Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Die Bewegung der Sonne nach griechischen und indischen Tafeln

Von Bartel L. van der Waerden

Vorgelegt am 7. November 1952

Mit 2 Figuren

In Centaurus 1 (1951) p. 266–270 hat O. Neugebauer eine griechische Tafel (Codex Astrolog. Graec. 11, 2) für den Eintritt der Sonne in die 12 Tierkreiszeichen veröffentlicht. In Osiris 10 (1952) p. 252–276 hat er eine ähnliche Tafel diskutiert, die bei den Tamils in Pondicherry mündlich überliefert war und von Le Gentil[1] und Warren[2] aufgezeichnet wurde. Neugebauer meint, daß nur auf Grund weiterer Texte (detailed textual information) entschieden werden kann, ob diese Tafeln auf linearer Interpolation oder auf trigonometrischer Rechnung beruhen. Ich werde zeigen, daß dieses Urteil unnötig pessimistisch ist. Die Frage kann sehr wohl auf Grund der vorhandenen Texte entschieden werden.

Die Zeiten, die die Sonne zum Durchlaufen der 12 Zeichen Aries, Taurus usw. braucht, sind in der griechischen Tafel in Tagen und Stunden, in der indischen Überlieferung in Tagen und Sexagesimalteilen von Tagen angegeben. Eine Reihe von offenkundigen Schreibfehlern in der griechischen Tafel hat Neugebauer berichtigt. Einer dieser Fehler kann auch anders, und zwar besser, berichtigt werden; das soll nachher näher begründet werden. Ich gebe die berichtigte Tafel in beiden Fassungen wieder und stelle die indischen Werte nach Le Gentil, unter Weglassung der unerheblichen dritten Sexagesimalteile,[3] daneben.

---

[1] Le Gentil, Mémoire sur l'Inde, Histoire et Mémoires de l'Académie royale des Sciences, Année 1772 (seconde partie), Paris 1776, p. 169ff.

[2] John Warren, Kala Sankalita, Collection of Memoirs on the modes according to which the nations of Southern India divide time (1825).

[3] Die dritten Sexagesimalteile sind bei Warren und Le Gentil verschieden. Sie dienen offensichtlich nur dazu, die Dauer des Jahres auf 365; 15, 31, 15 zu bringen.

Tierkreis-zeichen	Griechische Tafel, berichtigt nach Neugebauer		Griechische Tafel, berichtigt nach v. d. Waerden		Tamil-Astronomie nach Le Gentil
1	31^d	5^h	31^d	5^h	30; 55, 32
2	31	15	31	15	31; 24, 12
3	31	16	31	16	31; 36, 38
4	31	10	31	10	31; 28, 12
5	30	22	30	21	31; 2, 10
6	30	4	30	5	30; 27, 22
7	29	16	29	16	29; 54, 7
8	29	7	29	7	29; 30, 24
9	29	4	29	4	29; 20, 53
10	29	11	29	11	29; 27, 16
11	30	0	30	0	29; 48, 24
12	30	16	30	16	30; 20, 21
Summe	365^d	6^h	365^d	6^h	365; 15, 31

Es gab in der hellenistischen Zeit zweierlei Methoden, astronomische Tafeln zu berechnen. Ich will sie die babylonische oder lineare und die alexandrinische oder trigonometrische Methode nennen. Die babylonische Methode (die nicht nur in Babylon, sondern auch in Alexandrien und Rom angewandt wurde) arbeitet mit linearer Interpolation zwischen Extremwerten, mit streckenweise konstanten Geschwindigkeiten und mit arithmetischen Reihen erster, zweiter oder dritter Ordnung, d. h. mit solchen Reihen, deren erste, zweite oder dritte Differenzen konstant sind.[1] Die alexandrinische Methode ist die von Aristarchos, Apollonios, Hipparchos und Ptolemaios angewandte: sie geht aus von geometrischen Vorstellungen (Kreisbewegung, Exzenter und Epizykel) und benutzt trigonometrische Tafeln. In der indischen Astronomie sind die linearen Methoden für die ,,mittlere Periode'', die trigonometrischen für die ,,dritte Periode'' charakteristisch.[2]

Um festzustellen, ob unsere Tafeln nach einer linearen Methode berechnet worden sind, braucht man nur die Differenzen zu be-

[1] Siehe F. K. Kugler, Babylonische Mondrechnung, Freiburg 1900, sowie Sternkunde und Sterndienst in Babel I, Münster 1907, und B. L. van der Waerden, J. Near Eastern Studies 10 (1951) p. 20. Dort weitere Literatur.

[2] Siehe G. Thibaut, Art. Astronomie im Grundriß der indo-arischen Philologie (1899).

rechnen und nachzusehen, ob man nach einigen Schritten auf konstante Differenzen kommt. Die ersten Differenzen der nach Neugebauer berichtigten griechischen Tafel sind

$$+10 \; +1 \; -6 \; -12 \; -18 \; -12 \; -9 \; -3 \; +7 \; +13 \; +16 \; +13,$$

die zweiten Differenzen

$$-3 \; -9 \; -7 \; -\underline{6} \; -\underline{6} \; +\underline{6} \; +\underline{3} \; +6 \; +10 \; +6 \; +3 \; -3.$$

Weiter braucht man nicht zu gehen, da die Ausgangsreihe bereits eine Differenzenreihe ist. Es ist klar, daß die Differenzen nicht annähernd konstant werden (auch die dritten Differenzen nicht), sondern, genau wie die Ausgangswerte, einen wellenförmigen Verlauf zeigen. Würde man nicht von den Zeiten, sondern von ihren reziproken Werten, den Geschwindigkeiten, ausgehen, so wäre das Ergebnis fast dasselbe.

Die Berechnung der Differenzen ist auch sonst sehr nützlich: sie deckt nämlich Ungleichmäßigkeiten im Verlauf der Zahlen auf. In der Mitte der zweiten Differenzenreihe findet sich eine auffällige Unregelmäßigkeit: die Folge

$$-6 \; -6 \; +6 \; +3 \; +6$$

schwankt zu stark. Dieser Fehler kann ohne weiteres behoben werden, indem man die Durchlaufungszeit von Leo um Eins erniedrigt und von Virgo um Eins erhöht. Die berichtigten Zahlen sind mit dem Text nicht schlechter in Übereinstimmung als die Neugebauerschen, sondern eher besser, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

Daten Text		nach Neugebauer		nach mir	
VII 24	2^h Nacht	VII 25	2^h Nacht	VII 25	2^h Nacht
Leo	30^d 24^h	Leo	30^d 22^h	Leo	30^d 21^h
VIII 24	14^h Tag	VIII 24	12^h Tag	VIII 24	11^h Tag
Virgo	30^d 15^h	Virgo	30^d 4^h	Virgo	30^d 5^h
IX 23	4^h Nacht	IX 24	4^h Nacht	IX 24	4^h Nacht

Die berichtigte Differenzenreihe lautet

$$+10 \; +1 \; -6 \; -13 \; -16 \; -13 \; -9 \; -3 \; +7 \; +13 \; +16 \; +13.$$

Jetzt zeigen auch die zweiten Differenzen einen fast ungestörten wellenförmigen Verlauf:

$$-3 \;-9 \;-7 \;-7 \;-3 \;+3 \;+4 \;+6 \;+10 \;+6 \;+3 \;-3.$$

Die Annahme, die Tafel sei mit linearen Methoden berechnet, führt somit zu einem Widerspruch. Versuchen wir es also mit den alexandrinischen Methoden!

Die Jahreszeiten stimmen in ihrer Dauer mit Hipparchos überein; der Autor der Tafel hatte also eine Beziehung zu den Methoden des Hipparchos. Dieser nahm für die Sonne eine Exzenterbewegung mit der Exzentrizität $D = \frac{1}{24}$ an. Die Bewegung auf dem exzentrischen Kreis ist nach Hipparchos gleichmäßig; das Apogeum hat die Länge

$$\alpha = 65^\circ\, 38'$$

(Ptolemaios, Syntaxis III 4).

Um nachzuprüfen, ob eine solche Exzenterbewegung der griechischen Tafel zugrunde liegt, habe ich $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{12}$ mit der Summe 360°, die zu den Durchlaufungszeiten der Tafel proportional sind, auf einem Kreise abgetragen und je zwei gegenüberliegende Punkte verbunden. Es stellte sich heraus, daß die 6 Verbindungsgeraden alle durch einen Punkt gehen und Winkel von 30° einschließen. Das ist nur bei der Exzenterhypothese (und natürlich bei der damit äquivalenten Epizykelhypothese) der Fall. Für die Exzentrizität und die Lage des Apogeums ergaben sich genau die Hipparchischen Werte.

Zur Kontrolle habe ich mit diesen Werten die Eintrittsstunden der Sonne in die 12 Zeichen ausgerechnet und gefunden:

Zeichen	Datum		Rechnung		Text	
0	III	21	4	N	4	Nacht
1	IV	21	9.6	N	9	Nacht
2	V	22	0.3	N	12	Tag
3	VI	23	4.5	T	4	Tag
4	VII	25	2.2	N	2	Nacht
5	VIII	24	11.3	T	11	Tag
6	IX	24	4.8	N	4	Nacht

Zeichen	Datum		Rechnung		Text	
7	X	23	8.2	T	8	Tag
8	XI	22	2.5	N	3	Nacht
9	XII	21	7.3	N	7	Nacht
10	I	19	6.6	T	6	Tag
11	II	18	6.5	T	6	Tag
12	III	21	10	N	10	Nacht

Die Stunden stimmen alle, wenn man die exakten Werte nach unten abrundet, ausgenommen für das 8. Zeichen, wo es 2^h Nacht hätte heißen sollen. Beim Ptolemäischen, etwas kleineren Wert der Exzentrizität ist die Übereinstimmung weniger gut.

Die Tafel ist also nach der Exzentertheorie berechnet, mit den Hipparchischen Werten für die Exzentrizität und die Länge des Apogeums. Sie stammt wohl aus der Schule des Hipparchos.

In der Sonnentafel der Tamil-Überlieferung zeigen sogar die vierten Differenzen noch einen deutlich wellenförmigen Verlauf. Die Tafel ist also auch nicht mit linearen Methoden berechnet.

Sie ist aber auch nicht nach der einfachen Exzenterhypothese berechnet. Wäre sie es, so müßten die Durchlaufungszeiten t_1, $t_2, \ldots, t_{12}$ der 12 Zeichen die Bedingung

$$t_k + t_{6+k} = \text{Const.} \tag{1}$$

erfüllen. Diese Bedingung ist aber nicht annähernd erfüllt.

Um das Bildungsgesetz der Zeiten t_k zu erkennen, habe ich sie durch Fourier-Reihen dargestellt. Diese Darstellung ist für trigonometrisch berechnete Funktionen sehr geeignet. Ich bin von der summierten Tafel ausgegangen (Le Gentil p. 188), also von den Zeiten T_k bis zum Austritt der Sonne aus den 12 Zeichen des Tierkreises:

$$T_0 = 0, \; T_k = t_1 + t_2 \cdots + t_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 12). \tag{2}$$

Bei gleichmäßiger Sonnenbewegung würden die Zeiten

$$T'_k = \frac{k}{360} T \qquad (T = 365; 15, 31, 15) \tag{3}$$

betragen. Die Differenzen

$$f_k = T_k - T'_k \tag{4}$$

bilden eine periodische Funktion der Sonnenlänge

$$\lambda = k \cdot 30. \tag{5}$$

Von dieser Funktion $f(\lambda)$ kennen wir nur die 12 Werte f_k. Die Fourier-Reihe wird nun so angesetzt:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = a_0 + a_1 \cos\lambda + a_2 \cos 2\lambda + \cdots + a_6 \cos 6\lambda + \\ + b_1 \sin\lambda + b_2 \sin 2\lambda + \cdots + b_5 \sin 5\lambda. \end{aligned} \tag{6}$$

Die 12 Koeffizienten $a_0, \ldots, a_6, b_1, \ldots b_6$ können so bestimmt werden, daß die Summe $f(\lambda)$ für die 12 Argumentwerte (15) genau die vorgegebenen Werte f_k annimmt. Die Formeln sind bekannt:

$$a_0 = \frac{1}{12}(f_1 + f_2 + \cdots + f_{12})$$

$$a_1 = \frac{1}{6} \sum f_k \cos(k \cdot 30)$$

$$b_1 = \frac{1}{6} \sum f_k \sin(k \cdot 30), \quad \text{usw.}$$

Prof. Stiefel, der Leiter des Institutes für angewandte Mathematik der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich, war so freundlich, die Koeffizienten $a_0, \ldots, b_5$ für mich berechnen zu lassen. Das Ergebnis lautet, wenn der 3600ste Teil des Tages als Zeiteinheit genommen wird:[1]

$$\begin{array}{lll} a_0 = 7749.7 & & \\ a_1 = -7694.1 & b_1 = 1636.1 & \\ a_2 = -60.2 & b_2 = -135.2 & \\ a_3 = 3.4 & b_3 = -2.2 & \\ a_4 = 0.6 & b_4 = 0.1 & \\ a_5 = 0.4 & b_5 = 0.4, & a_6 = 0.1. \end{array}$$

Erfreulicherweise nehmen die Koeffizienten a_k und b_k sehr rasch ab. Dies zeigt uns von neuem, daß die Werte trigonometrisch berechnet sind und nicht mit linearen Zackenfunktionen. In der Fourier-Reihe einer „gestückelten“, also nicht analytischen

---

[1] Das Dezimalkomma wird, um es vom Sexagesimalkomma zu unterscheiden, durch einen Punkt dargestellt.

Funktion gehen die Koeffizienten a_k und b_k nämlich viel langsamer gegen Null als in der Entwicklung einer analytischen Funktion.

Wie genau sind die Entwicklungskoeffizienten bestimmt? Nehmen wir einmal an, daß die Fehler in der Berechnung der f_k sich additiv aus mehreren unabhängigen Abrundungsfehlern zusammensetzen. Sinustafeln sind ja immer abgerundet und das Endergebnis ist noch einmal abgerundet. Kleine Rechenfehler können auch als zufällige Fehler behandelt werden, die additiv zu den anderen dazukommen. Grobe Rechenfehler sind offensichtlich nicht vorhanden, denn sie würden sich sofort durch größere Werte der Koeffizienten a_5, b_5 und a_6 bemerklich machen.

Nehmen wir also einmal an, daß die Fehler in $f_1, \ldots, f_{12}$ unabhängig voneinander und ungefähr normal (d. h. nach dem Gaußschen Fehlergesetz) verteilt sind, etwa mit einem mittleren Fehler von einer Einheit. Dann sind die Koeffizienten a_1, b_1, ..., a_6 ebenfalls unabhängig normal verteilt, mit einem mittleren Fehler 0,4. Da aber die Voraussetzungen, auf denen diese Schätzung beruht, unsicher sind, so soll 0,8 als möglicher mittlerer Fehler noch zugelassen werden. Bei einem noch größeren mittleren Fehler wäre die Tatsache, daß a_5, b_5 und a_6 alle nicht mehr als 0,4 betragen, ein allzu seltener Zufall. Wird der $2\frac{1}{2}$fache mittlere Fehler als zulässiger Fehler angenommen, so kommen wir zu dem Schluß, daß kein größerer Fehler als 2 Einheiten in den Fourier-Koeffizienten stecken kann und kein größerer Fehler als 5 Einheiten in den gegebenen f_k.

Die Reihe (6) kann, wenn das winzig kleine Glied mit a_6 weggelassen wird, auch so geschrieben werden:

$$(7) \quad f(\lambda) = a_0 + A\sin(\lambda - \alpha) + B\sin(2\lambda - \beta) + C\sin(3\lambda - \gamma) + \\ + D\sin(4\lambda - \delta) + E\sin(5\lambda - \varepsilon).$$

Die Berechnung der Winkel α, β, γ, ... ergibt, daß β und γ genau das Doppelte und Dreifache des Winkels α betragen und daß der Winkel δ nur um 36° kleiner ist als 4α. Bei der Kleinheit des Koeffizienten D sind diese 36° zu vernachlässigen. Vernachlässigt man auch noch das letzte Glied mit dem sehr kleinen Koeffizienten $E = 0.6$, so erhält man eine reine Sinusreihe:

$$(8)\quad f(\lambda) = a_0 + A \sin(\lambda - \alpha) + B \sin 2(\lambda - \alpha) + C \sin 3(\lambda - \alpha) + \\ + D \sin 4(\lambda - \alpha)$$

mit

$$A = 7866.2$$
$$B = 148.0$$
$$C = 4.2$$
$$D = 0.6.$$

Der Winkel α ist

$$\alpha = 78^\circ \quad (\text{genau } 77^\circ 59' 43'').$$

Das bedeutet, daß das Apogeum der Sonnenbewegung bei 78° Länge liegt und daß die Bewegung genau symmetrisch in bezug auf das Apogeum ist.

Setzt man $\lambda - \alpha = x$ und $f(\lambda) - a_0 = g(\lambda)$, so kann man (8) einfacher schreiben:

$$(9)\quad g(\lambda) = A \sin x + B \sin 2x + C \sin 3x + D \sin 4x.$$

Den Winkel x zwischen dem Apogeum und der Richtung zur Sonne wollen wir „wahre Anomalie" nennen, obwohl eigentlich $180^\circ + x$ die wahre Anomalie ist. $g(\lambda)$ ist das Korrekturglied, das man zur Eintrittszeit der mittleren Sonne addieren muß, um die Eintrittszeit der wahren Sonne in das betreffende Tierkreiszeichen zu erhalten. Multipliziert man $g(\lambda)$ mit $2\pi/T$, so erhält man die „Anomaliedifferenz" ω, die man zur wahren Anomalie x, zu addieren hat, um die mittlere Anomalie φ zu erhalten (Fig. 1). Man erhält

$$(10)\quad \omega = \frac{2\pi}{T} g(\lambda) = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x + d \sin 4x$$

mit

$$a = .037\,588$$
$$b = .000\,707$$
$$c = .000\,020$$
$$d = .000\,003.$$

Eine Formel wie (10) kommt heraus, wenn entweder ein Exzenter mit Ausgleichspunkt benutzt wird, wie bei Ptolemaios für

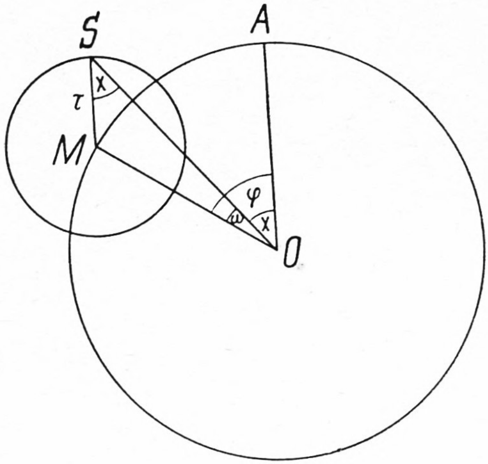

Fig. 1. Epizykel

Venus, Mars, Jupiter und Saturn, oder ein Epizykel mit veränderlichem Radius wie im Surya-Siddhanta (II 34–38). Versuchen wir es zunächst mit der Epizykelhypothese!

Ist die Sonne in S und wird der Radius OM des Deferenten gleich 1 gesetzt, so kann man den Epizykelradius r nach der Sinusregel im Dreieck OMS berechnen.

$$(11) \qquad r = \frac{\sin \omega}{\sin x}.$$

Durch (10) und (11) ist r als Funktion von x bestimmt.

Bei der Kleinheit des Winkels ω kann man sich auf die ersten zwei Glieder der Potenzreihe für $\sin \omega$ beschränken. Man erhält aus (10):

$$(12) \quad \sin \omega = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x + d \sin 4x - \frac{1}{6} a^3 \sin^3 x.$$

Setzt man das in (11) ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$(13) \qquad r = a' + b' \cos x + c' \cos 2x + d' \cos 3x$$

mit

$$\begin{aligned} a' &= a \quad + c - \frac{1}{12} a^3 = .037604 \\ b' &= 2b + 2d \qquad\quad = .001420 \\ c' &= 2c + \frac{1}{12} a^3 \qquad = .000044 \\ d' &= 2d \qquad\qquad\quad\;\; = .000006. \end{aligned}$$

Führt man statt der wahren Anomalie x die mittlere Anomalie $\varphi = x + \omega$ als Argument in (13) ein, so erhält man eine Reihe der Form

$$r = a'' + b'' \cos\varphi + c'' \cos 2\varphi + d'' \cos 3\varphi, \tag{14}$$

wobei die Koeffizienten noch schneller abnehmen als in (13). Innerhalb der angegebenen Genauigkeitsgrenzen kann man (14) sogar durch das einfachere Gesetz

$$r = p + q \cos\varphi \tag{15}$$

ersetzen, mit

$$\begin{aligned} p &= .037620 \\ q &= .001414. \end{aligned}$$

Rechnet man nämlich, von (15) ausgehend, rückwärts die Reihe (8) aus, so erhält man in den Koeffizienten C und D die Fehler -1.8 und -0.4, die gerade noch innerhalb der zulässigen Grenzen liegen.

Es wäre also möglich, daß der Tamil-Tafel ein Epizykelmodell zugrunde liegt, wobei der Epizykelradius nach einem reinen Cosinusgesetz (15) vom Maximalwert $p + q$ beim Apogeum bis zum Minimalwert $p - q$ beim Perigeum abnimmt.

Im Surya-Siddhānta wird ein ähnliches Gesetz angenommen, nämlich

$$r = a - b\,|\sin\varphi|. \tag{16}$$

Der Epizykel ist hier am größten im Apogeum und Perigeum. Entwickelt man eine solche, nicht analytische Funktion in eine Fourier-Reihe, so nehmen die Koeffizienten nur sehr langsam ab:

$$\frac{\pi}{2}\,|\sin\varphi| = 1 - \frac{2}{3}\cos 2\varphi - \frac{2}{15}\cos 4\varphi - \frac{2}{21}\cos 6\varphi - \cdots.$$

Von neuem zeigt sich also, daß eine „gestückelte" Funktion wie (16), die aus zwei aneinandergesetzten halben Sinuswellen besteht, in unserem Fall unmöglich ist.

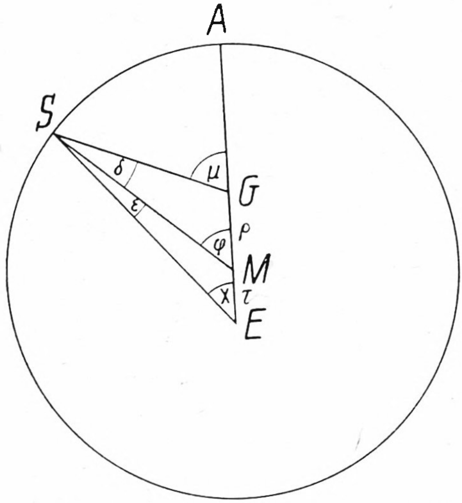

Fig. 2. Exzenter mit Ausgleichspunkt G

Weit besser als das Epizykelmodell paßt aber ein Exzenter mit Ausgleichspunkt. Es sei E die Erde, M der Mittelpunkt des Exzenters und G der Ausgleichspunkt, von wo aus die Bewegung gleichmäßig erscheint. Der Winkel $A\ G\ S = u$ ist also proportional der Zeit. Der Winkel $A\ E\ S = x$ ist die wahre Anomalie. Die Anomaliedifferenz ist

$$\omega = u - x = \delta + \varepsilon.$$

Die Abstände $M\ E = r$ und $M\ G = \rho$ müssen so gewählt werden, daß für ω gerade die richtige Reihe (10) herauskommt.

Zur Berechnung von $\omega = \delta + \varepsilon$ hat man anzusetzen

$$\sin \varepsilon = r \sin x$$

$$\varphi = x + \varepsilon$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\rho \sin \varphi}{1 - \rho \cos \varphi}.$$

Entwickelt man ω in eine Potenzreihe nach r und vernachlässigt Glieder von höherer als dritter Ordnung, so ergibt sich

$$\omega = a_0 \sin x + b_0 \sin 2x + c_0 \sin 3x \tag{17}$$

mit

$$a_0 = r + \rho + \frac{1}{8} r^3 - \frac{3}{8} r^2 \rho + \frac{1}{2} r \rho^2$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \rho (r + \rho)$$

$$c_0 = -\frac{1}{24} r^3 + \frac{1}{8} r^2 \rho + \frac{1}{2} r \rho^2 + \frac{1}{3} \rho^3.$$

Setzt man diese Koeffizienten gleich den oben berechneten a, b, c, so ergibt sich überraschenderweise für $r = 0$ die beste Übereinstimmung. Der Exzenter ist also ein Konzenter!

Für $r = 0$ können wir leicht 4 Glieder der Reihe (17) berechnen:

$$\omega = \rho \sin x + \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2x + \frac{1}{3} \rho^3 \sin 3x + \frac{1}{4} \rho^4 \sin 4x + \cdots. \tag{18}$$

Die Reihe (18) ist einfach der Imaginärteil der wohlbekannten Potenzreihe für

$$\ln (1 + \rho e^{ix}).$$

Setzt man

$$\rho = a = .037\,588$$

so werden die weiteren Koeffizienten

$$b_0 = \frac{1}{2} \rho^2 = .000\,706$$

$$c_0 = \frac{1}{3} \rho^3 = .000\,018$$

$$d_0 = \frac{1}{4} \rho^4 = .000\,001.$$

Die Übereinstimmung mit (10) ist auffallend gut. Die größte Differenz $c - c_0$ beträgt nur $24 \cdot 10^{-7}$.

Zur Kontrolle der Fehler habe ich aus (18) rückwärts die Fourier-Koeffizienten von $f(\lambda)$ berechnet und mit (6) verglichen. Bei a_1 und b_1 ergab sich natürlich die Differenz Null, weil ρ und α gerade so bestimmt wurden. Die übrigen Fehler waren

−0.1	+0.4	+0.5	+0.1	+0.1
−0.2	0.0	0.0	+0.4.	

Der mittlere Fehler ergibt sich zu 0.26, also noch kleiner, als früher angenommen wurde. Der mittlere Fehler der Tafelwerte f_k ist 0.65, die Tafelwerte sind also in der überwiegenden Mehrzahl auf eine Einheit genau gerechnet.

Diese Genauigkeit ist bewundernswert. Ein Fehler von einer Einheit in f_k bedeutet einen Fehler von einer Bogensekunde im Sonnenort. Man muß also eine Sinustafel gehabt haben, die es gestattet, den Winkel ω auf $1''$ genau zu bestimmen. Die Sinustafel des Aryabhaṭa und des Surya-Siddhānta ist nur auf $1'$ genau. Von neuem zeigt sich, daß die Tamil-Astronomie nicht auf der Astronomie des Surya-Siddhānta beruht.

Die Sehnentafel des Ptolemaios ist auf $1''$ genau. Mit einer solchen Sehnentafel könnte man ω sogar auf eine halbe Sekunde genau bestimmen.

Es zeigt sich also, daß die überlieferten Werte sowohl durch eine Epizykelbewegung mit veränderlichem Radius erhalten werden können, als durch eine Konzenterbewegung mit Ausgleichspunkt. Die letztere Hypothese ergibt die Zahlenwerte ganz genau, wobei man nur einen Parameter ρ anzupassen braucht; die übrigen Koeffizienten werden dann automatisch richtig. Bei der Epizykelhypothese erhält man mit 2 Parametern p und q eine viel schlechtere Übereinstimmung: der Fehler in C wird dann 1.8 und ragt weit über die übrigen Fehler hinaus, während beim Konzenter der Fehler in C nur 0.5 beträgt. Um bei der Epizykelhypothese eine ebenso gute Übereinstimmung zu erhalten, müßte man für den Epizykelradius einen drei-parametrigen Ausdruck wie etwa

$$r = p + q \cos \varphi + s \cos 2\varphi$$

ansetzen. Daß die Koeffizienten in (10) sich gerade als ρ, $\frac{1}{2}\rho^2$, $\frac{1}{3}\rho^3$ und $\frac{1}{4}\rho^4$ darstellen lassen, erscheint bei der Epizykelhypothese als purer Zufall, während es aus der Konzenterhypothese mit Notwendigkeit folgt.

Nach alledem ist die Konzenterhypothese sehr viel wahrscheinlicher.

Zusammenfassend können wir sagen, daß beide hier untersuchten Tafeln nach griechischen, trigonometrischen Methoden berechnet sind. Der griechischen Tafel liegt das Hipparchische Exzentermodell (oder das äquivalente Epizykelmodell) zugrunde; die Exzentrizität ist $\frac{1}{24}$, das Apogeum hat die Länge $65^\circ 38'$. Der indischen Tafel liegt entweder ein Epizykel mit veränderlichem Radius oder, viel wahrscheinlicher, ein Konzenter mit Ausgleichspunkt zugrunde. Der Ausgleichspunkt hat innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Rechnung die Länge 78°. Der Abstand des Ausgleichspunktes von der Erde ist, wenn der Radius des Konzenters gleich Eins gesetzt wird,

$$0.037\,588 = 0;\,2,\,15,\,19.$$

Es wäre eine lohnende Aufgabe, die Mondtafel der Tamil-Überlieferung mit einer ähnlichen Methode zu untersuchen. Daß sie ebenfalls trigonometrisch berechnet ist, wird sofort klar, wenn man die zweiten Differenzen bildet; diese zeigen nämlich einen ausgeprägt wellenförmigen Verlauf.

Neugebauer hat gezeigt, daß der Vakyam-Prozeß, den die Tamil zur Berechnung des Mondortes anwenden, in allen wesentlichen Punkten identisch ist mit dem Verfahren der griechischen Papyri Lund 35a und Ryl. 27.[1] In den Papyri fehlt nur der letzte Schritt: die Berechnung der Mondbewegung von Tag zu Tag. Die Mondtafel der Tamil verschafft uns eben diesen letzten Schritt. Es erscheint daher sehr erwünscht, aus der Mondtafel die ihr zugrunde liegende Mondtheorie zu rekonstruieren. Ich bin überzeugt, daß eine solche Rekonstruktion auf die Methoden der vorptolemäischen, hellenistischen Astronomie, die uns in den Papyri zum ersten Male entgegengetreten ist, ein neues, helles Licht werfen wird.

[1] E. J. Knudtzon und O. Neugebauer, Zwei astronomische Texte, Bull. Soc. Roy. Lettres Lund 1946–47 II p. 77. O. Neugebauer, The astronomical treatise P. Ryl. 27, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. hist.-fil. Meddelelser XXXII Nr. 2.