Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über kreistreue konforme Abbildungen zyklischer Flächen aufeinander und auf die Ebene

Von **Hanfried Lenz** in München

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 6. Juni 1952

Einleitung

Die von einer räumlichen Kreisschar gebildeten sogenannten *Kreisflächen* oder *zyklischen Flächen* sind von Demartres und anderen (vgl. die Literaturangaben am Schluß) eingehend mit Methoden der euklidischen Differentialgeometrie untersucht worden. Spätere Arbeiten (Demoulin, Thomsen, Vessiot) behandeln diese Flächen mit den Mitteln der konformen Differentialgeometrie. Darboux (IV, S. 439 ff.) hat zuerst gezeigt, daß es zu jeder Kreisfläche $\mathfrak{F}$ eine von einer willkürlichen Funktion abhängige Familie weiterer Kreisflächen gibt, auf die sich $\mathfrak{F}$ so konform abbilden läßt, daß die erzeugenden Kreise in Kreise übergehen. Die vorliegende Arbeit will diesen Gedanken weiter verfolgen und betrachtet insbesondere die Flächen, die so konform auf die Ebene abgebildet werden können, daß die erzeugenden Kreise projektiv in Kreise übergeführt werden; das sind, wie sich zeigen wird, die Flächen, die längs jedes erzeugenden Kreises von einer Dupin'schen Zyklide berührt werden. Je nachdem, ob diese Berührung längs einer Krümmungslinie oder längs eines sogen. Loxodromenkreises (Müller-Kruppa S. 181, H. Schmidt S. 80) erfolgt, handelt es sich um Kanalflächen oder eine schon von Demartres behandelte Flächenklasse („surfaces a focale isotrope"). Die Abbildung auf die Ebene ist, außer wenn die erzeugenden Kreise eine isotherme Schar bilden („isozyklische Flächen"), bis auf eine Kreisverwandtschaft eindeutig bestimmt.

Die vorliegende Arbeit vermeidet die konforme Invariantentheorie (Blaschke III, Thomsen) und benützt außer elementarer

Differentialgeometrie in Vektorform und funktionentheoretischen Schlußweisen möglichst weitgehend anschauliche Überlegungen; sie kann allerdings mit diesen beschränkten Mitteln auch nicht alle auftretenden Fragen lösen.

§ 1. Anschauliche Deutung des Darbouxschen Satzes

Unter einer *Drehung um einen Kreis k* verstehen wir die konforme Raumtransformation, die entsteht, wenn man k zuerst durch Inversion in eine Gerade überführt, den Raum um diese durch einen gegebenen Winkel dreht und dann die Inversion wieder rückgängig macht. Die Drehungen um k sind also die k punktweise fest lassenden Kugelverwandtschaften mit Erhaltung der Orientierung.

Man erhält nun eine infinitesimale konforme und kreistreue Abbildung einer Kreisfläche $\mathfrak{F}$, wenn man den auf einer Seite eines erzeugenden Kreises k gelegenen Flächenteil fest läßt und den anderen um k durch den Winkel $d\omega$ dreht. Macht man das in stetiger Weise für alle erzeugenden Kreise, wobei $d\omega$ in willkürlicher Weise vom Scharparameter t abhängen kann, so hat man auf elementar anschauliche Weise das erwähnte Darboux'sche Ergebnis gewonnen. Die strenge Durchführung des Grenzüberganges ist ohne weiteres möglich. Bei Darboux ist diese geometrische Deutung seiner konformen Transformation, die ganz der bekannten Verbiegung der Regelflächen entspricht, nicht angegeben, es ist aber wohl nicht zu bezweifeln, daß er sie gekannt hat. Wir nennen diese Transformation *Konformverbiegung*. Wir werden noch sehen, daß nicht jede kreistreue konforme Abbildung zyklischer Flächen aufeinander eine Konformverbiegung ist.

Die folgenden Eigenschaften spezieller Kreisflächen bleiben bei Konformverbiegung erhalten:

a) Je 2 „benachbarte“ Kreise haben einen Punkt gemein;

b) Je 2 „benachbarte“ Kreise liegen auf einer Kugel (Kanalflächen);

c) Alle erzeugenden Kreise schneiden eine feste Kugel senkrecht (nichteuklidische Regelflächen);

d) Die erzeugenden Kreise bilden eine isotherme Schar;

e) Die erzeugenden Kreise haben zwei gemeinsame Orthogonalkugeln (dann gilt d).

Weitere Beispiele folgen später. Bei *Kanalflächen* sieht man anschaulich, daß sich $d\omega$ so wählen läßt, daß alle erzeugenden Kreise nach der Konformverbiegung auf eine feste Kugel zu liegen kommen, d. h. daß sich jede Kanalfläche kreistreu und konform auf die Ebene abbilden läßt. In § 3 zeigen wir das auch analytisch.

§ 2. Vektoranalytische Darstellung der Kreisflächen

Das bewegte (d. h. von der Zeit t abhängige) orthogonale Einheitsdreibein $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sei so mit der Mittelpunktskurve der erzeugenden Kreise mit dem Ortsvektor $\mathfrak{m}(t)$ verbunden, daß $\mathfrak{c}$ stets mit der Kreisachse zusammenfällt. Wir nehmen an, daß die Kurve $\mathfrak{m}(t)$ mit der Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird, d. h. führen ihre Bogenlänge als Parameter ein. (Das ist immer möglich, wenn $\dot{\mathfrak{m}} = \mathfrak{t} = a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + c\mathfrak{c} \neq 0$ ist). Für den Ortsvektor der Fläche gilt dann eine Parameterdarstellung

$$(1)\quad \mathfrak{r}(u,t) = \mathfrak{m}(t) + r(t)\,[\mathfrak{a}(t)\cos u + \mathfrak{b}(t)\sin u] = \mathfrak{m} + r\cdot\mathfrak{u}.$$

Ist $\mathfrak{q}$ ein mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ starr verbundener Vektor, so gilt eine Ableitungsformel

$$(2)\qquad \dot{\mathfrak{q}} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{q}$$

wobei $\mathfrak{d} = \alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b} + \gamma\mathfrak{c}$ der zugehörige momentane Drehvektor ist. Die Vektorgleichungen $\dot{\mathfrak{m}} = \mathfrak{t} = \mathfrak{t}(t)$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(t)$ können (bezogen auf das System $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) als natürliche Gleichungen der Fläche angesehen werden und bestimmen diese bis auf Bewegungen eindeutig, sind aber selbst durch die Fläche nicht eindeutig bestimmt, da die Lage des Vektors $\mathfrak{a}$ in der Kreisebene noch nicht festgelegt ist. Das kann z. B. (Demartres 1) durch die Forderung $\beta \equiv 0$ geschehen. Dann ist $\mathfrak{a}$ parallel zur momentanen Drehachse der Kreisebene. Für die ersten Ableitungen des Ortsvektors erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}_u &= r(-\,\mathfrak{a}\sin u + \mathfrak{b}\cos u) = r\cdot\mathfrak{v}\\ \mathfrak{x}_t &= \mathfrak{t} + \dot{r}\mathfrak{u} + r\cdot\mathfrak{d}\times\mathfrak{u}.\end{aligned}\tag{3}$$

Die Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{u}\times\mathfrak{v} = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ bilden wieder ein orthogonales Einheitsdreibein. Für einen mit diesem starr verbundenen Vektor $\mathfrak{p}$ wird

$$\mathfrak{p}_t = \mathfrak{d}\times\mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{p}_u = \mathfrak{c}\times\mathfrak{p}.\tag{4}$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$\begin{aligned}U &= \mathfrak{x}_t\,\mathfrak{u} = && \dot{r} + a\cos u + b\sin u\\ V &= \mathfrak{x}_t\,\mathfrak{v} = \mathfrak{t}\mathfrak{v} + r\mathfrak{d}\mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{t}\mathfrak{v} + r\mathfrak{d}\mathfrak{c} = && r\gamma + b\cos u - a\sin u\\ C &= \mathfrak{x}_t\,\mathfrak{c} = \mathfrak{t}\mathfrak{c} + r\mathfrak{d}\mathfrak{u}\mathfrak{c} = c - r\mathfrak{d}\mathfrak{v} = && c - \beta r\cos u + \alpha r\sin u.\end{aligned}\tag{5}$$

$\sqrt{U^2 + C^2}\,dt$ ist der infinitesimale Abstand eines Punktes vom benachbarten Scharkreis, $U\,dt$ und $C\,dt$ sind die Projektionen dieses Abstandes auf die Kreisebene bzw. die Kreisachse. Für die Fundamentalgrößen 1. Ordnung und den Normalenvektor ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned}E &= \mathfrak{x}_u^2 = r^2\\ F &= \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_t = rV\\ G &= \mathfrak{x}_t^2 = (U\mathfrak{u} + V\mathfrak{v} + C\mathfrak{c})^2 = U^2 + V^2 + C^2\end{aligned}\tag{6}$$

$$W^2 = EG - F^2 = r^2(U^2 + C^2)\tag{7}$$

$$\frac{\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_t}{W} = \frac{r}{W}\,\mathfrak{v}\times\mathfrak{x}_t = \frac{r}{W}\,(\mathfrak{c}\times\mathfrak{u})\times\mathfrak{x}_t = \frac{r}{W}\,(C\mathfrak{u} - U\mathfrak{c}).\tag{8}$$

Ebenso erhält man leicht Formeln für die Fundamentalgrößen 2. Ordnung und die Streifeninvarianten einer Flächenkurve. Für die Zwecke dieser Arbeit ist es aber nicht nötig, sie anzugeben.

§ 3. Isogonaltrajektorien, Minimallinien und konforme Abbildung auf die Ebene

Die Differentialgleichung der Isogonaltrajektorien, wobei φ der Schnittwinkel mit den erzeugenden Kreisen sei, ergibt sich aus der Proportion $(\mathfrak{r}_u \dot{u} + \mathfrak{r}_t)\,\mathfrak{r}_u : |(\mathfrak{r}_u \dot{u} + \mathfrak{r}_t) \times \mathfrak{r}_u| = \cos\varphi : \sin\varphi$ zu

$$(E\dot{u} + F)\sin\varphi - W\cos\varphi = 0. \tag{9}$$

Das gilt auch, wenn der Schnittwinkel φ eine Funktion von t ist. Wir wollen solche verallgemeinerten Scharen von Isogonaltrajektorien als Scharen von *Winkeltrajektorien* bezeichnen. Die Gleichung der sog. Minimallinien der Fläche lautet ganz ähnlich, nämlich

$$E\dot{u} + F \pm iW = 0. \tag{9a}$$

Daraus folgt der bekannte (Demartres 1, S. 159 und 3, S. 56; Voß S. 365) *Hilfssatz 1: Wenn W eine ganze lineare Funktion von $\sin u$ und $\cos u$ ist, so führt die Bestimmung der Minimallinien ebenso wie die der Winkeltrajektorien auf eine Riccatische Differentialgleichung.*

Denn die Differentialgleichungen (9) und (9a) erhalten dann nach der Substitution $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = z$ unmittelbar die Riccatische Form. Die Beziehungen zwischen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, die notwendig und hinreichend sind, damit die Voraussetzung des Hilfssatzes 1 eintritt, hat Demartres (1, S. 156ff.) gefunden. Sie ergeben sich daraus, daß die Nullstellen des in z biquadratischen Polynoms (der Fall, daß seine ersten Koeffizienten verschwinden, muß mit berücksichtigt werden) $(U + Ci)(U - Ci)(1 + z^2)^2$ paarweise gleich und paarweise konjugiert komplex sein müssen. Eine einfache Diskussion zeigt, daß das eintreten kann entweder für (unter der Annahme $\beta \equiv 0$)

$$c = \alpha = 0, \tag{10}$$

d. h. für *ebene Kreisscharen;* oder falls das Verhältnis $U:C$ von u unabhängig ist, d. h. nach (8) für *Kanalflächen*; oder falls das quadratische Polynom $(U + Ci)(1 + z^2)$ ein Quadrat ist, d. h. falls (für $\beta \equiv 0$)

$$\begin{gathered} c\dot{r} = \alpha b r \\ \dot{r}^2 + (\alpha r)^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{gathered} \tag{11}$$

ist. Demartres hat die (11) genügenden Flächen „surfaces a focale isotrope" genannt. Um für sie auch eine *reelle* geometrische Deutung zu finden, betrachten wir den Winkel ϑ zwischen Berührebene und Kreisebene in dem beliebigen Punkt P eines erzeugenden Kreises. Nach der oben abgegebenen Bedeutung der Größen U und C ist $\operatorname{ctg}\vartheta = \frac{U}{C}$.

Daraus folgt

$$(12) \qquad e^{2i\vartheta} = \frac{1+i\operatorname{tg}\vartheta}{1-i\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{(U+Ci)\,(1+z^2)}{(U-Ci)\,(1+z^2)}.$$

Wenn (11) gilt, so bedeutet das, daß Zähler und Nenner der rechten Seite von (12) Quadrate sind. $e^{i\vartheta}$ ist also eine gebrochene lineare Funktion von z, deren Betrag für reelle z den Wert 1 hat. Setzen wir

$$w = e^{i\vartheta}, \qquad \zeta = e^{iu} = \frac{1+iz}{1-iz},$$

so bildet w die Einheitskreisfläche der komplexen ζ-Ebene kreisverwandt entweder auf sich oder auf ihr Äußeres ab. Das bedeutet, daß es ein zum gegebenen erzeugenden Kreis orthogonales Kreisbüschel $\mathfrak{B}$ (in seiner Ebene) gibt, so daß ϑ – u. U. abgesehen vom Drehsinn – den Winkel des durch den Punkt P gehenden Büschelkreises mit einem festen Anfangskreis des Büschels mißt. Es gibt nun eine konforme Raumtransformation, die den erzeugenden Kreis und das Büschel $\mathfrak{B}$ in einen Kreis mit seinen Durchmessern überführt. ϑ ändert sich dabei nicht. Wenn wir den Zentriwinkel des transformierten Kreises mit u' bezeichnen, wird dann $\frac{d\vartheta}{du'} = \pm 1$. Diese Schlußweise gilt auch in umgekehrter Richtung, d. h. wir haben den

Hilfssatz 2: Die Gleichungen (11) *bedeuten geometrisch, daß sich jeder Streifen der Fläche längs eines erzeugenden Kreises durch eine konforme Raumtransformation in einen Streifen der konstanten Normalwindung 1 längs des Einheitskreises überführen läßt.*

Insbesondere sind je zwei benachbarte Kreise einer Fläche, für die (11) gilt, miteinander verkettet. Wir nennen Streifen dieser Eigenschaft aus einem noch anzugebenden Grund Kreisschraubstreifen. Alle Kreisschraubstreifen sind also kugelverwandte

Bilder voneinander. Eine Fläche aus Kreisschraubstreifen geht bei konformer Raumtransformation sowie bei Konformverbiegung (§ 1) offenbar in eine ebensolche über.

Für derartige Flächen und für Kanalflächen ergeben sich nach Hilfssatz 1 die Minimallinien aus einer Riccatischen Differentialgleichung

$$dz + [f_1(t)z^2 + f_2(t)z + f_3(t)]\,dt = 0. \tag{13}$$

Ihre Lösung ist bekanntlich von der Form

$$z = \frac{F_1(t)\cdot Z + F_2(t)}{F_3(t)\cdot Z + F_4(t)},$$

wobei Z Integrationskonstante ist, oder

$$Z = \frac{G_1(t)\,z + G_2(t)}{G_3(t)\,z + G_4(t)}. \tag{14}$$

Die Funktionen $G_1(t), \ldots, G_1(t)$ sind komplex, z und t reell. Aus (14) folgt, daß das vollständige Differential

$$dZ = d\left(\frac{G_1(t)\,z + G_2(t)}{G_3(t)\,z + G_4(t)}\right)$$

der linken Seite von (13) proportional ist, wir können also schreiben

$$dZ = M\left\{dz + [f_1(t)z^2 + f_2(t)z + f_3(t)]\,dt\right\}, \tag{15}$$

wobei M ein Multiplikator der Differentialform in (13) ist. Nach der Gaußschen Theorie der konformen Abbildung von Flächen auf die Ebene (vgl. etwa Scheffers S. 61 ff.) ist daher die durch (14) vermittelte Abbildung der gegebenen Kreisfläche auf die komplexe Z-Ebene konform. Betrachten wir (14) für festes t, während z die reelle Achse durchläuft, d. h. bewegen wir uns auf einem erzeugenden Kreis, so bewegt sich auch Z auf einem Kreis und wir haben

Satz 1: Jede Kanalfläche und jede Fläche aus Kreisschraubstreifen läßt sich so konform auf die Ebene abbilden, daß die erzeugenden Kreise in Kreise übergehen und die Doppelverhältnisse auf diesen Kreisen erhalten bleiben,

§ 4. Eindeutigkeits- und Umkehrsätze

Satz 2a: Wenn sich eine Kreisfläche so konform auf die Ebene abbilden läßt, daß die erzeugenden Kreise in volle Kreise übergehen (kreistreue Abbildung), so ist die ebene Bildschar bis auf eine Kreisverwandtschaft eindeutig bestimmt.

Denn ein von zwei ebenen Bildscharkreisen begrenzter Teil der Ebene läßt sich durch eine lineare Hilfsabbildung entweder auf einen Winkelraum zwischen zwei Geraden oder einen Parallelstreifen oder einen Kreisring abbilden. Derartige Bereiche können aber nach wohlbekannten Sätzen der Funktionentheorie nur durch lineare Funktionen mit Erhaltung der Ecken auf gleichartige abgebildet werden. Von dem damit verwandten, gleichfalls nicht neuen, folgenden Satz (Gronwall) soll der Einfachheit halber ein Beweis gegeben werden.

Satz 2b: Wird ein Stück einer Kreisfläche $\mathfrak{F}$ konform so in die Ebene abgebildet, daß die Bögen der erzeugenden Kreise in Kreisbögen übergehen (kreisbogentreue Abbildung), so ist die ebene Bildschar $\mathfrak{S}$ entweder ein Kreisbüschel und die Fläche isozyklisch oder $\mathfrak{S}$ ist bis auf eine Kreisverwandtschaft eindeutig bestimmt.

Beweis: Das ebene Bild sei eine Kreisschar, die durch die Funktion $w = w(Z)$ auf eine andere abgebildet wird. Nach dem Spiegelungsprinzip erfahren Z und w bei einer geraden Anzahl von Spiegelungen an Scharkreisen lineare Substitutionen, die insgesamt mindestens eingliedrige, kontinuierliche Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ bilden. $Z = L_\tau[\zeta]$ sei eine vom Parameter τ abhängige lineare Substitution aus $\mathfrak{G}$, $w(Z) = L'_\tau\,[w(\zeta)]$ die entsprechende Substitution aus $\mathfrak{G}'$. Für die Schwarzsche Differentialinvariante $[w]_Z = \left(\frac{w''}{w'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$ gilt die bekannte und leicht nachzurechnende Identität

$$(16) \qquad [w(Z)]_Z = [w(Z)]_\zeta \cdot \left(\frac{d\zeta}{dZ}\right)^2 + [\zeta]_Z.$$

$[\zeta]_Z$ verschwindet identisch, weil ζ von Z linear abhängt. Ferner ist $[w(Z)]_\zeta = [w(\zeta)]_\zeta$, weil $w(Z)$ von $w(\zeta)$ linear abhängt. Es wird

$$(17) \qquad [w(\zeta)]_\zeta = [w(Z)]_Z \cdot \left(\frac{dZ}{d\zeta}\right)^2.$$

Das gilt insbesondere für jede eingliedrige Untergruppe $\mathfrak{U} \subseteqq \mathfrak{G}$. Wenn $\mathfrak{U}$ aus Translationen besteht, ist $\frac{dZ}{d\zeta} = 1$, also $[w(Z)]_Z = [w(\zeta)]_\zeta$, was für eine *kontinuierliche* Schar von Substitutionen $Z = L_\tau[\zeta]$ nur sein kann, wenn

$$(18) \qquad [w(Z)]_Z = \text{const.} = -\frac{k^2}{2}$$

ist.

Wenn $\mathfrak{U}$ nicht aus Translationen besteht, so kann man entweder durch eine lineare Abbildung oder durch eine lineare Abbildung mit nachfolgendem Übergang zum Logarithmus erreichen, daß die transformierte Gruppe aus Translationen besteht, womit wir wieder auf die Differentialgleichung (18) kommen. Ihre allgemeine Lösung ist im Fall $k = 0$ die allgemeine lineare Funktion von Z, im Fall $k \neq 0$ die allgemeine lineare Funktion von e^{kZ}, wie man durch Einsetzen erkennt.

Die soeben durchgeführte Betrachtung zeigt, daß zwischen Z und w in jedem Fall eine der folgenden Beziehungen besteht:

$$\text{(A)} \qquad w = L_1(Z)$$

$$\text{(B)} \qquad w = L_2[e^{L_3(Z)}]$$

$$\text{(C)} \qquad L_4(w) = \log L_5(Z)$$

$$\text{(D)} \qquad w = L_6[e^{k \log L_7(Z)}] \qquad \text{oder} \qquad L_6^{-1}(w) = [L_7(Z)]^k,$$

wobei $L_1, L_2, \ldots$ lineare Funktionen bedeuten. Wenn man vom Fall (A) absieht, müssen die Scharkreise einem Büschel angehören, weil bei den Substitutionen (B), (C), (D) nur die Kreise zweier ausgezeichneter orthogonaler Büschel wieder in Kreise übergehen und weil eine *stetige* Schar, die zwei orthogonalen Büscheln angehört, ganz einem von ihnen angehört. Da Kreise eines Büschels eine isotherme Schar bilden, gilt dasselbe auch für die räumliche Kreisschar auf der Fläche.

$\bar{\mathfrak{S}}$ sei die Menge der aus $\mathfrak{S}$ durch wiederholte Spiegelung hervorgehenden Kreise. Wenn $\bar{\mathfrak{S}}$ ein Büschel enthält, ist die *Existenz* der eingliedrigen Untergruppe $\mathfrak{U}$ gesichert und wir sind fertig. Andernfalls gibt es einen Punkt P mit folgenden Eigenschaften:

I. Es gibt eine Teilmenge $\mathfrak{S}_1 \subseteqq \mathfrak{S}$, so daß durch jeden Punkt einer gewissen Umgebung U_P von P genau ein Kreis aus $\mathfrak{S}_1$

geht. Dabei liege U_P im Regularitätsbereich der gegebenen Abbildung $w = w(Z)$.

II. Durch P gehen mindestens zwei Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ aus $\bar{\mathfrak{S}}$.

Denn sonst müßte $\mathfrak{S}_1$ einem Büschel angehören, und dieser Fall ist schon erledigt. Durch P gehen also auch alle aus $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ durch Spiegelungen erzeugten Kreise, insbesondere zwei Kreise $\mathfrak{K}_3$ und $\mathfrak{K}_4$, die einen beliebig nahe an P vorbeilaufenden Kreis $\mathfrak{K}_5$ so schneiden, daß das von $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$, $\mathfrak{K}_5$ gebildete *Kreisbogendreieck* ganz in U_P liegt. Dieses Kreisbogendreieck muß nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip mit Erhaltung der Ecken auf ein anderes abgebildet werden. Das kann nur durch eine lineare Funktion geschehen, w. z. b. w.

Satz 1 gestattet die folgende Umkehrung:

Satz 3: Wenn sich eine zyklische Fläche so konform auf die Ebene abbilden läßt, daß I. die erzeugenden Kreise in Kreise übergehen und II. ein Kreis dabei projektiv (d. h. mit Erhaltung der Doppelverhältnisse) abgebildet wird, so ist die Fläche entweder Kanalfläche oder besteht aus Kreisschraubstreifen.

Beweis: Weil die Orthogonaltrajektorien a) bei der konformen Abbildung erhalten bleiben und b) die Kreise sowohl der ebenen wie der räumlichen Schar projektiv aufeinander beziehen, (was aus (9) für $\varphi = 90^0$ folgt; Demartres 1, Darboux S. 494), werden durch die gegebene Abbildung *alle* Kreise projektiv abgebildet. Weil jede Schar von Winkeltrajektorien erhalten bleibt und in der Ebene die Scharkreise projektiv aufeinander bezieht, muß sie das auch auf der Fläche tun, d. h. die Differentialgleichung (9) muß nach der Substitution $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = z$ in die Riccatische Form übergehen, was nur sein kann, wenn sich W linear durch $\sin u$ und $\cos u$ ausdrückt, w. z. b. w. Es ist mir nicht gelungen, die zuerst gehegte Vermutung zu beweisen, daß die Voraussetzung II des Satzes 3 über die projektive Abbildung eines Kreises entbehrlich ist. Diese Vermutung war nämlich falsch, wie das folgende Beispiel zeigt: Die gewöhnliche Wendelfläche $\mathfrak{W}$ läßt sich bekanntlich so auf eine Drehfläche (das Katenoid) verbiegen, daß die Bahnschraubenlinien in die Parallelkreise und die erzeugenden Geraden in die Meridiane übergehen. Die Meridiane einer Drehfläche bilden eine isotherme Schar, daher auch die Erzeugenden der Wendelfläche. Eine mit $\mathfrak{W}$ kugelverwandte Fläche $\mathfrak{W}'$ (oder eine daraus durch Konformverbiegung entstandene) ist also *isozyklisch*, gestattet daher kreistreue konforme Abbildungen auf die Ebene. $\mathfrak{W}'$ ist nicht Kanalfläche und besteht nicht aus Kreisschraubstreifen, weil je zwei benachbarte Kreise sich schneiden, also nicht verkettet sind. Ebenso zeigt man, daß die nichteuklidische Wendelfläche (als Kreisfläche im Poincaréschen Modell des nichteuklidischen Raumes betrachtet) isozyklisch ist, aber weder Kanalfläche ist noch aus Kreisschraubstreifen besteht. Weitere Gegenbeispiele liefern, wie man leicht erkennt, die Flächen mit $a = b = \beta = \gamma = = 0, \dot{r}:(\alpha r) = \text{const.}, c:(\alpha r) = \text{const.}$ Dann sind in (9a) die Variabeln getrennt und an Stelle von (14) wird $Z = F(u) + iG(t)$. Auch diese Flächen sind isozyklisch.

Die Frage nach *allen* konform und kreistreu auf die Ebene abbildbaren Flächen, eine Verallgemeinerung des von Demartres und Demoulin behandelten Problems der Kennzeichnung aller isozyklischen Flächen, bleibt damit offen. *Wenn* eine solche Abbildung besteht, so können wir den Streifen zwischen zwei „benachbarten" Kreisen auf der Fläche und im ebenen Bild „mit unendlich kleinen Quadraten pflastern". Analytisch drückt sich dieser Sachverhalt (bei festgehaltenem Scharparameter t) durch die Gleichung

$$\int \frac{du_0}{W_0} = \text{const.} \int \frac{du}{W} \tag{19}$$

aus, wobei u_0 und W_0 für die ebene Schar dasselbe bedeuten wie u und W für die räumliche. Nach den Substitutionen $\operatorname{tg} \frac{u_0}{2} = \zeta$, $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = z$ wird daraus, weil das linke Integral – abgesehen von einem konstanten Faktor – entweder eine lineare Funktion von ζ oder der Logarithmus einer solchen wird, eine der Beziehungen (L = lineare Funktion mit reellen Koeffizienten)

$$\left.\begin{array}{l} L(\zeta) \\ \log L(\zeta) \\ \operatorname{arc\,tg} L(\zeta) \end{array}\right| = \int \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, \tag{20}$$

wobei $P(z)$ ein Polynom von höchstens vierter Ordnung ist.

§ 5. Der Torus und die Kreisschraubflächen

Der Torus enthält bekanntlich außer den Meridianen und Parallelkreisen noch zwei Scharen schief liegender Kreise, die Isogonaltrajektorien der zuerst genannten Kreisscharen sind. Er läßt sich daher konform so auf die Ebene abbilden, daß seine 4 Kreisscharen in Scharen paralleler Geraden übergehen (H. Schmidt, S. 81). Weil die schiefen Kreise durch die Parallelkreise kongruent, also projektiv, aufeinander bezogen werden, muß sich W (wenn der Torus als von einer seiner schiefen Scharen gebildete Fläche betrachtet wird) linear durch $\sin u$ und $\cos u$ ausdrücken. Denn (9) nimmt nach Einführung von z dann die Riccatische Form an. Da die schiefen Kreise keine Krümmungslinien sind, müssen die durch sie bestimmten Streifen daher *Kreisschraubstreifen* sein. Da alle Kreisschraubstreifen untereinander kugelverwandt sind, läßt sich jeder von ihnen auf eine geeignete Ringzyklide legen und wir haben den eingangs erwähnten Satz, daß die projektiv-kreistreu und konform auf die Ebene abbildbaren Kreisflächen längs jedes erzeugenden Kreises von einer Ringzyklide berührt werden.

Von besonderem Interesse sind in diesem Zusammenhang die von Thybaut und Robert kürzlich behandelten *Kreisschraubflächen* („surfaces $\sum$"). Zunächst einige vorbereitende Betrachtungen:

a sei eine Gerade, k (der „*Zentralkreis*") ein Kreis mit a als Achse. Die Drehungen $\mathfrak{A}_\alpha$ und $\mathfrak{K}_\beta$ um a bzw. k durch die beliebigen Winkel α bzw. β erzeugen eine zweigliedrige Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ konformer Raumtransformationen, die Transformationen $\mathfrak{A}_\alpha \mathfrak{K}_{\lambda\alpha} \in \mathfrak{G}$ (mit festem λ) eine eingliedrige Untergruppe $\mathfrak{R}_\lambda$, deren Bahnkurven Loxodromen auf den das Kugelbüschel durch k orthogonal schneidenden Torusflächen sind. Wir nennen die Transformationen aus $\mathfrak{R}_\lambda$ *Ringschraubungen;* in dem besonders interessanten Fall $\lambda = \pm 1$, in dem alle Bahnkurven schiefe Kreise der erwähnten Torusflächen sind, *Kreisschraubungen.* Wir müssen zunächst zeigen, daß diese scheinbar nicht konform invariante Definition es in Wahrheit doch ist. $\mathfrak{R}_1$ sei die eingeführte Gruppe von Kreisschraubungen, k' einer ihrer Bahnkreise.

Hilfssatz 3: Die Drehungen um k' sind mit den Kreisschraubungen aus $\mathfrak{R}_1$ vertauschbar.

Beweis: $\mathfrak{S}$ sei eine Drehung um k', ferner $\mathfrak{T} \in \mathfrak{R}_1$. Die Bildpunkte eines Punktes P bei diesen Transformationen bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}P$, $\mathfrak{T}P$. $\mathfrak{T}\mathfrak{S}P$ liegt auf dem Bahnkreis der Drehungen um k' durch $\mathfrak{T}P$, weil $\mathfrak{T}$ die Gesamtheit dieser Bahnkreise als Schnitte von zu k' orthogonalen Kugeln unter sich vertauscht. Die k' enthaltenden Kugeln durch P und $\mathfrak{S}P$ gehen in Kugeln durch $\mathfrak{T}P$ und $\mathfrak{T}\mathfrak{S}P$ über. Ihr Schnittwinkel bleibt erhalten, daher ist $\mathfrak{T}\mathfrak{S}P = \mathfrak{S}\mathfrak{T}P$, w. z. b. w.

Hilfssatz 4: Es gibt zu einem gegebenen Bahnkreis k' der Gruppe $\mathfrak{R}_1$ genau einen Bahnkreis der Gruppe $\mathfrak{D}$ der Drehungen um k', der bei den Transformationen von $\mathfrak{R}_1$ in sich übergeht.

Beweis: Es sei $\mathfrak{T} \in \mathfrak{R}_1$. $\mathfrak{T}$ dreht jede Kugel K durch k' durch einen festen Winkel τ um k' als „Achse". $\mathfrak{S} \varepsilon \mathfrak{D}$ sei die Drehung um k', die diese Drehung der Kugel rückgängig macht. $\mathfrak{S}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{S}$ führt also die Kugel K kreisverwandt in sich über, wobei k' in sich übergeht. Auf k' liegt kein Fixpunkt, daher liegen die Fixpunkte von $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ nach elementaren funktionentheoretischen Sätzen symmetrisch zu k'. Der Bahnkreis d_0 der Drehungsgruppe $\mathfrak{B}$ durch diese Fixpunkte ist der gesuchte Kreis. Daß er vom Winkel τ unabhängig ist, folgt leicht aus der Vertauschbarkeit von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ und der Stetigkeit der Gruppen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{D}$.

Hilfssatz 5: Die Bahnkreise der Drehungen um den Kreis d_0 werden durch die Gruppe $\mathfrak{R}_1$ untereinander vertauscht.

Das folgt aus Hilfssatz 3, weil d_0 selbst ein Bahnkreis von $\mathfrak{R}_1$ ist oder aus der Tatsache, daß die Bahnkurven der Drehungen um d_0 die Orthogonalkreise der Kugeln durch d_0 sind. Daraus folgt:

Führt man k' durch Inversion in eine Gerade $\bar{a}$ über, so wird aus d_0 ein Kreis $\bar{k}$ mit $\bar{a}$ als Achse. Aus der Gruppe $\mathfrak{R}_1$ wird dann einfach die Gruppe der Kreisschraubungen mit $\bar{a}$ als Achse und $\bar{k}$ als Zentralkreis. Umgekehrt enthält das System $\sum$ der Bahnkreise von $\mathfrak{R}_1$, weil durch jeden Raumpunkt (einschl. ∞) genau ein Bahnkreis geht, auch nach jeder konformen Raumtransformation wieder eine Gerade $\tilde{a}$ und nach Hilfssatz 4 genau einen

Kreis $\tilde{k}$ mit $\tilde{a}$ als Achse. $\sum$ geht also in das System der Bahnkreise der Kreisschraubungsgruppe mit $\tilde{a}$ als Achse und $\tilde{k}$ als Zentralkreis über. Das Bahnkreissystem erfährt also als Ganzes bei jeder konformen Raumtransformation nur eine Ähnlichkeitstransformation. Damit ist gezeigt, daß der oben eingeführte Begriff der Kreisschraubung konform invariant ist. Wir schließen daraus, weil die Ringzykliden demnach aus ∞^1 Bahnkreisen einer Kreisschraubung gebildet werden:

Satz 4: Jeder Kreisschraubstreifen kann so auf einen schiefen Kreis eines Torus gelegt werden, daß er mit dem Torus einen konstanten Winkel einschließt oder: Zu jedem Kreisschraubstreifen gibt es einen anderen mit gleicher Streifenachse (dem erzeugenden Kreis) und gleicher Normalwindung, der einen Torus in ganzer Länge berührt.

Daraus folgt nun wieder:

Satz 5: Jede Fläche aus Kreisschraubstreifen läßt sich auf eine Hüllfläche von längs schiefer Kreise berührenden Torusflächen konformverbiegen.

Die von Thybaut und Robert betrachteten Flächen sind die durch eine Kreisschraubungsgruppe aus einer beliebigen Kurve erzeugten Flächen. Wir nennen sie *Kreisschraubflächen.* Die Kreisschraubstreifen sind einfach die Bahnstreifen auf den Kreisschraubflächen. Aus den oben durchgeführten Betrachtungen folgt unmittelbar

Satz 6: Alle Kreisschraubflächen sind isozyklisch (Thybaut-Robert) und aufeinander, insbesondere auf den Torus, konformverbiegbar.

Satz 7: Die Mittelpunktskurve einer Kreisschraubfläche ist eben und bleibt es auch nach konformer Raumtransformation.

Wir können in diesem Zusammenhang noch bequem ein weiteres Beispiel einer isozyklischen Fläche angeben: k_0 sei ein Kreis durch zwei gegenüber liegende Punkte des Zentralkreises k einer Ringschraubungsgruppe $\mathfrak{R}_\lambda$ mit $\lambda \neq \pm 1$. k_0 steht auf allen Bahnkurven der Gruppe senkrecht. Auf der aus k_0 durch $\mathfrak{R}_\lambda$ erzeugten Fläche bilden die Bahnkurven und die zu ihnen orthogonalen Kreise ein isothermes Netz.

Die konforme Abbildung der Kreisflächen aufeinander gibt noch zu einigen offenen Fragen Anlaß, die mit der Einteilung der Kreisflächen in konform und kreisbogentreu bzw. kreistreu aufeinander abbildbare Klassen bzw. aufeinander konformverbiegbare Unterklassen zusammenhängen. Sie dürften sich in voller Allgemeinheit nicht ohne konforme Invariantentheorie angreifen lassen und fallen daher aus dem Rahmen der vorliegenden Arbeit.

Literaturhinweise

W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie III, Berlin 1929.

G. Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces IV, Paris 1896.

G. Demartres: 1. Sur les surfaces à génératrice circulaire, Ann. Ec. Norm. (3) 2 (1885) S. 123–182.
2. Sur les surfaces qui sont divisées en carrées par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales. C. R. Paris 104 (1887) S. 217–220 und Ann. Ecc. Norm. (3) 4 (1887) S. 145–158.
3. Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement une suite de cercles.

A. Demoulin: „Sur les surfaces cerclées. 3 Arbeiten: C. R. Paris 173 (1921) S. 341–344; Bull. de la classe des sciences de l'Academie Royale de Belgique 1921, S. 499–507 und 1922, S. 479–504.

T. H. Gronwall: Conformal mapping of a family of real conics upon one another. Annals of Math. (2) 22 (1920) S. 101–127 und Nat. Acad. Proc. (USA) 6 (1920) S. 312–315.

M. Lelieuvre: Surfaces à génératrices rationnelles. Ann. Ec. Norm. (3) 12 (1895) S. 57–143.
2. Lignes de courbure des surfaces cerclées. C. R. Paris 118 (1894) S. 967.

R. v. Lilienthal: Enz. d. math. Wiss. III D 5, S. 278–281.

Müller-Kruppa: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 5. Aufl., Wien 1948.

G. Scheffers: Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902.

H. Schmidt: Die Inversion und ihre Anwendungen, München 1950.

G. Thomsen: Über konforme Geometrie II. Hamb. Abh. 4 (1926) S. 117–147.

A. Thybaut u. P. Robert: Sur les surfaces engendrées par les cercles d'une congruence paratactique. C. R. Paris 233 (1951) S. 775–777 und 842–844.

E. Vessiot: 1. Sur la géométrie conforme des systèmes de cercles. C. R. Paris 174 (1922) S. 989–991.
2. Sur les surfaces cerclées. C. R. 174 (1922) S. 1101–1104.

A. Voß: Zur Theorie der Kanalflächen. Diese Akademieberichte 1919, S. 353–368.