse

$$m^* = \frac{m}{1 + \frac{e_0}{2} (\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14})} \quad (41)$$

tritt, die kleiner ist als m . Dieser Effekt rührt allein von den Austauschkräften her und ist von Jensen und Steinwedel voraus-

gesagt worden (St 51). Eine quantitative Berechnung ist aber erst jetzt möglich, nachdem die Symmetriekräfte auf die normalen Kernkräfte zurückgeführt sind. Qualitativ ist die Verkleinerung der Masse unmittelbar einleuchtend, da die Trägheit des mesonischen Ladungstransportes kleiner sein sollte als die des konvektiven.

Ein weiterer Unterschied unseres Ergebnisses gegenüber der alten Theorie ist, daß nunmehr die Symmetriekraft infolge des Oberflächeneffektes vom Atomgewicht abhängig wird.

Im Energiemaß erhalten wir für die Resonanzfrequenzen Kastenpotential I

$$\hbar \omega = \sqrt{\frac{4NZ}{A^2}} \cdot 73.1 (1 + 10^{-3} \cdot A^{2/3}) \cdot A^{-1/3} \cdot \sqrt{(1 - 0.50 \cdot A^{-1/3}) (1 - 0.30 \cdot A^{-1/3})} \text{ MeV} \quad (42)$$

Kastenpotential II

$$\hbar \omega = \sqrt{\frac{4NZ}{A^2}} \cdot 78.2 (1 + 10^{-3} \cdot A^{2/3}) \cdot A^{-1/3} \cdot \sqrt{(1 - 0.55 \cdot A^{-1/3}) (1 - 0.36 \cdot A^{-1/3})} \text{ MeV} \quad (43)$$

Exponentialpotential

$$\hbar \omega = \sqrt{\frac{4NZ}{A^2}} \cdot 73.0 (1 + 10^{-3} \cdot A^{2/3}) \cdot A^{-1/3} \cdot \sqrt{(1 - 0.60 \cdot A^{-1/3}) (1 - 0.25 \cdot A^{-1/3})} \text{ MeV} \quad (44)$$

Jensen und Steinwedel erhielten:

$$\hbar \omega = \sqrt{\frac{4NZ}{A^2}} \cdot 60 \cdot A^{-1/3} \quad (45)$$

Die Ergebnisse sind in Schaubild 6 aufgetragen. Die Kurve stimmt sowohl dem Absolutwert nach als auch in ihrer Abhängigkeit von A besser mit den experimentellen Resultaten überein als die von Jensen und Steinwedel. Außer bei den leichtesten Kernen, für die unser Modell ohnehin nicht zuständig ist, beträgt die Abweichung vom Experiment nie mehr als 10%

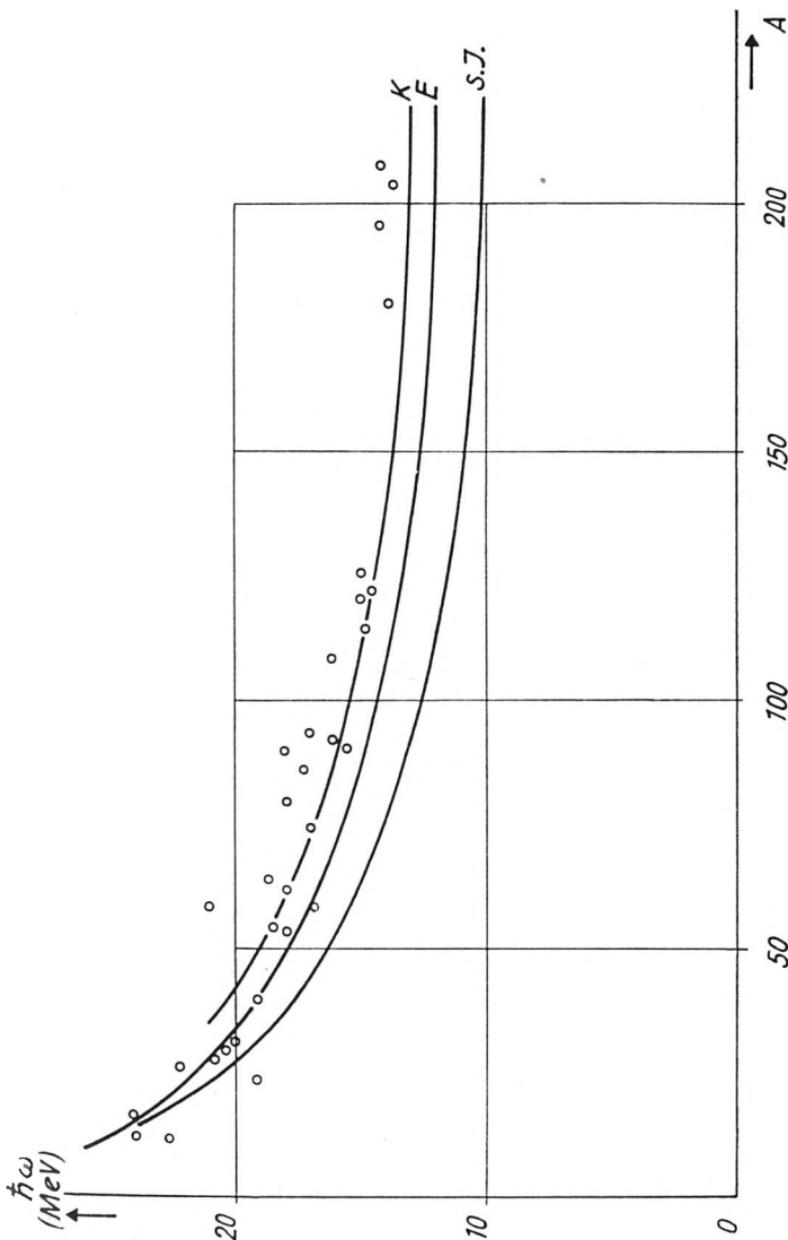


Schaubild 6. Resonanzfrequenzen der γ -Absorption (im Energiemaß) in Abhängigkeit von A . Ausgezogen sind die von uns erhaltenen Werte, gestrichelt die Ergebnisse von Steinwedel und Jensen. K = Kastenpotential II A = Exponentialpotential. Die Punkte geben experimentelle Meßpunkte wieder. Es sind nicht alle Meßwerte eingetragen, da sonst die Figur überlastet würde. Die Auswahl wurde statistisch vorgenommen.

(gegenüber 30% bei Jensen und Steinwedel). Die Abflachung des Kurvenverlaufes gegenüber der alten Theorie bedeutet eine merkliche Annäherung an den experimentellen Verlauf, reicht aber noch nicht ganz aus. Man überlegt sich aber qualitativ sofort, daß der von uns berechnete Oberflächeneffekt der Asymmetrieenergie zu klein ausfällt, da der nicht erfaßte Oberflächeneffekt der kinetischen Energie additiv hinzutritt. Außerdem erhöht die Abweichung der stationären Protonendichte von der Gleichverteilung im Mittel die rücktreibende Kraft und führt zu einer weiteren Erhöhung der Resonanzfrequenz, die für kleine Kerne unmerklich, für schwere aber nicht unbeträchtlich ist. Die Ergebnisse von Danos können als Hinweis auf die Größenordnung dieses Effektes angesehen werden.

Von den verschiedenen Potentialtypen scheint das Kastential II zur Beschreibung des experimentellen Sachverhaltes am besten geeignet.

b) Kopplung mit Spinschwingungen

Wir verzichten nun auf die Einschränkung (1). Bei entsprechender Singularität der Mehrkörperkräfte ist wiederum

$$\varrho = \varrho_0$$

Der Kern ist also inkompressibel. Für ξ, η, ζ machen wir, indem wir uns auf Dipolschwingungen beschränken, den Ansatz

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_s + a j_1(kr) \cos \vartheta e^{i\omega t} \\ \eta &= \eta_s + b j_1(kr) \cos \vartheta e^{i\omega t} \\ \zeta &= \zeta_s + c j_1(kr) \cos \vartheta e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (46)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_2 - \bar{\varrho}_3 - \bar{\varrho}_4 & \delta_1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_1} + \frac{1}{\bar{\varrho}_2} - \frac{1}{\bar{\varrho}_3} - \frac{1}{\bar{\varrho}_4} \right) \\ \varepsilon_2 &= \bar{\varrho}_1 - \bar{\varrho}_2 + \bar{\varrho}_3 - \bar{\varrho}_4 & \delta_2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_1} - \frac{1}{\bar{\varrho}_2} + \frac{1}{\bar{\varrho}_3} - \frac{1}{\bar{\varrho}_4} \right) \\ \varepsilon_3 &= \bar{\varrho}_1 - \bar{\varrho}_2 - \bar{\varrho}_3 + \bar{\varrho}_4 & \delta_3 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_1} - \frac{1}{\bar{\varrho}_2} - \frac{1}{\bar{\varrho}_3} + \frac{1}{\bar{\varrho}_4} \right) \\ \varrho_0 &= \bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_2 + \bar{\varrho}_3 + \bar{\varrho}_4 & \delta_0 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_1} + \frac{1}{\bar{\varrho}_2} + \frac{1}{\bar{\varrho}_3} + \frac{1}{\bar{\varrho}_4} \right)\end{aligned}\quad (47)$$

und den Beziehungen

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{13} - \bar{\gamma}_{14} &= 8K_{\xi}/\rho_0 \\ \bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{12} + \bar{\gamma}_{13} - \bar{\gamma}_{14} &= 8K_{\eta}/\rho_0 \\ \bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{13} + \bar{\gamma}_{14} &= 8K_{\zeta}/\rho_0\end{aligned}\quad (48)$$

haben wir, wenn wir den Coulombeffekt vernachlässigen, das homogene Gleichungssystem zu lösen.

$$\begin{aligned}a\left(\omega^2 \delta_0 - \frac{k^2 8 K_{\xi}}{m \rho_0} \left(1 + \frac{\rho_0}{2} (\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14})\right)\right) + b\left(\omega^2 \delta_3 - \frac{k^2 8 K_{\eta}}{m \rho_0} \frac{\varepsilon_3}{2} (\bar{\mu}_{14} - \bar{\mu}_{12})\right) \\ + c\left(\omega^2 \delta_2 - \frac{k^2 \cdot 8 K_{\zeta}}{m \rho_0} \frac{\varepsilon_2}{2} (\bar{\mu}_{13} - \bar{\mu}_{12})\right) = 0\end{aligned}\quad (49)$$

$$\begin{aligned}a\left(\omega^2 \delta_3 - \frac{k^2 \cdot 8 K_{\xi}}{m \rho_0} \frac{\varepsilon_3}{2} (\bar{\mu}_{14} - \bar{\mu}_{13})\right) + b\left(\omega^2 \delta_0 - \frac{k^2 \cdot 8 K_{\eta}}{m \rho_0} \left(1 + \frac{\rho_0}{2} (\bar{\mu}_{12} + \bar{\mu}_{14})\right)\right) \\ + c\left(\omega^2 \delta_1 - \frac{k^2 \cdot 8 K_{\zeta}}{m \rho_0} \frac{\varepsilon_1}{2} (\bar{\mu}_{12} - \bar{\mu}_{13})\right) = 0\end{aligned}\quad (50)$$

$$\begin{aligned}a\left(\omega^2 \delta_2 - \frac{k^2 \cdot 8 K_{\xi}}{m \rho_0} \frac{\varepsilon_2}{2} (\bar{\mu}_{13} - \bar{\mu}_{14})\right) + b\left(\omega^2 \delta_1 - \frac{k^2 \cdot 8 K_{\eta}}{m \rho_0} \frac{\varepsilon_1}{2} (\bar{\mu}_{12} - \bar{\mu}_{14})\right) \\ + c\left(\omega^2 \delta_0 - \frac{k^2 \cdot 8 K_{\zeta}}{m \rho_0} \left(1 + \frac{\rho_0}{2} (\bar{\mu}_{12} + \bar{\mu}_{13})\right)\right) = 0\end{aligned}\quad (51)$$

Die Größe k ist durch die Randbedingung festgelegt

$$\left. \frac{dj_1(kr)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \quad (52)$$

und hat nach Abschnitt a) den Wert

$$k_{\alpha} = \frac{X_{\alpha}}{R} \quad (53)$$

mit $X_{\alpha} = 2,08$ usw.

Falls wir nichttriviale Lösungen haben wollen, muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \delta_0 - a_{11} & \omega^2 \delta_3 - a_{12} & \omega^2 \delta_2 - a_{13} \\ \omega^2 \delta_3 - a_{21} & \omega^2 \delta_0 - a_{22} & \omega^2 \delta_1 - a_{23} \\ \omega^2 \delta_2 - a_{31} & \omega^2 \delta_1 - a_{32} & \omega^2 \delta_0 - a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (54)$$

sein. Hierbei ist

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{k^2 \cdot 8 K_{\xi}}{m \varrho_0} \left(1 + \frac{\varrho_0}{2} (\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14}) \right) \\
 a_{12} &= \frac{k^2 \cdot 8 K_{\eta}}{m \varrho_0} \frac{\varepsilon_3}{2} (\bar{\mu}_{14} - \bar{\mu}_{12}) & a_{13} &= \frac{k^2 \cdot 8 K_{\zeta}}{m \varrho_0} \frac{\varepsilon_2}{2} (\bar{\mu}_{13} - \bar{\mu}_{12}) \\
 a_{22} &= \frac{k^2 \cdot 8 K_{\eta}}{m \varrho_0} \left(1 + \frac{\varrho_0}{2} (\bar{\mu}_{12} + \bar{\mu}_{14}) \right) & & (55) \\
 a_{21} &= \frac{k^2 \cdot 8 K_{\xi}}{m \varrho_0} \frac{\varepsilon_3}{2} (\bar{\mu}_{14} - \bar{\mu}_{13}) & a_{23} &= \frac{k^2 \cdot 8 K_{\zeta}}{m \varrho_0} \frac{\varepsilon_1}{2} (\bar{\mu}_{12} - \bar{\mu}_{13}) \\
 a_{33} &= \frac{k^2 \cdot 8 K_{\zeta}}{m \varrho_0} \left(1 + \frac{\varrho_0}{2} (\bar{\mu}_{12} + \bar{\mu}_{13}) \right) \\
 a_{31} &= \frac{k^2 \cdot 8 K_{\xi}}{m \varrho_0} \frac{\varepsilon_2}{2} (\bar{\mu}_{13} - \bar{\mu}_{14}) & a_{32} &= \frac{k^2 \cdot 8 K_{\eta}}{m \varrho_0} \frac{\varepsilon_1}{2} (\bar{\mu}_{12} - \bar{\mu}_{14})
 \end{aligned}$$

Da die a_{ik} mit $i \neq k$ und die δ_i mit $i \neq 0$ kleine Größen sind, erhalten wir statt (54) näherungsweise die Gleichung

$$\begin{aligned}
 &(\omega^2 \delta_0 - a_{11}) (\omega^2 \delta_0 - a_{22}) (\omega^2 \delta_0 - a_{33}) \\
 &\quad - (\omega^2 \delta_0 - a_{11}) (\omega^2 \delta_1 - a_{23}) (\omega^2 \delta_1 - a_{32}) \\
 &\quad - (\omega^2 \delta_0 - a_{22}) (\omega^2 \delta_2 - a_{13}) (\omega^2 \delta_2 - a_{31}) \\
 &\quad - (\omega^2 \delta_0 - a_{33}) (\omega^2 \delta_3 - a_{12}) (\omega^2 \delta_3 - a_{21}) = 0
 \end{aligned} \tag{56}$$

Sie wird in nullter Näherung gelöst durch

$$\bar{\omega}^2 \delta_0 = a_{11} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\omega}^2 \delta_0 = a_{22} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\omega}^2 \delta_0 = a_{33} \tag{57}$$

Nehmen wir den ersten Fall, so erhalten wir konsequenterweise in nächsthöherer Näherung

$$(\bar{\omega}^2 \delta_0 - a_{11}) = \frac{(\bar{\omega}^2 \delta_2 - a_{13})(\bar{\omega}^2 \delta_2 - a_{31})}{\bar{\omega}^2 \delta_0 - a_{33}} + \frac{(\bar{\omega}^2 \delta_3 - a_{12})(\bar{\omega}^2 \delta_3 - a_{21})}{\bar{\omega}^2 \delta_0 - a_{22}} \tag{58}$$

und mit

$$\omega = \bar{\omega} + \Delta \omega \tag{59}$$

folgt

$$\Delta \omega = \frac{\bar{\omega}}{2 a_{11}} \left\{ \frac{(a_{11} \frac{\delta_2}{\delta_0} - a_{13})(a_{11} \frac{\delta_2}{\delta_0} - a_{31})}{a_{11} - a_{33}} + \frac{(a_{11} \frac{\delta_3}{\delta_0} - a_{12})(a_{11} \frac{\delta_3}{\delta_0} - a_{21})}{a_{11} - a_{22}} \right\} \tag{60}$$

Man prüft durch Einsetzen der numerischen Werte leicht nach, daß

$$a_{11} > a_{22}, a_{33} \quad (61)$$

und außerdem

$$\left| a_{11} \frac{\delta_2}{\delta_0} \right| > |a_{13}|, |a_{31}|; \quad \left| a_{11} \frac{\delta_3}{\delta_0} \right| > |a_{12}|, |a_{21}| \quad (62)$$

Die Frequenzverschiebung ist also positiv.

Die Verschiebung der beiden anderen Frequenzen ist von geringem Interesse, da die hierzu gehörigen Schwingungen vorwiegend Spinschwingungen sind, die nur mit sehr geringem Wirkungsquerschnitt angeregt werden können. Um ein Beispiel für die auftretenden Größenordnungen anzugeben, haben wir die Frequenzänderung für den Kern o^{15} ausgerechnet. Wir erhalten

$$\frac{\Delta \omega}{\bar{\omega}} \approx 2\%$$

Für schwere Kerne wird die Frequenzverschiebung noch kleiner.

Die Meßgenauigkeit reicht heute noch nicht aus, um unser Ergebnis zu bestätigen oder zu widerlegen. Die Größenordnung des Effektes ist außerdem kleiner als die von nicht berücksichtigten Effekten anderer Art.

Während die praktische Bedeutung unseres Ergebnisses also gering ist, ist es von prinzipiellem Interesse, hier ein Problem zur Untersuchung zu haben, wo durch die spezielle Struktur der Kernkräfte Kopplungen von Spin- und Ladungsbewegung auftreten, ein Effekt, der den bisherigen rein phänomenologischen Theorien fremd war.

c) Erzwungene Schwingungen

Wir wollen nun unter Vernachlässigung des Coulomb-Effektes und der Kopplung mit Spinschwingungen die Anregung von Ladungsschwingungen durch ein äußeres Feld untersuchen.

Wir vervollständigen aber vorher die dann zuständige Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \varrho_p}{\partial t^2} - \omega^2 \Delta \varrho_p = 0 \quad (63)$$

durch einen phänomenologischen Dämpfungsterm

$$\Gamma \frac{\partial \varrho_p}{\partial t}$$

Durch ihn wird eine innere Reibung der Flüssigkeit erfaßt.

Da eine solche innere Reibung nicht aus einem Potential gefolgert werden kann, mußte unsere Herleitung zwangsläufig zu einer reibungsfreien Hydrodynamik führen. In Wirklichkeit aber wird die geordnete Dipolschwingung gedämpft werden und ihre Energie an die ungeordnete Bewegung abgegeben. Man gelangt so zu einer Aufheizung des Kernes, die schließlich zur Verdampfung von einzelnen Nukleonen führt.

Eine genauere physikalische Diskussion des Mechanismus der Energiedissipation ist sehr kompliziert. Reifman (Re 53) und Wildermuth (Wm 55) haben Abschätzungen für den Dämpfungsterm angegeben.

Unsere Grundgleichung ist also:

$$\frac{\partial^2 \varrho_p}{\partial t^2} + \Gamma \frac{\partial \varrho_p}{\partial t} - u^2 \Delta \varrho_p = 0 \quad (64)$$

Als Randbedingung haben wir zu fordern:

$$\varepsilon(\mathbf{r}_0 \text{ grad } \varrho_p) = \mathbf{r}_0 e \mathfrak{E} \quad (65)$$

(\mathbf{r}_0 = Einheitsvektor in radialer Richtung)

\mathfrak{E} bedeutet das äußere anregende Feld.

Abgesehen von der veränderten Bedeutung von u unterscheiden sich unsere Gleichungen nicht von den von Jensen und Steinwedel und etwas genauer von Danos diskutierten Gleichungen. Unsere folgenden Ableitungen schließen sich darum eng an die genannten Arbeiten an.

Mit dem Ansatz

$$\varrho_p = \varrho_{p_s} + \gamma(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (16)$$

folgt

$$\Delta \gamma + \kappa_0^2 \gamma = 0 \quad (66)$$

mit

$$\kappa_0^2 = \frac{\omega^2}{u^2} \left(1 + i \frac{\Gamma}{\omega} \right) \quad (67)$$

Das angehende Feld werde durch eine ebene Welle dargestellt

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} = \mathfrak{E}_0 e^{i(kr \cos \Theta - \omega t)} \quad (68)$$

\mathfrak{E}_0 sei Polarachse unseres Koordinatensystems.

Es gilt:

$$\cos \Theta = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta' \sin \vartheta \cos \varphi \quad (69)$$

Wir entwickeln \mathfrak{E} in üblicher Weise nach Kugelfunktionen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(\xi) P_l(\cos \Theta) \quad (70)$$

mit

$$\xi = kr \qquad k = \frac{\omega}{c} \quad (71)$$

Nun ist nach dem Additionstheorem der Kugelfunktionen wegen $\vartheta' = 90^\circ$

$$\mathfrak{E}_{r_0} = E \cos \vartheta = E_0 e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l c_l^m \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi}} P_l^m(\cos \vartheta) \cdot \cos \vartheta \cos m\varphi \quad (72)$$

mit

$$c_l^m = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_m i_l (2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(0) \quad (73)$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ 2 & \text{für } m \neq 0 \end{cases} \quad (74)$$

Wir benutzen nun die Beziehung

$$\cos \vartheta P_l^m(\cos \vartheta) = \frac{1}{2l+1} \{ (l+m) P_{l-1}^m + (l+1-m) P_{l+1}^m \} \quad (75)$$

und formen um

$$\mathfrak{E}_{r_0} = E_0 e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \vartheta) \cos m\varphi \cdot \left\{ c_{l+1}^m \frac{J_{l+\frac{3}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{l+1-m}{2l+3} + c_{l-1}^m \frac{J_{l-\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{l-m}{2l-1} \right\} \quad (76)$$

Aus (75) folgt aber

$$\frac{P_{l+1}^m(0)}{P_{l-1}^m(0)} = -\frac{l+m}{l+1-m} \quad (77)$$

und damit aus (73):

$$c_{l+1}^m = \frac{2l+3}{2l-1} \frac{l-m}{l+1+m} c_{l-1}^m \quad (78)$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} r_0 &= E_0 e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi c_{l-1}^m \frac{l-m}{2l-1} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{J_{l+1/2}(\xi)}{\sqrt{\xi}} + \frac{J_{l-1/2}(\xi)}{\sqrt{\xi}} \right\} \quad (79) \\ &= E_0 e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m \cdot \cos m \varphi c_{l-1}^m \frac{l-m}{2l-1} (2l+1) \frac{J_{l+1/2}(\xi)}{\xi^{1/2}} \end{aligned}$$

Die allgemeinste Lösung von (66) ist

$$\gamma = \sum_{l,m} A_{l,m} \frac{J_{l+1/2}(x)}{\sqrt{x}} P_l^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi e^{-i\omega t} \quad (80)$$

$$x = \kappa_0 r \quad (81)$$

und damit folgt:

$$\begin{aligned} r_0 \text{ grad } \gamma &= \sum_{l,m} A_{l,m} P_l^m \cos m \varphi \kappa_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{J_{l+1/2}(x)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l A_{l,m} [l J_{l+1/2}(x) - x J_{l+3/2}(x)] \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} P_l^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi \end{aligned} \quad (82)$$

Die Randbedingung erzwingt dann:

$$A_{l,m} = \frac{\varepsilon E_0 R}{\varepsilon} c_{l-1}^m \frac{(2l+1)(l-m)}{2l-1} \frac{J_{l+1/2}(\Xi)}{(\Xi)^{3/2}} \frac{X^{1/2}}{l J_{l+1/2}(X) - X J_{l+3/2}(X)} \quad (83)$$

$$\text{wobei} \quad \Xi = kR \quad X = \kappa_0 R \quad (84)$$

Wir wollen dieses Ergebnis nunmehr verwenden, um den Absorptionsquerschnitt für γ -Strahlung auszurechnen.

d) Wirkungsquerschnitte für (γ, x) -Prozesse

Bei nicht zu hohen Frequenzen ist die Wellenlänge der γ -Strahlung groß gegenüber der Ausdehnung des Atomkernes. Dann ist das anregende Feld im Kern örtlich konstant, und es werden nur Dipolschwingungen angeregt. Wir diskutieren daher zuerst diesen Fall und untersuchen anschließend, welchen Beitrag man von Multipolschwingungen höherer Ordnung erwarten muß.

Dann folgt nach Abschnitt c)

$$\gamma_1 = \frac{e E_0 R}{8 K_{\xi}} \varrho_0 \frac{3 j_1(\Xi)}{\Xi} \frac{1}{j_1(X) - X j_2(X)} j_1(x) \cos \vartheta e^{-i \omega t} \quad (85)$$

Wir bilden das Dipolelement

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= e \int \mathbf{r} \gamma_1 d\tau \\ &= \frac{e^2 E_0}{8 K_{\xi}} \frac{R \cdot A}{R^3} \cdot \frac{3 j_1(\Xi)}{\Xi} \frac{\kappa_0^3 R^3 j_2(X)}{j_1(X) - X j_2(X)} \cdot \frac{1}{\kappa_0^4} e^{-i \omega t} \\ &= \mathfrak{P} \frac{j_2(X)}{X (j_1(X) - X j_2(X))} \end{aligned} \quad (86)$$

mit

$$\mathfrak{P} = \frac{e^2 E_0 \cdot A \cdot R^2}{8 K_{\xi}} \frac{3 j_1(\Xi)}{\Xi} e^{-i \omega t} \quad (87)$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{j_2(z)}{z (j_1(z) - j_2(z) \cdot z)} = - \frac{(3 - z^2) \sin z - 3 z \cos z}{z^2 ((2 - z^2) \sin z - 2 z \cos z)} \\ &= 2 \sum_m \frac{1}{z_m^2 - 2} \frac{1}{z_m^2 - z^2} \end{aligned} \quad (88)$$

wobei die z_m die Lösungen von $\cotg z = \frac{2 - z^2}{2z}$ durchlaufen.

Damit

$$\mathfrak{p} = 2 \mathfrak{P} \sum_m \frac{1}{X_m^2 - 2} \frac{1}{X_m^2 - X^2} \quad (89)$$

Mit

$$\omega_m = \frac{X_m}{R} u \quad (90)$$

und

$$\omega^2 + i \Gamma \omega = \frac{X^2}{R^2} u^2 \quad (91)$$

erhalten wir

$$p = \frac{2NZ}{A} \frac{e^2}{m^*} E_0 e^{-i\omega t} \sum_m \frac{1}{X_m^2 - 2} \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \frac{3j_1(\Xi)}{\Xi} \quad (92)$$

wobei m^* wieder wie früher

$$m^* = \frac{m}{1 + \frac{e_0}{2} (\bar{\mu}_{13} + \bar{\mu}_{14})} \quad (93)$$

bedeutet.

Beschränken wir uns auf die Umgebung der niedrigsten Resonanzstelle, so dürfen wir den kleineren Beitrag der höheren Resonanzen weglassen:

$$p \approx \frac{2NZ}{A} \frac{e^2}{m^*} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{X_0^2 - 2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2} \frac{3j_1(\Xi)}{\Xi} \quad (94)$$

Der Realteil davon ist:

$$p = \frac{2NZ}{A} \frac{e^2}{m^*} E_0 \frac{1}{X_0^2 - 2} \frac{3j_1(\Xi)/\Xi}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2} \{ (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \Gamma\omega \sin \omega t \} \quad (95)$$

Den Absorptionsquerschnitt b berechnen wir nach der Formel

$$\sigma = \frac{\overline{\mathfrak{E} \cdot \dot{p}}}{\bar{S}} \quad (96)$$

Der Strich deutet zeitliche Mittelung an. \bar{S} ist der Mittelwert des Betrages des Poyntingvektors

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \quad (97)$$

Der Beitrag des ersten Termes in (95) verschwindet. Vom zweiten Term her aber erhalten wir:

$$\sigma = 8\pi \frac{NZ}{A} \frac{e^2}{m^*c} \frac{3j_1\left(\frac{\omega R}{c}\right)}{\omega R/c} \cdot \frac{1}{X_0^2 - 2} \frac{\Gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma \omega)^2} \quad (98)$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich von dem bei Steinwedel und Jensen durch einen Faktor 2, das Auftreten von m^* statt m und den zusätzlichen Faktor $3j_1(\mathcal{E})/\mathcal{E}$. Das Fehlen des Faktors 2 bei Jensen und Steinwedel beruht auf einem Rechenfehler.

Die Größe Γ entnimmt man der Halbwertsbreite der beobachteten Resonanzen. Man erhält nach Montalbetti (Mo 53)

$$\hbar \Gamma \approx 5 \text{ MeV}$$

Mit $\frac{NZ}{A^2} \approx \frac{1}{4}$ und $m^* \approx \frac{m}{1.5}$ erhält man für die Linienmitte:

$$\sigma_m = 2.36 \cdot A \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 \quad (99)$$

Die Größe

$$3j_1\left(\frac{\omega R}{c}\right) \Big/ \frac{\omega R}{c} \quad (100)$$

ist an der Resonanzstelle 0,97, also nur wenig von 1 verschieden. Für große ω wird sie aber merklich kleiner. Man wird darum ein etwas zu großes Ergebnis erhalten, wenn man den integrierten Wirkungsquerschnitt bildet und für $3j_1\left(\frac{\omega R}{c}\right) \Big/ \frac{\omega R}{c}$ den Wert 1 einsetzt. Mit dieser Näherung ergibt sich für den integrierten Wirkungsquerschnitt

$$\hbar \int_0^\infty \sigma d\omega = 4\pi^2 \frac{NZ}{A} \frac{e^2}{m^*c} \frac{\hbar}{x_0^2 - 2} = 19.1 \cdot A \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ MeV} \quad (101)$$

Die experimentellen Werte streuen stark. Im großen und ganzen ist die Übereinstimmung bei den mittelschweren und schweren Kernen annehmbar. Bei den leichten Kernen dagegen ist der berechnete Wirkungsquerschnitt zu groß (Faktor 3-5).

Fig. 7 gibt den integrierten Wirkungsquerschnitt in seinem Verlauf mit A wieder.

In allen Fällen ist eine Verbesserung gegenüber den alten Werten von Steinwedel und Jensen zu beobachten.

Die experimentellen Werte geben nicht den Absorptionsquerschnitt, sondern den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(\gamma, x) = \sigma(\gamma, u) + \sigma(\gamma, p) + \sigma(\gamma, 2u) \quad (102)$$

wieder. Ein unmittelbarer Vergleich der experimentellen und theoretischen Werte impliziert also die Hypothese, daß die gesamte absorbierte γ -Energie zur Verdampfung von Protonen und Neutronen verbraucht wird.

Die höheren Eigenfrequenzen der Dipolschwingung werden wegen des Faktors

$$\frac{1}{X_m^2 - 2}$$

mit viel geringerer Intensität angeregt. Hinzu kommt, daß wegen der höheren Resonanzfrequenz auch der Faktor

$$3 j_1(\mathcal{E})/\mathcal{E}$$

kleiner wird. Schon der Wirkungsquerschnitt der zweitniedrigsten Dipoleigenschwingung beträgt nur noch wenige Prozent desjenigen der ersten.

Die Anregung von höheren Multipolschwingungen ist wegen des Faktors

$$J_{l+\frac{1}{2}}(\mathcal{E})/(\mathcal{E})^{3/2}$$

in A_{lm} bei niederen Frequenzen sehr gering. Eine genauere Untersuchung des Wirkungsquerschnitts der Multipolschwingungen ist von Danos durchgeführt worden. Seine Ergebnisse übertragen sich mit kleinen Änderungen auf unsere Theorie.

Danach spielt einzig und allein noch der Wirkungsquerschnitt der niedrigsten Eigenfrequenz der Quadrupolschwingung eine eventuell ins Gewicht fallende Rolle $\left(\frac{\sigma_{0Q}^m}{\sigma_{0Di}^m} = 0.08\right)$.

Experimentell ist der Bereich der hochenergetischen γ -Prozesse noch nicht genau genug erforscht, so daß ein zweifelsfreier

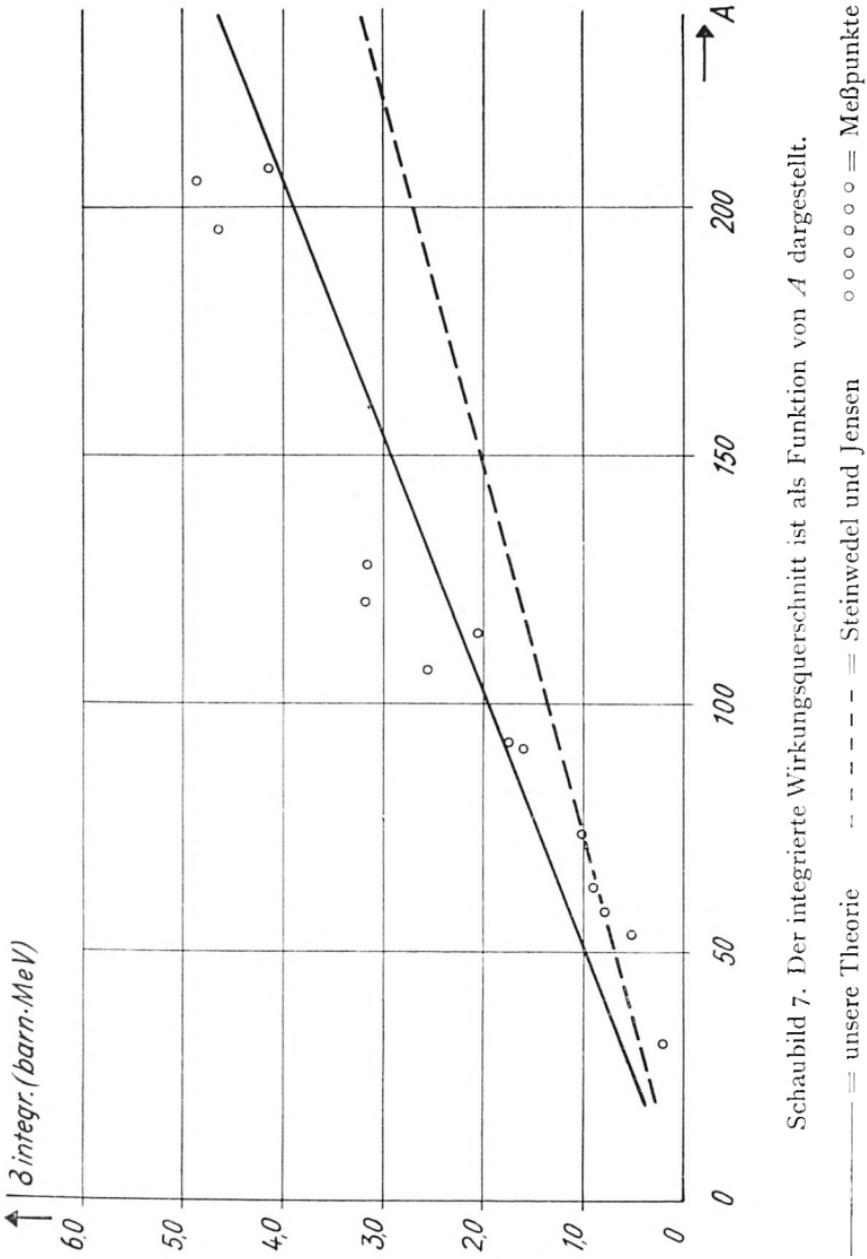


Schaubild 7. Der integrierte Wirkungsquerschnitt ist als Funktion von A dargestellt.

— = unsere Theorie - - - - - = Steinwedel und Jensen ○ ○ ○ ○ ○ = Meßpunkte

Nachweis der höheren Schwingungen bisher nicht erbracht wurde.

Der Streuquerschnitt für die γ -Strahlung ist, wie schon Steinwedel und Jensen zeigten, außerordentlich klein und nur schwer zu beobachten.

Da unsere Theorie hierbei keine wesentlich über das Vorhandene hinausgehenden Resultate liefert, verzichten wir auf eine weitergehende Diskussion.

Zusammenfassung

Die kollektiven Eigenschaften eines Atomkerns werden durch eine Art Hydrodynamik beschrieben. Sie sind von den quantenmechanischen Nukleonenfeldgleichungen her begründet.

Die Kräfte zwischen den Nukleonen werden den Ergebnissen der Proton-Proton- und Proton-Neutronstreuung entnommen. Es gelingt, den Erwartungswert des Hamiltonoperators näherungsweise als Funktion lokaler Dichten und Strömungsgeschwindigkeiten der Nukleonen darzustellen, welche noch frei variiert werden können. Die individuellen Kerneigenschaften bestimmen die Gestalt der Hamiltonfunktion.

Mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips und unter Verwendung der aus den quantenmechanischen Grundgleichungen abgeleiteten Kontinuitätsgleichungen kommt man zu hydrodynamischen Gleichungen, deren Konstanten Funktionen der Potentialkonstanten sind. In dieser Hydrodynamik ist das Tröpfchenmodell und seine Erweiterung enthalten. Man kommt insbesondere zu einer quantitativen Begründung der Bethe-Weizsäcker-Formel, zu einer Verbesserung der Theorie der Resonanzabsorption der γ -Strahlen und zu einer Erklärung der Verkleinerung des Protonenradius gegenüber dem Neutronenradius der Kerne.

Herrn Prof. Dr. F. Bopp und Herrn Dr. K. Wildermuth möchte ich für viele fördernde Diskussionen herzlichst danken.

Literaturverzeichnis

- Be 49 Bethe, H. A., Phys. Rev. 76, 38 (1949).
Bl-J 49 Blatt, J. M. u. J. D. Jackson, Phys. Rev. 76, 18 (1949).
Bl-W 53 Blatt, J. M. u. N. F. Weißkopf, Theoretical Nuclear Physics, Wiley, New York (1953).
Bo 39 Bohr, N. u. J. A. Wheeler, Phys. Rev. 56, 426 (1939).
Bo 52 Bohr, A., Kgl. Dan. Mat. Fys. Medd. 26, Nr. 14 (1952).
Br 38 Breit, G. u. E. P. Wigner, Phys. Rev. 53, 153 (1938).
Bru 54 Brueckner, K. A., C. A. Levinson u. H. M. Mahmoud, Phys. Rev. 95, 217 (1954).
Da 52 Danos, M., Annalen d. Phys., 6. Folge, 10, 265 (1952).
Dr 53 Drell, S. D. u. K. Huang, Phys. Rev. 91, 1527 (1953).
Ed 54 Eder, G., Z. Naturforschg. 9a, 565 (1954).
Fe 37 Feenberg, E., Phys. Rev. 52, 667 (1937).
Fe 47 Feenberg, E., Rev. Mod. Phys. 19, 239 (1947).
Fm 51 Fermi, E., Nuclear Physics (1951).
Fi 54 Fincke, F., Annalen der Phys., 6. Folge, 14, 97 (1954).
Fl 52 Flügge, S., Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften Bd. 26, S. 164, Springer Berlin (1952).
Flo 54 Florian, A., P. Urban und K. Wildermuth, Z. Naturforschg. 9a, 748 (1954).
Ha 49 Haxel, O., J. H. D. Jensen u. H. E. Süß, Phys. Rev. 75, 1766 (1949).
Ha 52 Haxel, O., J. H. D. Jensen u. H. E. Süß, Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Bd. 26, S. 244 (1952).
He 51 Heisenberg, W., Theorie des Atomkerns, Göttingen (1951).
Hu 54 Hund, F., Materie als Feld. Springer, Berlin (1954).
Je 50 Jensen, J. H. D. u. Steinwedel, H., Zeitschr. f. Naturforschg. 5a, 413 (1950).
Jo 28 Jordan, P. u. E. P. Wigner, Z. Phys. 47, 631 (1928).
Ke 37 Kemmer, N., Nature 140, 192 (1937).
Ma 48 Mayer, M. Goeppert, Phys. Rev. 74, 235 (1948).
Ma 49 Mayer, M. Goeppert, Phys. Rev. 75, 1969 (1949).
Ma 55 Macke, W. (im Erscheinen).
Mi 54 Mittelstädt, P., Z. Phys. 137, 545 (1954).
Mi 55 Mittelstädt, P., Zeitschr. f. Naturforschg. 10a, 379 (1955).

- Mo 53 Montalbetti, R., L. Kotz u. J. Goldenberg, Phys. Rev. 91, 659 (1953).
- Re 53 Reifman, A., Z. Naturforschg. 8a, 505 (1953).
- Sa 51 Salpeter, E. E., Phys. Rev. 82, 60 (1951).
- Schi 52 Schiff, L. J., Phys. Rev. 84, 1 (1952).
- Schl 53 Schlögl, F., Z. Phys. 135, 445 (1953).
- Schu 53 Schulten, R., Z. Naturforschg. 8a, 759 (1953).
- Se 47 Serber, R., Phys. Rev. 72, 1114 (1947).
- St 51 Steinwedel, H. u. M. Danos, Z. Naturforschg. 6a, 217 (1951).
- We 39 Wentzel, G., Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Deuticke Wien (1939).
- Wei 35 Weizsäcker, C. F. v., Z. Phys. 96, 431 (1935).
- Wi 34 Wigner, E. P. und F. Seitz, Phys. Rev. 43, 804 (1934).
- Wi 36 Wigner, E. P., Proc. Nath. Acad. Sci. 22, 662 (1936).
- Wi 54 Wild, W. u. K. Wildermuth, Z. Naturforschg. 9a, 799 (1954).
- Wm 54 Wildermuth, K., Z. Naturforschg. 9a, 1047 (1954).
- Wm 55 Wildermuth, K., Z. Naturforschg. 10a, 447 (1955).
- Vo 37 Volz, H., Z. Phys. 105, 537 (1937).