Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1951

München 1952

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkung zu einem Abbildungssatz von Herrn Béla Sz.-Nagy

Von Otto Haupt in Erlangen

Vorgelegt am 16. November 1951

Einleitung

Herr Béla Sz.-Nagy teilte mir brieflich ohne Beweis den folgenden Satz mit: Ist $\mathfrak{K}_k$ ein k-dimensionaler konvexer Körper im euklidischen E_k, so ist $\mathfrak{K}_k$ dehnungsbeschränktes ein-eindeutiges Bild des k-dimensionalen Kugelkörpers $\mathfrak{C}_k$; und er fügte hinzu, daß man diese Abbildung als eine „in allen Richtungen homothetische" (vgl. weiter unten) von einem inneren Punkt o von $\mathfrak{K}_k$ aus auf ein $\mathfrak{C}_k$ mit dem Zentrum o wählen könne.

Bei dem Versuch, mir diesen Sachverhalt klarzumachen, fand ich, daß der Satz im E_k nicht nur für konvexe Körper gilt, sondern allgemeiner für Punktmengen $\mathfrak{K}$ mit einem inneren Punkt o derart, daß $\mathfrak{K}$ „sternig"[1] ist bezüglich o und daß keine freie Tangente[2] des Randes $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ durch o geht. Und zwar zeigte sich: (**I**) daß $\mathfrak{R}$ vermöge Zentralprojektion von o aus ein-eindeutiges Bild der $(k-1)$-dimensionalen Sphäre $\mathfrak{S}$ mit o als Zentrum (und vom Radius 1) ist, also $Y = r(X)X$, wobei Y bzw. X die von o aus nach den betrachteten Punkten von $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{S}$ gehenden Vektoren bezeichnen und $r(X)$ eine auf $\mathfrak{S}$ eindeutige, reelle Funktion mit $0 < \rho' \leq r(X) \leq \rho'' < +\infty$ ist, unter ρ', ρ'' reelle Zahlen verstanden, die von X unabhängig sind; (**II**) daß (**a**) diese Abbildung dehnungsbeschränkt ist, ebenso wie (**b**) die Funktion

---

[1] Eine Punktmenge $\mathfrak{M} \subset E_k$ heißt *sternig* in bezug auf den Punkt $o \in \mathfrak{M}$, wenn mit jedem Punkt $X \in \mathfrak{M}$, $X \neq o$, auch die von o und X begrenzte Strecke in $\mathfrak{M}$ liegt.

[2] Man versteht darunter jeden Limes von Geraden durch zwei Punkte von $\mathfrak{R}$, die gegen einen Punkt von $\mathfrak{R}$ konvergieren. Vgl. auch die Definition in § 1 Nr. 1. 1.

$r(X)$ selbst; (**III**) daß die Erweiterung der Zentralprojektion in (I) zu der in jeder Richtung homothetischen Abbildung $Z = r(X)X'$, wo $X' = |X'|\,X$, von $\mathfrak{C}_k$ auf $\mathfrak{K}$ ebenfalls dehnungsbeschränkt ist.

Nachdem ich Herrn B. Sz.-Nagy diese Verallgemeinerung nebst Beweis mitgeteilt hatte,[3] verständigte er mich davon, daß Herr St. Vincze einen Beweis für seinen Satz vollständig ausgearbeitet und auch die *Dehnungsbeschränktheit der Umkehrung der homothetischen Erweiterungsabbildung* bewiesen habe, ferner, daß Herr Vincze sich *von jeder Kompaktheitsvoraussetzung habe befreien* und damit den Satz über *konvexe* Körper auch auf Hilbertsche Räume habe ausdehnen können (mein Beweis für die obigen Behauptungen (I) und (II) (a) macht von Kompaktheitsannahmen Gebrauch). Herr B. Sz.-Nagy war später so liebenswürdig, mir die Abschrift einer Arbeit „Beweis eines Abbildungssatzes von Béla Sz.-Nagy"[4] zugänglich zu machen, die Herr St. Vincze in Zusammenarbeit mit Herrn P. Szüsz verfaßt hat.

Demgegenüber beschränken wir uns in § 1 vorliegender Arbeit auf den euklidischen E_k, aber nicht auf konvexe Körper und verschärfen unsere oben (vgl. Behauptung (I) und (II) (a)) angegebene Verallgemeinerung zu einer *Kennzeichnung aller abgeschlossenen, kompakten Mengen $\mathfrak{K}$ des E_k mit innerem Punkt* o *derart, daß der Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ vermöge Zentralprojektion von* o *aus ein-eindeutiges, dehnungsbeschränktes Bild der* $(k-1)$*-dimensionalen* (Einheits-)*Sphäre um* o *ist.* Sodann geben wir in § 2 ohne wesentliche Änderung[5] unsere seinerzeit Herrn B. Sz.-Nagy mitgeteilten, übrigens für Hilbertsche Räume gültigen, Beweise für Behauptung (II) (b) und (III) (siehe oben); der Vollständigkeit wegen ist noch das obenerwähnte Ergebnis von Herrn Vincze betr. die Dehnungsbeschränktheit der Umkehrabbildung hinzugefügt.

---

[3] Diese Mitteilung wird in Fußn. 11 und 13 mit „M." zitiert.

[4] Die Arbeit ist inzwischen in Acta Sci. Math. Szeged 14 (1951), 96–100, erschienen.

[5] Abgesehen von einigen Ergänzungen hinsichtlich der Beh. und dementsprechend der Beweise. Vgl. Fußn. 11 und 13.

§ 1. *Kennzeichnung der Kompakta $\mathfrak{K}$ des E_k, deren Rand ein-eindeutig und dehnungsbeschränkt aus einem inneren Punkt* o *von $\mathfrak{K}$ auf die Sphäre um* o *projizierbar ist*

1.1. *Bezeichnungen.* Im euklidischen k-dimensionalen Raum E_k sei o ein fester Punkt; mit $\mathfrak{H}$ sei eine *Halbgerade* bezeichnet, deren Anfangspunkt o ist. Ferner seien mit X, Y, . . . je nach Bedarf bezeichnet: *Vektoren*, die von o ausgehen, oder die diesen Vektoren ein-eindeutig entsprechenden Endpunkte der Vektoren; also $X = o$ bezeichnet den Nullvektor oder den Punkt o. Es sei $|X|$ der absolute Betrag (die Länge) des Vektors X und $X_e = X : |X|$ der *Einheitsvektor* von $X \neq o$. Das skalare Produkt von X und Y wird mit XY bezeichnet. $|X-Y|$ kann als die Entfernung der beiden Punkte X und Y gedeutet werden.

Die eindeutige Abbildung $Y = f(X)$ der Menge $\mathfrak{A} \subset E_k$ in die Menge $\mathfrak{B} \subset E_k$ heiße dehnungsbeschränkt,[6] wenn eine reelle Zahl α mit $0 < \alpha < +\infty$ existiert derart, daß

$$D(f; X', X'') = |f(X') - f(X'')| : |X' - X''| \leq \alpha$$

für jedes Paar X', X'' von (Vektoren mit den End-) Punkten aus $\mathfrak{A}$, soweit $X' \neq X''$.

Unter einer freien Tangente der Menge $\mathfrak{M} \subset E_k$ im Häufungspunkt Z von $\mathfrak{M}$ verstehen wir jeden Limes[7] einer Folge von Geraden g_t, $t = 1, 2, \ldots$, derart, daß g_t durch zwei Punkte $P_t', P_t'' \in \mathfrak{M}$ geht und $\lim P_t' = \lim P_t'' = Z$ ist. Die Gesamtheit der Punkte aller freien Tangenten an $\mathfrak{M}$ heiße das Paratingent $p(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$.

Der Rand einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{K}$ wird mit $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ bezeichnet; der Rand einer abgeschlossenen, k-dimensionalen (Voll-)Kugel $\mathfrak{C}_k$ in E_k heiße ($(k-1)$-dimensionale) Sphäre $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{k-1}$.

---

[6] Vgl. auch Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung, 1. Bd., 2. Aufl. (Berlin 1948) Nr. 5. 2. 5.

[7] Eine Folge von (nicht orientierten) Geraden g_t im E_k wird als konvergent mit der (nicht orientierten) Geraden g als Limes bezeichnet, wenn Erstens die zu den g_t parallelen Durchmesser d_t einer festen Kugel $\mathfrak{C} \subset E_k$ gegen einen Durchmesser d von $\mathfrak{C}$ parallel zu g konvergieren und Zweitens auf g_t ein Punkt P_t sowie auf g ein Punkt P existiert mit $P = \lim P_t$.

1.1.3.1. Es sei R ein t-Raum[6a] und $\mathfrak{T} \subset R$. Der offene Kern $\underline{\mathfrak{T}}$ bzw. die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{T}}$ von $\mathfrak{T}$ werde der einfacheren Schreibweise halber mit $\mathfrak{T}_0$ bzw. mit $\mathfrak{T}_a$ bezeichnet und dementsprechend gesetzt: $\mathfrak{T}_{0a} = (\mathfrak{T}_0)_a$, $\mathfrak{T}_{a0} = (\mathfrak{T}_a)_0$ usw. Ferner heiße $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{T}_{0a} - \mathfrak{T}_0$ bzw. $\mathfrak{B}_ä = \mathfrak{T}_a - \mathfrak{T}_{a0}$ die innere bzw. die äußere Begrenzung von $\mathfrak{T}$. Es sind $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}_ä$ *Teilmengen der Begrenzung* $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}_a - \mathfrak{T}_0$ von $\mathfrak{T}$, also $\mathfrak{B}_i \cup \mathfrak{B}_ä \subset \mathfrak{B}$ (Denn $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}\mathfrak{T}_{0a}$ und $\mathfrak{B}_ä = \mathfrak{B}(R - \mathfrak{T}_{a0})$.

Anmerkung. Im allgemeinen ist $\mathfrak{B}_i \cup \mathfrak{B}_ä$ *echte* Teilmenge von $\mathfrak{B}$. *Beispiel*: $R = E_1$, ferner $\mathfrak{Q}$ die Menge der rationalen Punkte in E_1 und $\mathfrak{T} = \mathfrak{J}' + \mathfrak{Q}\mathfrak{J}''$, wobei $\mathfrak{J}' = (0, 1)$, $\mathfrak{J}'' = (2, 3)$ offene Intervalle in E_1. Es ist $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{J}'$, $\mathfrak{T}_{0a} = \mathfrak{J}'_a$; $\mathfrak{T}_a = \mathfrak{J}'_a + \mathfrak{J}''_a$, $\mathfrak{T}_{a0} = \mathfrak{J}' + \mathfrak{J}''$, also $\mathfrak{B}_i = (0) + (1)$, $\mathfrak{B}_ä = (0) + (1) + (2) + (3) = \mathfrak{B}_i \cup \mathfrak{B}_ä$ und $\mathfrak{B} = (0) + (1) + (2) + (3) + \mathfrak{J}''$; dabei bezeichnet z. B. (1) die nur den Punkt 1 enthaltende (einpunktige) Menge.

1.1.3.2. *Aus* $\mathfrak{B}_i \neq 0$ *bzw. aus* $\mathfrak{B}_ä \neq 0$ *folgt* (neben $\mathfrak{B} \neq 0$ auch) $\mathfrak{T}_0 \neq 0$ *bzw.* $R - \mathfrak{T}_a \neq 0$ (Denn z. B. aus $R = \mathfrak{T}_a$ folgt $\mathfrak{T}_{a0} = R_0 = R = \mathfrak{T}_a$).

Ist R zusammenhängend, so folgt umgekehrt aus $\mathfrak{T}_0 \neq 0$ *und* $R - \mathfrak{T}_a \neq 0$, daß $\mathfrak{B}_i \neq 0$ *und* $\mathfrak{B}_ä \neq 0$, *also auch* $\mathfrak{B} \neq 0$. (Denn für $\mathfrak{B}_i = 0$, also $\mathfrak{T}_{0a} = \mathfrak{T}_0$, ist $R = \mathfrak{T}_0 + (R - \mathfrak{T}_{0a})$ Vereinigung zweier fremder offener Mengen, die nicht leer sind, weil $\mathfrak{T}_0 \neq 0$ und weil, wegen $\mathfrak{T}_{0a} \subset \mathfrak{T}_a$, gilt: $R - \mathfrak{T}_a \subset R - \mathfrak{T}_{0a}$, also $R - \mathfrak{T}_{0a} \neq 0$. Und entsprechend ergibt sich ein Widerspruch für $\mathfrak{B}_ä = 0$).

Oder etwas allgemeiner:

Ist R zusammenhängend, so folgt aus $\mathfrak{T}_0 \neq 0$ *und* $R - \mathfrak{T}_0 \neq 0$, *daß* $\mathfrak{B}_i \neq 0$ *bzw. aus* $\mathfrak{T}_a \neq 0$ *und* $R - \mathfrak{T}_a \neq 0$, *daß* $\mathfrak{B}_ä \neq 0$. (Denn z. B. aus $\mathfrak{B}_i = 0$ folgt $R = \mathfrak{T}_0 + (R - \mathfrak{T}_{0a})$, weil $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_{0a}$, also $\mathfrak{T}_0 = 0$ oder $R - \mathfrak{T}_0 = 0$).

1.1.3.3. *Folgende Aussagen sind gleichwertig:* $(i, 1)$ $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_i$; $(i, 2)$ $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}$; $(i, 3)$ $\mathfrak{T}_a = \mathfrak{T}_{0a}$; und entsprechend $(ä, 1)$ $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_ä$; $(ä, 2)$ $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_ä$; $(ä, 3)$ $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_{a0}$.

6a Nämlich ein Kuratowski-topologischer Raum. Vgl. z. B. Haupt-Aumann-Pauc, a. a. O.[6] Nr. 6. 2. 1. ff.

Bew. Die Gleichwertigkeit von $(i, 1)$ und $(i, 2)$ folgt aus $\mathfrak{B}_i \subset \mathfrak{B}$ (Nr. 1.1.3.1.) die von $(i, 2)$ und $(i, 3)$, weil $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{T}_{0a} - \mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}_a - \mathfrak{T}_0$, also aus $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}$ sich ergibt $\mathfrak{B}_i + \mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_{0a} = \mathfrak{B} + \mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_a$ und umgekehrt. Entsprechend für $(\ddot{a}, 1)$ usw.

Anmerkung. Die Gleichungen $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\ddot{a}}$ sind unabhängig voneinander. Beispiele: (a) $R = E_1$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{J}' + \mathfrak{J}''$ mit $\mathfrak{J}' = [-1, 0)$ und $\mathfrak{J}'' = (0, 1]$, wobei dann $\mathfrak{T}_a = \mathfrak{T}_{0a}$ und $\mathfrak{T}_0 \neq \mathfrak{T}_{a0}$. — (b) $R = E_1$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{J}' + (2)$, wobei $\mathfrak{J}' = [0, 1)$ und (2) die einpunktige, 2 enthaltende Menge ist. Hier gilt $\mathfrak{T}_a \neq \mathfrak{T}_{0a}$ und $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_{a0}$.

1.1.3.4. *Es ist* $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}$, *wenn und nur wenn* $\mathfrak{B}$ *die Menge aller zu* $\mathfrak{T}_0$ *fremden Häufungspunkte von* $\mathfrak{T}_0$ *ist.* (Denn es ist $\mathfrak{B}_i$ die Menge der nicht zu $\mathfrak{T}_0$ gehörigen Berühr- (also Häufungs-) Punkte von $\mathfrak{T}_0$). Entsprechend ergibt sich:

Es ist $\mathfrak{B}_{\ddot{a}} = \mathfrak{B}$, *wenn und nur wenn* $\mathfrak{B}$ *die Menge der nicht zu* $R - \mathfrak{T}_a$ *gehörigen Häufungspunkte von* $R - \mathfrak{T}_a$ *ist.*

1.1.3.5. Es heiße $\mathfrak{T}$ *eigentlich minimal begrenzt* von innen bzw. von außen her, wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_i \neq 0$ bzw. wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\ddot{a}} \neq 0$. Ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}_{\ddot{a}} \neq 0$, so heiße $\mathfrak{T}$ eigentlich minimal begrenzt. Aus Nr. 1.1.3.4. folgt:

Es ist $\mathfrak{T}$ *eigentlich minimal begrenzt, dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{B}_i \neq 0$, $\mathfrak{B}_{\ddot{a}} \neq 0$ *und jeder Begrenzungspunkt von* $\mathfrak{T}$ *Häufungspunkt gleichzeitig von inneren und von äußeren Punkten von* $\mathfrak{T}$ *ist* (d. h. von $\mathfrak{T}_0 \neq 0$ und $R - \mathfrak{T}_a \neq 0$).

Mit $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{N}$ *ist auch* $\mathfrak{D} = \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ *eigentlich minimal begrenzt, falls* $\mathfrak{N}_a \subset \mathfrak{M}_0$ *und* $\mathfrak{M}_0 - \mathfrak{N}_a \neq 0$. (Denn $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{M}_0 - \mathfrak{N}_a$, $\mathfrak{D}_{0a} = \mathfrak{M}_{0a} - \mathfrak{N}_{a0} = \mathfrak{M}_a - \mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{D}_a = \mathfrak{M}_a - \mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{D}_{a0} = \mathfrak{M}_{a0} - \mathfrak{N}_{0a} = \mathfrak{M}_0 - \mathfrak{N}_a$; ferner ist $\mathfrak{D}_a - \mathfrak{D}_0 = (\mathfrak{M}_a - \mathfrak{N}_0) - (\mathfrak{M}_0 - \mathfrak{N}_a) = (\mathfrak{D}_a - \mathfrak{D}_{a0} = \mathfrak{D}_{0a} - \mathfrak{D}_0) = (\mathfrak{M}_a - \mathfrak{M}_0) + (\mathfrak{N}_a - \mathfrak{N}_0) = (\mathfrak{M}_{0a} - \mathfrak{M}_0) + (\mathfrak{N}_{0a} - \mathfrak{N}_0) \neq 0$).

Zusatz. Die Bezeichnung „eigentlich minimal begrenzt" ist im Anschluß an eine mir von Herrn G. Aumann mitgeteilte Begriffsbildung gewählt: Es heißt $\mathfrak{M}$ *minimal begrenzt*, wenn eine offene Teil- und eine abgeschlossene Obermenge, etwa $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{A}$, von $\mathfrak{M}$ existiert mit $\mathfrak{G}_a = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{G}$. Notwendig und hinreichend für minimale Begrenztheit ist: $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_{a0}$ und $\mathfrak{M}_a = \mathfrak{M}_{0a}$.

1.1.3.6. *Im euklidischen Raum E_k, $k \geq 1$, ist eine beschränkte Menge $\mathfrak{T}$ mit nicht leerem offenem Kern eigentlich minimal begrenzt, wenn und nur wenn jeder Begrenzungspunkt von $\mathfrak{T}$ Häufungspunkt gleichzeitig von inneren und von äußeren Punkten von $\mathfrak{T}$ ist.* (Denn mit $\mathfrak{T}$ ist auch $\mathfrak{T}_a$ beschränkt, also $E_k - \mathfrak{T}_a \neq 0$. Da aber E_k zusammenhängend ist, folgt die Beh. aus Nr. 1.1.3.5. wegen Nr. 1.1.3.2.).

1.2. ***Bemerkung.*** Vor. Es sei $Y' = r'X'$ und $Y'' = r''X''$, mit $X' \neq X''$, $|X'| = |X''| = 1$ und $0 < r'$, $0 < r''$. Wir bezeichnen: Mit β bzw. γ den Winkel im Dreieck $0X'X''$ in der Ecke 0 bzw. X'; mit δ den (absolut) kleinsten Winkel, gebildet von den Trägergeraden der Vektoren $(X' - X'')$ und $(Y' - Y'')$.

Beh. Es gilt $(r' + r'') \cos \gamma = |Y' - Y''| \cos \delta$ und (folglich)

$$0 < \operatorname{Min}(r', r'') \leq (|Y' - Y''| : |X' - X''|) \cos \delta = \\ = 2^{-1}(r' + r'') \leq \operatorname{Max}(r', r'').$$

Bew. Es ist $2\gamma = \pi - \beta$ und $|X' - X''| = 2 \cos \gamma$. Ferner gilt

$$|(Y' - Y'')(X' - X'')| = |(r'X' - r''X'')(X' - X'')| =$$

$(r' + r'')(1 - \cos \beta) = 2^{-1}(r' + r'')\,|X' - X''|^2$; andererseits ist $|(Y' - Y'')(X' - X'')| = |Y' - Y''| \cdot |X' - X''| \cos \delta$.

1.3. Wir zeigen jetzt

1. ***Satz.*** Vor. *Es sei $\mathfrak{K}$ abgeschlossen sowie kompakt im E_k; und es sei 0 innerer Punkt von $\mathfrak{K}$. Ferner sei $\mathfrak{S}$ die $(k-1)$-dimensionale Sphäre vom Radius 1 um 0 als Zentrum ($k \geqq 1$).*

Beh. *Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

(**A**) *Der Rand $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{K}$ ist vermöge Zentralprojektion $Y = s(X_e) = r(X_e)X_e$ aus 0 ein-eindeutiges dehnungsbeschränktes Bild von $\mathfrak{S}$ ($X_e \in \mathfrak{S}$, $Y \in \mathfrak{R}(\mathfrak{K})$).*

(**B**) *Es ist $\mathfrak{K}$ eigentlich minimal begrenzt, ferner ist der Rand $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{K}$ zusammenhängend und 0 ist fremd zum Paratingent von $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$.*

Zusatz. Aus (A) (und der Vor. des Satzes) folgt: Es besitzt $r(X_e) > 0$ eine positive untere und obere Schranke ($< +\infty$).

Ferner ist die Umkehrung der Zentralprojektion ebenfalls dehnungsbeschränkt (vgl. Nr. 2, Satz, Zusatz).

Bew. Der Satz gilt, wenn für die Sphäre vom Radius 1 um o, so auch für die Sphäre vom beliebigen Radius; und umgekehrt. Daher kann o. B. d. A. $\mathfrak{S} \subset \underline{\mathfrak{K}}$ angenommen werden.

(I) Aus (A) folgt (B). – (**I, 1**). Da $\mathfrak{K}$ beschränkt und $o \in \mathfrak{S} \subset \underline{\mathfrak{K}}$ ist, gibt es von X_e unabhängige Konstanten ρ', ρ'' mit $0 < \rho' \leq r(X_e) \leq \rho'' < +\infty$ für jedes X_e. Außerdem ist $s(X_e)$, weil dehnungsbeschränkt, (gleichmäßig) stetig auf $\mathfrak{S}$. Da s eineindeutig und $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ ein in sich kompakter T_1-Raum bzw. ein punktweise rationaler Hausdorffraum ist, so ist auch die Umkehrfunktion $X_e = \bar{s}(Y)$ von $Y = s(X_e)$ stetig.[8] – (**I, 2.**) Weil $s(X_e)$ stetig und $\mathfrak{S}$ zusammenhängend, ist *auch* $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}) = s(\mathfrak{S})$ *zusammenhängend.*[9] – (**I, 3.**) *Es ist* o *fremd zum Paratingent von* $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$. Andernfalls nämlich geht durch o eine freie Tangente von $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$, d. h. es gibt Punkte Y'_τ, Y''_τ, $Y_0 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{K})$, $\tau = 1, 2, \ldots$, mit $Y'_\tau \neq Y''_\tau$ und mit $Y'_\tau \to Y_0$, $Y''_\tau \to Y_0$ für $\tau \to \infty$ derart, daß die Verbindungsgerade von Y'_τ und Y''_τ gegen eine Gerade durch o, nämlich gegen die Trägergerade des Vektors Y_0 konvergiert. Setzt man $X'_\tau = \bar{s}(Y'_\tau)$, $X''_\tau = \bar{s}(Y''_\tau)$, $X_0 = \bar{s}(Y_0)$, wobei also $|X'_\tau| = 1$ usw., so folgt aus der Stetigkeit von $\bar{s}(Y)$, daß $X'_\tau \to X_0$, $X''_\tau \to X_0$. Haben ferner β_τ und δ_τ die in Nr. 1.2. festgelegte Bedeutung, wenn $X' = X'_\tau$, $Y' = Y'_\tau$ usw. und wobei $2\delta_\tau = \pi$ gesetzt wird, falls $X'_\tau = X''_\tau$, so gilt also $\beta_\tau \to 0$ und $2\delta_\tau \to \pi$ für $\tau \to \infty$. Setzt man schließlich $r'_\tau = r(X'_\tau)$, $r''_\tau = r(X''_\tau)$ und beachtet, daß (vgl. Ziff. (I, 1))

$$0 < \rho' \leq \operatorname{Min}(r'_\tau,\ r''_\tau) \leq \operatorname{Max}(r'_\tau,\ r''_\tau) \leq \rho'',$$

so folgt aus der Beh. in Nr. 1.2., daß $D(s; X', X'') \to +\infty$ für $\tau \to \infty$. Widerspruch zu (A). – (**I, 4.**) *Es ist* $\mathfrak{K}$ *eigentlich minimal begrenzt.* In der Tat: Nach (A) ist[9a] $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$ einpunktig für jedes $\mathfrak{H}$ und für $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{K})$; es sei $Y \in \mathfrak{H}\mathfrak{R}$. Dann liegt die offene, von o und Y begrenzte Strecke o Y ganz im Innern von $\mathfrak{K}$; denn o Y

---

[8] Vgl. Haupt-Aumann-Pauc, a. a. O.[6] Nr. 6. 3. 3, Satz 4.

[9] Vgl. Haupt-Aumann-Pauc, a. a. O.[6], Nr. 6. 3. 3, Satz 6.

[9a] Unter $\mathfrak{H}$, und ebenso später unter $\mathfrak{H}_0$, wird eine Halbgerade mit dem Anfangspunkt o verstanden.

ist fremd zu $\mathfrak{R}$ und enthält innere Punkte von $\mathfrak{K}$, nämlich Nachbarpunkte von o; würde aber oY auch äußere Punkte von $\mathfrak{K}$ enthalten, so wäre oY Vereinigung zweier fremder, offener Teile, nämlich des Durchschnittes von oY mit dem Innern und dem Äußeren von $\mathfrak{K}$, im Widerspruch damit, daß oY zusammenhängend ist. Somit ist $Y \in \mathfrak{H}\mathfrak{R}$ Häufungspunkt von $\underline{\mathfrak{K}}$. Entsprechend ergibt sich, daß Y auch Häufungspunkt von $\underline{\mathfrak{A}} = E_k - \mathfrak{K}$ ist. Und da $\mathfrak{H}$ beliebig war, gilt dies für jeden Randpunkt von $\mathfrak{K}$, d. h. $\mathfrak{K}$ ist eigentlich minimal begrenzt.

(**II**) Aus (B) folgt (A). Es sei wieder $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ gesetzt. Zum Beweise zeigen wir der Reihe nach:

(**II, 1.**) *Für jedes* $\mathfrak{H}$ *ist*[9a] $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$ *nicht leer, endlich und von beschränkter Mächtigkeit* $m(\mathfrak{H})$, d. h. es existiert eine natürliche, von $\mathfrak{H}$ unabhängige Zahl $\overline{m}$ mit $1 \leq m(\mathfrak{H}) \leq \overline{m}$ für jedes $\mathfrak{H}$.

Bew. (**a**) Es ist $\mathfrak{H}\mathfrak{R} \neq$ o für jedes $\mathfrak{H}$. In der Tat: Auf $\mathfrak{H}$ liegen sowohl äußere Punkte von $\mathfrak{K}$ (weil $\mathfrak{K}$ beschränkt ist) als innere Punkte von $\mathfrak{K}$ (weil o innerer Punkt ist). Da $\mathfrak{H}$ zusammenhängend ist, folgt $\mathfrak{H}\mathfrak{R} \neq$ o (vgl. Ziff. (I, 4)). – Es ist $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$ isolierte Menge in $\mathfrak{H}$ für jedes $\mathfrak{H}$. Ist nämlich $Y \in \mathfrak{H}$ Häufungspunkt von $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$, so ist $Y \in \mathfrak{H}\mathfrak{R}$ und es existiert in $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$ eine Folge von (untereinander und von) Y verschiedenen Punkten Y'_τ mit $Y'_\tau \to Y$ für $\tau \to \infty$. Setzt man $Y''_\tau = Y \in \mathfrak{H}\mathfrak{R}$, so erweist sich $\mathfrak{H}$ oder vielmehr ihre Trägergerade als freie Tangente an $\mathfrak{R}$ in Y, die durch o geht; Widerspruch mit (B). – (**b**) Da ($\mathfrak{K}$ also auch) $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$ in sich kompakt und in $\mathfrak{H}$ isoliert ist, muß die Mächtigkeit $m(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$ für jedes $\mathfrak{H}$ eine natürliche Zahl sein. Ist $m(\mathfrak{H})$ auf dem System aller $\mathfrak{H}$ nicht beschränkt, so existiert eine Folge von Halbgeraden $\mathfrak{H}_\tau$ derart, daß $m_\tau = m(\mathfrak{H}_\tau) \to \infty$ für $\tau \to \infty$. Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{S}$ in sich kann angenommen werden, daß die $\mathfrak{H}_\tau$ gegen eine Halbgerade $\mathfrak{H}_0$ konvergieren in dem Sinne, daß die den $\mathfrak{H}_\tau$ eineindeutig entsprechenden Einheitsvektoren X_τ (die parallel und gleichgerichtet mit $\mathfrak{H}$ sind) gegen den zu $\mathfrak{H}_0$ gehörigen Vektor X_0 konvergieren. Wegen der Beschränktheit von $\mathfrak{R}$ (im E_k) und wegen $m_\tau \to \infty$ gibt es für jedes τ zwei verschiedene Punkte Y'_τ, $Y''_\tau \in \mathfrak{H}_\tau \mathfrak{R}$ derart, daß $|Y'_\tau - Y''_\tau| \to$ o für $\tau \to \infty$. Weil $\mathfrak{R}$ in sich kompakt ist, kann o. B. d. A. die Existenz eines Punktes

$Y \in \mathfrak{H}_0 \mathfrak{R}$ angenommen werden mit $Y'_\tau \to Y$ und $Y''_\tau \to Y$. Dann ist aber die Trägergerade von $\mathfrak{H}_0$ freie Tangente an $\mathfrak{R}$ in Y und geht durch o; Widerspruch mit (B).

(**II, 2**) *Der Abstand irgend zweier Punkte der Menge* $(o) + \mathfrak{H}\mathfrak{R}$ *besitzt eine von* $\mathfrak{H}$ *unabhängige positive untere Schranke* $\alpha > 0$.

Bew. Ist Y', $Y'' \in \mathfrak{H}\mathfrak{R}$, so ergibt sich die Beh. indirekt vermittelst der gleichen Schlußweise, wie sie in Ziff. (II, 1) (b) angewandt wurde. Ist aber $Y' \in \mathfrak{H}\mathfrak{R}$, $Y'' = 0$, so folgt die Beh. daraus, daß $\mathfrak{R}$ in sich kompakt und fremd zu (o) ist.

(**II, 3**) *Ist*[9a] $Y_0 \in \mathfrak{H}_0 \mathfrak{R}$, *so gibt es eine Umgebung* $\mathfrak{U}^*$ *von* Y_0 *in* E_k *derart, daß* $\mathfrak{H}\mathfrak{R}\mathfrak{U}^*$ *genau einpunktig ist für jedes zu* $\mathfrak{U}^*$ *nicht fremde* $\mathfrak{H}$.

Bew. (**a**) Da $\mathfrak{H}_0 \mathfrak{R}$ isoliert ist auf $\mathfrak{H}_0$, so gehört je eine vordere und hintere Umgebung von Y_0 in $\mathfrak{H}_0$ bis auf Y_0 zu $\underline{\mathfrak{K}}$ oder zu $\underline{\mathfrak{A}} = E_k - \mathfrak{K}$. Ist daher $\mathfrak{U}$ eine (k-dimensionale) Kugel um Y_0 mit einem Durchmesser kleiner als α (Ziff. (II, 2)), so gibt es auf $\mathfrak{H}_0$ vor und hinter Y_0 einen Punkt Y' bzw. Y'' und eine, Y_0 nicht enthaltende, in $\mathfrak{U}$ enthaltene (k-dimensionale) abgeschlossene Kugel $\mathfrak{U}'$ bzw. $\mathfrak{U}''$ mit dem Zentrum Y' bzw. Y'' derart, daß $\mathfrak{U}' \subset \underline{\mathfrak{K}}$ oder $\mathfrak{U}' \subset \underline{\mathfrak{A}}$ bzw. $\mathfrak{U}'' \subset \underline{\mathfrak{K}}$ oder $\mathfrak{U}'' \subset \underline{\mathfrak{A}}$. Es ist $\mathfrak{U}'\mathfrak{U}'' = 0$. Und es kann o. B. d. A. angenommen werden, daß aus $\mathfrak{U}'\mathfrak{H} \neq 0$ folgt $\mathfrak{U}''\mathfrak{H} \neq 0$ und umgekehrt. – (**b**) Es liegen $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{U}''$ nicht beide in $\underline{\mathfrak{K}}$ und nicht beide in $\underline{\mathfrak{A}}$. Es sei nämlich z. B. $\mathfrak{U}' \subset \underline{\mathfrak{A}}$ *und* $\mathfrak{U}'' \subset \underline{\mathfrak{A}}$. Gemäß Beh. (B) und Nr. 1.1.3.6. ist nun aber $Y_0 \in \mathfrak{R}$ Häufungspunkt von $\underline{\mathfrak{K}}$; und daher gibt es eine Folge (k-dimensionaler) abgeschlossener Kugeln $\mathfrak{B}_\tau \subset \underline{\mathfrak{K}}$, die schließlich alle in beliebig kleiner Umgebung $\mathfrak{W}$ von Y_0 liegen. Da $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{U}''$ zu Y_0 fremd sowie abgeschlossen sind, kann $\overline{\mathfrak{W}}$ als eine (k-dimensionale) abgeschlossene, zu $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{U}''$ fremde Kugel mit Y_0 als Zentrum gewählt werden; dabei kann $\mathfrak{W}$ noch so angenommen werden, daß $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{U}$ enthalten und daß jedes zu $\mathfrak{W}$ nicht fremde $\mathfrak{H}$ auch nicht fremd ist zu $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{U}''$. Daher gibt es ein $\mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{B}$ und dazu ein $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}\mathfrak{B} \neq 0$, also mit $\mathfrak{H}\mathfrak{B} \subset \mathfrak{W}\underline{\mathfrak{K}}$. Auf der Strecke $\mathfrak{H}\mathfrak{U}$ liegt dann zwischen den beiden, zu $\underline{\mathfrak{A}}$ gehörigen Strecken $\mathfrak{H}\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{H}\mathfrak{U}''$ die zu $\underline{\mathfrak{K}}$ gehörige Strecke $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$. Da nun zwischen einem Punkt von $\underline{\mathfrak{K}}$ und einem Punkt von $\underline{\mathfrak{A}}$ auf $\mathfrak{H}$ mindestens ein Punkt von $\mathfrak{R}$

liegt (vgl. Ziff. (I, 4)), so ist $\mathfrak{H}\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ mindestens zweipunktig. Andererseits kann $\mathfrak{H}\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ nur einpunktig sein, da der Durchmesser von $\mathfrak{U}$ kleiner als α gewählt war. Widerspruch. Ebenso schließt man im Falle $\mathfrak{U}' \subset \underline{\mathfrak{K}}$, $\mathfrak{U}'' \subset \underline{\mathfrak{K}}$. – (**c**) Zufolge (b) ist also z. B. $\mathfrak{U}' \subset \underline{\mathfrak{K}}$ und $\mathfrak{U}'' \subset \underline{\mathfrak{A}}$. Dann zeigt der in (b) angewandte Schluß, daß für jedes $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}\mathfrak{U}' \neq 0$ (also mit $\mathfrak{H}\mathfrak{U}'' \neq 0$) zugleich $\mathfrak{H}\mathfrak{R}\mathfrak{U} \neq 0$ ist, und zwar genau einpunktig. Ersetzt man $\mathfrak{U}$ durch den offenen Kern des Durchschnittes von $\mathfrak{U}$ mit der konvexen Hülle von $\mathfrak{U}' \cup \mathfrak{U}''$, so erhält man eine Umgebung $\mathfrak{U}^*$ von Y_0 von der in der Beh. dieser Ziff. (II, 3) beschriebenen Art.

(**II, 4**) *Für jedes $\mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$ genau einpunktig, so daß durch die Zentralprojektion aus* o *von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{R}$ eine ein-eindeutige Abbildung $Y = r(X)X, X = X_e \in \mathfrak{S}, r(X) > 0$ erklärt ist. Diese Abbildung ist sogar dehnungsbeschränkt.*

Bew. (**a**) Die Halbgeraden $\mathfrak{H}$ und die Punkte X von $\mathfrak{S}$ entsprechen einander ein-eindeutig; es sind also $X = X(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(X)$ eindeutige Funktionen ($X \in \mathfrak{S}$, d. h. $|X| = 1$). Es sei nun $Y = s(X_e) = r(X_e)X_e$ der zu o nächstgelegene unter den höchstens $\overline{m}$-Punkten von $\mathfrak{H}\mathfrak{R}(\neq 0)$ (vgl. (II, 1)). Dann liefert $Y = s(X_e)$ eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf eine Teilmenge $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$. Gemäß (II, 2) besitzt ferner $r(X_e)$ eine positive untere (und obere) Schranke: $0 < a \leq \rho' \leq r(X_e) \leq \rho'' < +\infty$.

(**b**) Gemäß (II, 3) ist $s(X_e)$ *stetige* Funktion von X_e (im Sinne der Topologie im E_h). Da $\mathfrak{S}$ in sich kompakt und T_1-Raum, ferner $\mathfrak{R}$ rationaler Hausdorffraum ist, so ist $\mathfrak{R}' = s(\mathfrak{S})$ (*abgeschlossen, also*) *in sich kompakt*;[8] außerdem ist die Umkehrungsabbildung $X_e = \mathfrak{z}(Y)$ der ein-eindeutigen stetigen Abbildung $Y = s(X_e)$ ebenfalls stetig.[8] Ferner ist mit $\mathfrak{S}$ *auch* $\mathfrak{R}'$ *zusammenhängend*.[9]

(**c**) *Ist $\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}' = \mathfrak{R} - s(\mathfrak{S})$ nicht leer, so haben $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ positiven Abstand* $\alpha' > 0$ ($\mathfrak{R}' \neq 0$). Andernfalls nämlich existieren $Y'_\tau \in \mathfrak{R}'$, $Y''_\tau \in \mathfrak{R}''$, $\tau = 1, 2, \ldots$, mit $|Y'_\tau - Y''_\tau| \to 0$ für $\tau \to \infty$. Wegen der Kompaktheit in sich von $\mathfrak{R}'$ (gemäß (b)) kann die Existenz eines $Y_0 \in \mathfrak{R}'$ angenommen werden mit $Y'_\tau \to Y_0$, also auch $Y''_\tau \to Y_0$ für $\tau \to \infty$. Ist ferner $X'_\tau = \mathfrak{z}(Y'_\tau)$, so gilt $X'_\tau \to X_0 = \mathfrak{z}(Y_0)$ wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{z}$ (vgl. (b)).

Liegt Y''_τ auf $\mathfrak{H}''_\tau$, so ist $X''_\tau = \mathfrak{H}''_\tau \mathfrak{S}$ eindeutig bestimmt; wegen $Y''_\tau \to Y_0$ ist dann $X''_\tau \to X_0$. Wir setzen nun $Y_\tau = s(X''_\tau)$. Wegen $Y_\tau \in \mathfrak{R}'$ und $Y''_\tau \in \mathfrak{R}''$ ist $Y''_\tau \neq Y_\tau$, beide liegen auf dem gleichen $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}''_\tau$. Ferner ist $|Y''_\tau - Y_\tau| \to 0$; denn, neben $Y''_\tau \to Y_0$ ist auch $Y_\tau \to Y_0$, letzteres wegen $X''_\tau \to X_0$ und wegen der Stetigkeit von $s(X_e)$. Für schließlich alle τ wird also $|Y''_\tau - Y_\tau| < \alpha$ im Widerspruch mit dem in (II, 2) Bewiesenen.

(**d**) *Es ist* $\mathfrak{R}'' = 0$. Nämlich: Da $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ abgeschlossen ist (gemäß (b)) folgt aus (c), daß auch $\mathfrak{R}''$ abgeschlossen ist; ev. ist $\mathfrak{R}'' = 0$. Somit ist $\mathfrak{R}$ Vereinigung zweier fremder abgeschlossener Teile $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, wobei $\mathfrak{R}' \neq 0$. Weil R zusammenhängend ist, folgt daher $\mathfrak{R}'' = 0$.

(**e**) *Es ist* $s(X_e)$ *dehnungsbeschränkt.* Nämlich: Wegen $\mathfrak{R}'' = 0$ ist $\mathfrak{R}$ ein-eindeutiges, stetiges Bild von $\mathfrak{S}$ vermöge $Y = r(X)\,X = s(X)$ mit $X = X_e \in \mathfrak{S}$, wobei $0 < \rho' \leq r(X) \leq \rho'' < +\infty$. Für $r' = r(X')$, $r'' = r(X'')$, $Y' = r'X'$ usw. sind nun die Vor. von Nr. 1. 2. erfüllt; daher gilt $0 < \rho' \leq (|Y' - Y''| : |X' - X''|)$ $\cos\delta \leq \rho''$, wobei $\cos\delta > 0$ falls $X' \neq X''$. Mithin ist $Y = s(X_e)$ dehnungsbeschränkt genau dann, wenn $i = \inf\,(\cos\delta;\ X', X'' \in \mathfrak{S};\ X' \neq X'') > 0$. Wir zeigen, daß $i = 0$ nicht eintritt. In der Tat: Aus $i = 0$ folgt die Existenz von X'_τ, $X''_\tau \in \mathfrak{S}$, $\tau = 1, 2, \ldots$, mit $X'_\tau \neq X''_\tau$ und $\cos\delta_\tau \to 0$ für $\tau \to \infty$; dabei kann o. B. d. A. angenommen werden, daß $X'_\tau \to X' \in \mathfrak{S}$ und $X''_\tau \to X'' \in \mathfrak{S}$. Nun ist $(r(X'_\tau) + r(X''_\tau))\cos\gamma_\tau = |Y'_\tau - Y''_\tau|$ $\cos\delta_\tau$, wobei $Y'_\tau = r(X'_\tau)\,X'_\tau$, $Y''_\tau = r(X''_\tau)\,X''_\tau$; wegen $2\rho' \leq r(X'_\tau) + r(X''_\tau) \leq 2\rho''$ und $|Y'_\tau - Y''_\tau| \leq 2\rho''$ folgt $\cos\gamma_\tau \to 0$, also $|X'_\tau - X''_\tau| \to 0$, d. h. $X' = X'' = X_0$. Wegen der Stetigkeit von $s(X)$ folgt $Y'_\tau \to Y_0 = s(X_0)$, $Y''_\tau \to Y_0$. Zusammen mit $\cos\delta_\tau \to 0$ besagt dies, daß der Limes der Verbindungsgeraden von Y'_τ, $Y''_\tau \in \mathfrak{R}$ (existiert und) die Verbindungsgerade der Punkt 0 und X_0 ist; dieser Limes ist aber freie Tangente von $\mathfrak{R}$ und geht durch 0. Widerspruch mit (B). – Damit ist $s(X)$ als dehnungsbeschränkt nachgewiesen und (A) aus (B) gefolgert.

Der 1. Satz läßt sich noch ergänzen:

1a. *Satz.* Vor. *wie in Satz* 1.

Beh. *Mit den Aussagen* (**A**) *und* (**B**) *des* 1. *Satzes ist gleichwertig die folgende.*

(C) *Es ist $\mathfrak{K}$ sternig*[1] *bezüglich* o *und das Paratingent von* $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ *ist fremd zu* o.

Bew. Aus (A) und (B) folgt leicht (C). Daß umgekehrt (A) aus (C) folgt, kann mit Hilfe der im Beweise des 1. Satzes benützten Überlegungen gezeigt werden.

Folgerung. Ist $\mathfrak{K}$ eine beschränkte abgeschlossene konvexe Punktmenge im E_k mit nicht leerem offenem Kern $\underline{\mathfrak{K}}$ und ist o ein Punkt aus $\underline{\mathfrak{K}}$, so projiziert sich der Rand $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{K}$ ein-eindeutig und dehnungsbeschränkt aus o auf die (Einheits-)Sphäre um o.

Bew. Jedenfalls ist $\mathfrak{K}$ sternig bezüglich o. Weiter hat (wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$) jede Gerade g, die eine hinreichend kleine Umgebung $\mathfrak{U}$ von o trifft, mit $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ genau zwei Punkte gemeinsam, deren Abstand größer ist als eine (zwar von $\mathfrak{U}$ aber) nicht von g abhängige *positive* Zahl. Daher ist das Paratingent von $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ fremd zu o. Aus Satz 1a. und 1. folgt die Beh.

§ 2. *Dehnungsbeschränkte homothetische Abbildungen in Hilbertschen Räumen*

Aus der in § 1 betrachteten ein-eindeutigen dehnungsbeschränkten Zentralprojektion $Y = s(X_e) = r(X_e)X_e$ der Sphäre $\mathfrak{S}$ auf den Rand $\mathfrak{R}$ der Menge $\mathfrak{K}$ im E_k erhält man (vgl. den Satz weiter unten) durch die in allen Richtungen homothetische Erweiterung $Z = h(X) = r(X_e)X$, $|X| \leq 1$, eine ebenfalls ein-eindeutige, dehnungsbeschränkte Abbildung der von $\mathfrak{S}$ berandeten Vollkugel $\mathfrak{C} \subset E_k$ auf $\mathfrak{K}$. Wir werden sogar zeigen, daß die Dehnungsbeschränktheiten von $r(X_e)$, $s(X_e)$ und $h(x)$ sowie der Umkehrungen von $s(X)$ und $h(X)$ sich gegenseitig bedingen.

Im Gegensatz zu den Betrachtungen in § 1 gelten die nachfolgenden Behauptungen nicht nur für den E_k, sondern für reelle *Hilbertsche Räume H* im verallgemeinerten Sinne; das sind[10] lineare Räume (Vektorräume), für deren Vektorpaare X, Y ein skala-

[10] Vgl. B. Sz.-Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgebiete (Berlin 1942), S. 3.

res Produkt XY erklärt ist, d. h. eine reelle, endliche in X und Y symmetrische, sowie in jedem der Faktoren X, Y lineare Funktion von X und Y. Setzt man noch $|X| = +\sqrt{XX}$, so gelten für XY und $|X|$ bekanntlich[10] alle Rechenregeln wie im E_k; insbesondere gilt die Dreiecksungleichung $|X+Y| \leq |X| + |Y|$.

Der angekündigte Satz lautet nun

Satz. Vor. *Es sei H ein allgemeiner Hilbertscher Raum. Ferner sei $r(X_e)$ eine auf der Einheitssphäre $\mathfrak{S}$ (d. h. für alle $X_e \in H$ mit $|X_e| = 1$) erklärte eindeutige reelle beschränkte Funktion mit positiver unterer Schranke (d. h. es existieren ρ', ρ'' mit $0 < \rho' \leq r(X) \leq \rho'' < +\infty$ für jedes $X \in \mathfrak{S}$).*

Beh. (**A**) *Aus der Dehnungsbeschränktheit (mindestens) einer der folgenden vier Abbildungen folgt*[11] *die Dehnungsbeschränktheit aller übrigen, nämlich der Abbildungen:*

(I) $r = r(X_e)$ *und* (II) $r^* = 1 : r(X_e)$ *der Sphäre* $\mathfrak{S} \subset H$ *in die reelle Zahlgerade* E_1;

(III) $Y = s(X_e) = r(X_e)X_e$ *der Sphäre* $\mathfrak{S} \subset H$ *auf die Menge* $\mathfrak{R} \subset H$ *der Punkte* Y;

(IV) $Z = h(X) = r(X_e)X$ *mit* $X = |X| X_e$ *der Einheitskugel* $\mathfrak{C} \subset H$, *also* $|X| \leq 1$, *auf die Menge* $\mathfrak{K} \subset H$ *der Punkte* Z.

(**B**) *Ist ζ Dehnungsschranke von $r(X_e)$, so ist $\tau = (\rho')^2 : (\zeta + \rho')$ bzw. $\omega = \zeta + \rho''$ eine untere*[12] *bzw. obere Dehnungsschranke für $h(X)$, also*

$$0 < \tau \leq |h(X') - h(X'')| : |X' - X''| \leq \omega$$
$$\text{für beliebige } X',\ X'' \in \mathfrak{C} \text{ mit } X' \neq X''.$$

Zusatz.[12] Es ist $Y = s(X)$ und $Z = h(X)$ umkehrbar eindeutig. Die Dehnungsbeschränktheit von s bzw. h und ihrer Umkehrung bedingen sich gegenseitig.

Bew. Wir setzen: $r = r(X_e)$, $s = s(X_e)$ usw. Für $\varphi = r, r^{-1}, s, h$ sei $\varphi(X') = \varphi'$, $\varphi(X'') = \varphi''$ und $D(\varphi) = D(\varphi; X', X'') = |\varphi' - \varphi''| : |X' - X''|$, $X' \neq X''$.

[11] In M.[3] war lediglich aus der Dehnungsbeschränktheit von s auf die von r und von h geschlossen worden.

[12] Vgl. St. Vincze-P. Szüsz, a. a. O.[4]

Betr. (A) Es genügt, zu zeigen: (A′) Die Dehnungsbeschränktheit von r ist gleichwertig mit der von r^{-1} und von s; sowie: (A″) Aus der Dehnungsbeschränktheit von r folgt die von h; denn umgekehrt ist mit h trivialerweise auch seine Verengerung s dehnungsbeschränkt.

Betr. (A′)

$$(1)\qquad D(r) \leq \zeta \rightarrow D(r^{-1}) \leq (1:\rho')^2\,\zeta \rightarrow D(r) \leq (\rho'':\rho')^2\,\zeta;$$

denn $D(r;\, X'_e,\, X''_e) = r'r''D(r^{-1};\, X'_e,\, X''_e)$.

$$(2)\qquad D(r) \leq \zeta \rightarrow D(s) \leq \zeta + \rho'' \rightarrow D(r) \leq \zeta + 2\rho'';$$

denn für $|X'| = 1$ ist $|r' - r''| = |(r'X' - r''X'') - r''(X' - X'')|$, also $|r'X' - r''X''| \leq |r' - r''| + r''\,|X' - X''|$ und $|r' - r''| \leq |r'X' - r''X''| + r''\,|X' - X''|$.

Betr. (A″) Wir zeigen: *Aus* $D(r) \leq \zeta$ *folgt* $D(h) \leq \zeta + \rho''$.[13] – Bew. Folgende Fälle erschöpfen im wesentlichen alle Möglichkeiten: (1″) $X' = 0 \rightarrow D(h) \leq \rho''$. – (2″) $|X'| = |X''| > 0 \rightarrow D(h) = D(s) \leq \zeta + \rho''$ (vgl. (A′) (2)). – (3″) $|X''| > |X'| > 0$ und $X'_e = X''_e \rightarrow D(h) \leq \rho''$, weil $r' = r''$. – (4″) $|X''| > |X'| > 0$ und $X'_e \neq X''_e \rightarrow D(h) < \zeta + \rho''$, wie unmittelbar aus den beiden Ungleichungen

$$(4'', 1)\qquad |X' - X''| > |X'_e - X''_e| \cdot |X'|$$

$$(4'', 2)\qquad |h' - h''| \leq |r' - r''| \cdot |X'| + r''\,|X' - X''|$$

zu entnehmen ist. (Bew. von (4″, 1): Für $q = |X''| : |X'|$ und $X'_e X''_e = \cos\beta$ gilt $q > 1$ und daher $|X' - X''|^2 = |X'|^2 + |X''|^2 - 2\,|X'|\cdot|X''|\cdot\cos\beta = ((q-1)^2 + 2q\,(1 - \cos\beta))\cdot|X'|^2 > 2\,(1 - \cos\beta)\cdot|X'|^2 = |X'_e - X''_e|^2 \cdot |X'|^2$. – Bew. von (4″, 2): $h' - h'' = (r'X' - r''X') + r''(X' - X'')$ und Dreiecksungleichung).

Betr. (B) und Zusatz. Die rechte Seite der Ungleichung in (B) ist identisch mit der beim Beweise von (A″) gewonnenen Ab-

[13] In M.[3] war bei der Abschätzung von $D(h)$ an Stelle der Dehnungsschranke ζ von r (vgl. St. Vincze-P. Szüsz, a. a. O.[4]) die Dehnungsschranke α von s verwendet worden, so daß in (A′) (2) sich $D(r) \leq \alpha + \rho''$ ergab und in (A″) (4″) sodann $D(h) \leq \alpha + 2\rho''$.

schätzung $D(h) \leq \zeta + \rho''$. Die linke Seite sowie der Zusatz ergeben sich so:[12] Aus $Z = h(X)$ folgt $Z_e = X_e$ bzw. $Z = 0$ für $X \neq 0$ bzw. $X = 0$; daher ist $X = (r(Z_e))^{-1} Z = h^*(Z)$, womit die Ein-eindeutigkeit von $Z = h(X)$ gezeigt ist. Mit r ist auch r^{-1} dehnungsbeschränkt (gemäß (A′)) und mit r^{-1} auch h^* (gemäß (A″)); und umgekehrt. Alles gilt entsprechend für $Y = s(X_e)$. Damit ist in Rücksicht auf (A) der Zusatz bewiesen. – Gemäß (A′) (1) ist $D(r^{-1}) \leq \zeta^* = (\rho')^{-2}\zeta$; ferner ist $r^{-1} \leq \omega^* = (\rho')^{-1}$ und daher $D(h^*) \leq \zeta^* + \omega^*$. Aber $D(h) = 1 : D(h^*)$. Daraus folgt die linke Seite der Ungleichung in (B).

Folgerung: Jeder *konvexe* Körper im E_k ist dehnungsbeschränktes Bild der Vollkugel vermöge einer in allen Richtungen homothetischen Abbildung $Z = h(X)$ aus einem *beliebigen* inneren Punkt o des Körpers.