Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1951

München 1952

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Variation von Kurvenintegralen über Linienelementfunktionen

Von Frank Löbell in München

Vorgelegt am 2. Februar 1951

In verschiedenartigen Zusammenhängen treten in der Differentialgeometrie Linienelementfunktionen auf, die auf einer gegebenen Fläche außer vom Ort noch von einer von diesem ausgehenden Tangentenrichtung abhängen.[1]

Es gibt Fälle, in denen das Kurvenintegral über eine solche Funktion Φ längs einer auf der Fläche zwischen den Punkten A und B verlaufenden Linie c von Bedeutung ist:

$$\int_c \Phi \, ds;$$

das Linienelement, von dem Φ abhängt, sei an jeder Stelle das des Integrationsweges.

1. Im folgenden werde die Aufgabe behandelt, nach dem Verfahren der natürlichen Differentialgeometrie die Änderungsgeschwindigkeit Δ eines solchen Integrales zu berechnen, die sich ergibt, wenn jeder Punkt $\mathfrak{r}$ der Kurve einer Variation von der Geschwindigkeit $\delta \mathfrak{r}$ in der Fläche unterworfen wird:[2]

$$\Delta = \delta \int_c \Phi \, ds.$$

---

[1] Siehe die Arbeit des Verfassers über Linienelementfunktionen und geodätische Ableitungen in der Flächentheorie, Math. Ann. 121 S. 427–445 (1950).

Die Arbeit enthält weitere Literaturangaben, die es ermöglichen sollen, die historische Entwicklung der Begriffe zu klären.

[2] Die erste Variation des Integrals könnte natürlich auch nach der üblichen Methode der Variationsrechnung ermittelt werden, wenn auf der Fläche ein Koordinatennetz u, v angenommen würde; Φ wäre dann als eine gegebene Funktion von u, v und $\frac{dv}{du}$ anzusehen. Man würde so aber zu Ergebnissen gelangen, die nur schwer geometrisch zu deuten wären.

Das Bogenelement ist, wenn wir den Einheitsvektor der in die Wegrichtung weisenden Tangente mit $\mathfrak{t}$ bezeichnen,

$$ds = \mathfrak{t}\, d\mathfrak{r}.$$

Wir wollen voraussetzen, daß alle vorkommenden Funktionen die an sie zu stellenden Anforderungen bezüglich Stetigkeit und Differenzierbarkeit erfüllen.

Zunächst finden wir

$$\Delta = \int_c (\delta\Phi\, ds + \Phi\, \delta ds).$$

Hier ist zu beachten, daß die Variation $\delta\Phi$ nicht schon durch die Fortschreitungsrichtung $\delta\mathfrak{r}$ allein bestimmt ist, sondern erst durch die Drehung, die das Argumentelement von Φ beim Fortgleiten erfährt, vollends definiert ist. Deshalb wollen wir die Bestimmung von $\delta\Phi$ auf die in einer früheren Arbeit[1] erklärte geodätische Ableitung der Funktion zurückführen; denn diese ist eindeutig durch die Differentiationsrichtung bestimmt. Dabei stützen wir uns auf die dort bewiesene Grundbeziehung

$$\frac{\delta}{ds} = \frac{d}{ds} - g\,\frac{\partial}{\partial\varphi};$$

$\frac{\delta}{ds}$ bedeutet hier die auf eine beliebige Linienelementfunktion anzuwendende geodätische Ableitung in einer die Fläche berührenden Richtung – d. h. die Ableitung nach der Bogenlänge in dieser Richtung unter der Annahme, daß das Argumentelement der Funktion eine infinitesimale Parallelverschiebung erleidet –, $\frac{d}{ds}$

[1] A. a. O. S. 431 f., wobei man besonders auch die auf die Gleichung (1) folgende Erklärung beachte.

(Es möge verziehen werden, wenn hier das Symbol δ in verschiedenen Bedeutungen gebraucht wird; die Gefahr von Verwechslungen liegt jedoch nicht vor, weil das Zeichen δ alleinstehend immer eine Variation ausdrückt, durch ein Bogenelement dividiert immer eine geodätische Differentiation.)

Wie die geodätische Ableitung einer bekannten Linienelementfunktion bei Zugrundelegung einer Parameterdarstellung der gegebenen Fläche berechnet werden kann, zeigen die Ausführungen in der Arbeit Zur Frage der Vertauschbarkeit geodätischer Richtungsableitungen in den Math. Ann. 122 S. 154 (1950), in Verbindung mit dem in Fußnote 12 auf S. 435 der anfangs zitierten Arbeit Gesagten.

die Ableitung der Funktion nach der Bogenlänge in dieser Richtung unter der Voraussetzung, daß das Linienelement einen konstanten Winkel mit einer die Differentiationsrichtung berührenden Kurve von der geodätischen Krümmung g bildet, und $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ die partielle Ableitung der Linienelementfunktion nach dem Richtungswinkel des Elementes, von dem sie abhängt.

Nun wird das Argumentelement von Φ bei der Variation $\delta\mathfrak{r}$ der Ausgangskurve c mit einer Drehgeschwindigkeit in der Berührebene befördert, die gleich dem Produkt des Betrags von $\delta\mathfrak{r}$ mit der geodätischen Krümmung derjenigen Kurve ist, die die Kurve c und die aus ihr durch die Variation hervorgehenden Linien in der Richtung $\delta\mathfrak{r}$ als isogonale Trajektorie überquert; diese Krümmungsgröße aber hat, wenn ϑ der Schnittwinkel ist, nach einem bekannten Satz[1] von Bonnet-Liouville den Wert

$$g = G \cos\vartheta + G^* \sin\vartheta,$$

wo G die geodätische Krümmung des Integrationsweges c und G^* die der Orthogonaltrajektorie dieser Kurve und ihrer Variierten durch den betrachteten Punkt bedeutet.

Die geodätische Ableitung von Φ in der Richtung $\delta\mathfrak{r}$ finden wir durch sinngemäße Anwendung einer ebenfalls schon früher bewiesenen Relation,[2] die die geodätische Ableitung nach irgendeiner Richtung $\delta\mathfrak{r}$ durch die geodätischen Ableitungen $\frac{\delta}{ds_1}$ und $\frac{\delta}{ds_2}$ nach zwei bestimmten Richtungen und deren Winkel ϑ und $\vartheta - \frac{\pi}{2}$ mit $\delta\mathfrak{r}$ ebenso ausdrückt, wie wenn es sich um die gewöhnlichen Richtungsableitungen einer reinen Ortsfunktion handelte, nämlich in der Form

$$\cos\vartheta \frac{\delta}{ds_1} + \sin\vartheta \frac{\delta}{ds_2}.$$

Nach diesen Überlegungen wird, wenn wir $|\delta\mathfrak{r}| = \rho$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \Phi_\varphi$ setzen, mit dem Zeichen $\frac{\delta}{ds^*}$ für die geodätische Ableitung in der zur Kurve c im positiven Sinn senkrechten Richtung

$$\delta\Phi = \rho\left(\frac{\delta\Phi}{ds}\cos\vartheta + \frac{\delta\Phi}{ds^*}\sin\vartheta + (G\cos\vartheta + G^*\sin\vartheta)\,\Phi_\varphi\right).$$

---

[1] E. Cesaro, Lezioni di geometria intrinseca, Napoli 1896, p. 165.

[2] Auf S. 435 der in Fußnote 1 (S. 1) genannten Arbeit.

Der zweite Term des Integrals Δ wird

$$\Phi\,\delta ds = \Phi\,\delta(\mathfrak{t}\,d\mathfrak{r}) = \Phi\,\mathfrak{t}\,\delta d\mathfrak{r},$$

weil $d\mathfrak{r}\,\delta\mathfrak{t}$ wegen $d\mathfrak{r} = \mathfrak{t}\,ds$ und wegen $\mathfrak{t}^2 = 1$ verschwindet.

Da, wie man sich überlegen kann, auch für die vektorielle Ortsfunktion $\mathfrak{r}$

$$\delta d\mathfrak{r} = d\delta\mathfrak{r}$$

ist, so bekommen wir durch Verwendung des Lagrangeschen Kunstgriffes der partiellen Integration:

$$\int\limits_c \Phi\,\delta ds = \int\limits_c \Phi\,\mathfrak{t}\,d\delta\mathfrak{r} = \Phi\,\mathfrak{t}\,\delta\mathfrak{r}\Big|_A^B - \int\limits_c \delta\mathfrak{r}\,(\Phi\,d\mathfrak{t} + \mathfrak{t}\,d\Phi).$$

Es wird weiterhin nützlich sein, mit Hilfe des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$ der positiven Flächennormalen den tangentialen Vektor $\mathfrak{n} \times \mathfrak{t} = \mathfrak{f}$ einzuführen und

$$\delta\mathfrak{r} = \rho(\mathfrak{t}\cos\vartheta + \mathfrak{f}\sin\vartheta) = \mu\,\mathfrak{t} + \nu\,\mathfrak{f}$$

zu setzen. Wir haben dann $\mathfrak{t}\,\delta\mathfrak{r} = \mu$. Ferner wird nach der Fundamentalformel der Streifentheorie,[1] wenn

$$\mathfrak{d} = T\mathfrak{t} + N\mathfrak{f} + G\mathfrak{n}$$

der Darboux-Cesarosche Krümmungsvektor ist,

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{t},$$

folglich

$$\delta\mathfrak{r}\,\Phi\,\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = \Phi\,\delta\mathfrak{r}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{t} = \Phi\,G\nu.$$

Somit erhalten wir:

$$\Delta = \int\limits_c \left((\mu\,\frac{\delta\Phi}{ds} + \nu\,\frac{\delta\Phi}{ds^*} + \mu\,G\Phi_\varphi + \nu\,G^*\Phi_\varphi - \nu\,G\Phi - \mu\,\frac{d\Phi}{ds} \right) ds + \Phi\mu\Big|_A^B.$$

Nach der vorhin schon herangezogenen Grundbeziehung für die geodätische Ableitung heben sich die Glieder mit dem Faktor μ unter dem Integralzeichen gegenseitig auf.

Nun stört noch das Vorkommen von G^*, während G als bekannte Funktion von s anzusehen ist, der ein endgültiger Platz

[1] Cesaro l. c. p. 250.

in dem angestrebten Schlußergebnis zusteht. Nach einer bekannten Formel der Flächentheorie[1] ist aber, weil ν die Größe der Geschwindigkeit ist, mit der bei der Variation der Ausgangskurve c deren Orthogonaltrajektorie durchlaufen wird,

$$G^* = \frac{1}{\nu}\,\frac{d\nu}{ds}.$$

Daher ist

$$\int_c \Phi_\varphi G^* \nu\, ds = \int_c \Phi_\varphi d\nu = \Phi_\varphi \nu \Big|_A^B - \int_c \nu\, d\Phi_\varphi.$$

Jetzt ist nur noch das Differential $d\Phi_\varphi = \frac{d\Phi_\varphi}{ds}\, ds$, das ja unter der Voraussetzung zu bilden ist, daß sich das Argumentelement mit der Winkelgeschwindigkeit G um $\mathfrak{n}$ dreht, auf die geodätische Ableitung in der Richtung $\mathfrak{t}$ zurückzuführen; das geschieht wieder mittels der mehrfach gebrauchten Grundbeziehung für die geodätische Differentiation.

So finden wir schließlich als erste Variation des Linienintegrales

$$\delta \int_c \Phi\, ds = \int_c \left(\frac{\delta\Phi}{ds^*} - \frac{\delta\Phi_\varphi}{ds} - G(\Phi + \Phi_{\varphi\varphi}) \right) \nu\, ds + (\Phi\mu + \Phi_\varphi \nu)_A^B.$$

Wir hätten uns einige Mühe ersparen können, wenn wir von vornherein nur Variationen $\delta\mathfrak{r}$ in der zur Ausgangskurve c normalen Richtung zugelassen hätten, nachdem bewiesen worden wäre, daß solche in tangentialer Richtung, außer in den Punkten A und B, keinen Einfluß auf Δ haben; dieses Vorgehen ist jedoch nur berechtigt, wenn nachgewiesen ist, daß diese beiden Arten von Variationen sich in allen Stadien der Umformung superponieren, und dieser Nachweis ist im vorstehenden mit enthalten.[2]

---

[1] Cesaro l. c. p. 155.

Gewöhnlich wird die Formel folgendermaßen geschrieben: $G^* = \frac{1}{\sqrt{EG}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$, wo E und G Fundamentalgrößen 1. O. eines orthogonalen u-v-Netzes sind.

[2] Verallgemeinert man die Fragestellung dadurch, daß man das Argumentelement von Φ mit dem Linienelement von c den gegebenen Winkel $\chi(s)$ bilden läßt, so tritt unter der Voraussetzung, daß χ bei der Variation von c unverändert bleiben soll, zu dem oben gefundenen Ausdruck für Δ, in dem

2. Das gewonnene Ergebnis möge auf einige Beispiele angewandt werden:

a) Es sei Φ eine reine Ortsfunktion, so daß $\Phi_\varphi = 0$ und $\frac{\delta\Phi}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial s}$ ist; wir erhalten dann

$$\Delta = \int\limits_c \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s^*} - G\Phi\right) \nu\, ds + \Phi\mu\Big/_A^B.$$

Z. B. gibt $\Phi = 1$ das bekannte Resultat

$$\delta s = -\int\limits_c G\nu\, ds + \mu_B - \mu_A.$$

b) Ist $\Phi = N$ die Normalkrümmung der Integrationskurve, also das Linienintegral deren totale Normalkrümmung, so bekommen wir, da[1]

$$N_\varphi = -2T, \qquad T_\varphi = N - N^*$$

ist, wo T die Normalwindung der Kurve und N^* die Normalkrümmung der Fläche für die Richtung $\mathfrak{f}$ in dem betrachteten Punkt ist, wegen[2]

$$\frac{\delta N}{ds^*} = -\frac{\delta T}{ds}$$

$$\delta \int\limits_c N\, ds = \int\limits_c \left(\frac{\delta T}{ds} - G(2N^* - N)\right) \nu\, ds + (N\mu - 2T\nu)_A^B.$$

c) Sei $\Phi = T$, das Integral also die totale Normalwindung der Kurve; es wird wegen[2]

$$\frac{\delta T}{ds^*} = -\frac{\delta N^*}{ds}$$

$$\delta \int\limits_c T\, ds = \int\limits_c \left(-\frac{\delta N}{ds} + 3GT\right) \nu\, ds + (T\mu + (N - N^*)\nu)_A^B.$$

---

nur überall das neue Argumentelement zu denken ist, noch die Größe

$$-\int\limits_c \Phi_\varphi \frac{d\chi}{ds}\mu\, ds$$

hinzu, die, wie zu erwarten, bei konstantem $\chi(s)$ verschwindet.

[1] Siehe die in Fußnote 1 (S. 1) zitierte Arbeit S. 436 Fußnote 14.

[2] Vgl. SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1949, S. 39 (1'). Mittels der mittleren Krümmung H könnte man $2N^*-N$ durch $4H-3N$ und $N-N^*$ durch $2(N-H)$ ersetzen, so daß nur auf die Richtung $\mathfrak{t}$ bezügliche Krümmungsgrößen vorkämen.

d) Man kann Φ auch als vektorielle Funktion annehmen; so ergibt sich für den geodätischen Krümmungsvektor

$$\mathfrak{g} = T\mathfrak{t} + N\mathfrak{s}$$

wegen[1]

$$\mathfrak{g}_\varphi = \mathfrak{g}^* \text{ und } \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_{\varphi\varphi} = 0$$

$$\delta \int_c \mathfrak{g}\, ds = \int_c \left(\frac{\delta \mathfrak{g}}{ds^*} - \frac{\delta \mathfrak{g}^*}{ds}\right) \nu\, ds + (\mathfrak{g}\mu + \mathfrak{g}^* \nu)_A^B =$$

$$= -2 \int_c K \mathfrak{n} \nu\, ds + \Gamma(\mathfrak{n} \times \delta \mathfrak{x})\Big|_A^B,$$

wo K das Gaußsche Krümmungsmaß und Γ ein früher eingeführter Tensor ist.[2] Darin ist im Keim ein bei anderen Gelegenheiten auf verschiedene Arten bewiesener Integralsatz enthalten.[3]

e) In der Theorie der Flächenabbildungen hat man Anlaß, den Begriff der „Rißlänge" einer Kurve[4] einzuführen: wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei punktweise aufeinander bezogene Flächen sind, so verstehen wir darunter das Integral

$$\int_c \frac{d\mathfrak{x}}{ds}\, d\mathfrak{y}$$

längs einer auf $\mathfrak{x}$ zwischen den Punkten A und B verlaufenden Kurve c mit dem Bogenelement ds, wenn $d\mathfrak{y}$ das $d\mathfrak{x}$ in der Zuordnung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ entsprechende Linienelement der Fläche $\mathfrak{y}$ ist. (Wird $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{r}$ angenommen und auf sich selbst identisch abgebildet, so wird das Integral das der gewöhnlichen Bogenlänge: $s = \int_c \mathfrak{t}\, d\mathfrak{r}$.) Nach einer Formel der Theorie der Flächenpaare ist

$$d\mathfrak{y} = n\, d\mathfrak{x} + q\, d\mathfrak{x}^* + \gamma \mathfrak{n}\, ds,$$

[1] Siehe die in Fußnote 1 (S. 1) aufgeführte Arbeit S. 435 (3).

[2] Vgl. die in Fußnote 1 (S. 1) angegebene Arbeit S. 443, wo in Fußnote 24 weitere Literatur genannt ist, und S. 444 oben; ferner Jahresber. d. DMV. Bd. 39, S. 179 (1930).

[3] Vgl. SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1929, S. 172; SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 119f., auch Jahresber. d. DMV. Bd. 39 S. 180 Fußnote 1 (1930).

[4] Siehe Archiv d. Math. Bd. 1 S. 75 (1948).

wo $\mathfrak{n}$ in die Flächennormale von $\mathfrak{x}$ weist, $d\mathfrak{x}^* = \mathfrak{n} \times d\mathfrak{x}$, n der „Rißmaßstab", q der „Querrißmaßstab" und γ der „Normalrißmaßstab" der Richtung $d\mathfrak{x}$ ist;[1] daraus folgt wegen $d\mathfrak{x}^2 = ds^2$

$$d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = n\, ds^2.$$

Die Rißlänge der Kurve c ist daher auch gleich dem Integral

$$\int_c n\, ds.$$

Im allgemeinen ist n eine Linienelementfunktion. Wegen[2]

$$n_\varphi = J + 2q, \qquad q_\varphi = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J} - 2n$$

wird

$$\delta \int_c n\, ds = \int_c \left(\frac{\delta n}{ds^*} - \frac{\delta}{ds} (2q + J) - G(2\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J} - 3n) \right) \nu\, ds + \\ + (n\mu + (2q + J)\nu)_A^B,$$

wo noch drei der Differentialinvarianten[3] $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}, J$ des Flächenpaares auftreten; das ließe sich vermöge der Beziehungen[2,4]

$$J = -q - q^* \text{ und } \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J} = n + n^*$$

vermeiden, allerdings auf Kosten des Erscheinens von Größen, die sich auf die Richtung $d\mathfrak{x}^*$ beziehen. Die Ableitung $\frac{\delta n}{ds^*}$ könnte mit Hilfe der Integrabilitätsbedingungen der Theorie der Flächenabbildungen[5] auf eine Ableitung in der Richtung $\mathfrak{t}$ zurückgeführt werden.

Ist das Paar der Flächen „gleichmäßig" aufeinander bezogen, d. h. ist n richtungsunabhängig, so ist[2] $2q + J = 0$ und[4] $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J} = = 2n$, mithin

$$\delta \int_c n\, ds = \int_c \left(\frac{\partial n}{\partial s^*} - Gn \right) \nu\, ds + n\mu \Big|_A^B.$$

---

[1] SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 15 ff. und 1948, S. 228.

[2] Vgl. SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 20 (10) und S. 22 (17).

[3] SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1943, S. 217 ff.

[4] SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss. Math.-nat. Kl., 1947, S. 23.

[5] SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss. Math.-nat. Kl., 1951, S. 11 ff.

f) Ähnlich könnte das Linienintegral $\int\limits_c q\,ds$ behandelt werden.

g) Von Interesse ist auch die Variation des Integrales $\int\limits_c \gamma\, ds$.

Bei einer früheren Gelegenheit wurde gezeigt, daß

$$\gamma = -\mathfrak{J}\,\mathfrak{t}$$

ist; da hiernach

$$\gamma_\varphi = \gamma^* \text{ und } \gamma + \gamma_{\varphi\varphi} = 0$$

ist, so wird

$$\delta \int\limits_c \gamma\, ds = \int\limits_c \left(\frac{\delta\gamma}{\partial s^*} - \frac{\delta\gamma^*}{\partial s}\right) \nu\, ds + (\gamma\mu + \gamma_\varphi \nu)_A^B.$$

Nun ergibt sich, wenn wir den Operator

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{t}^* \frac{\partial}{\partial s} - \mathfrak{t} \frac{\partial}{\partial s^*}$$

verwenden,

$$\frac{\delta\gamma}{\partial s^*} - \frac{\delta\gamma^*}{\partial s} = \mathfrak{D}\mathfrak{J};$$

folglich wird

$$\delta \int\limits_c \gamma\, ds = \int\limits_c \mathfrak{D}\mathfrak{J}\,\nu\, ds - \mathfrak{J}\,\delta\,\mathfrak{r}\,\Big|_B^A.$$

Es ist nicht schwierig, in allen hier betrachteten Fällen mit Ausnahme von d) und g) unter der Voraussetzung, daß $\delta\mathfrak{r}$ in A und B verschwinde und daß der Integrand von Δ stetig sei, die Bedingung für das Verschwinden von Δ bei jeder zulässigen Variation $\delta\mathfrak{r}$ aufzustellen und zu einer invarianten Form der Differentialgleichung der Extremalen zu gelangen.