Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1950

München 1951

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Vitalische Systeme in Booleschen σ-Verbänden

Von

Otto Haupt und Christian Y. Pauc

in Erlangen in Cape Town

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 3. November 1950

§ 1. Einleitung

1.1. Zunächst sei an folgende *speziellen Ableitungssätze*[1] erinnert. Erstens: Im kartesischen E_n sei bezüglich des Lebesgueschen Maßes L_n eine Ableitungsbasis $\boldsymbol{w}$ (vgl. Nr. 1.2.) gegeben, deren Elemente Folgen $\boldsymbol{v}(X) = \{\mathfrak{I}_r\}$ von z. B. achsenparallelen Intervallen $\mathfrak{I}_r$ sind, welch letztere sich für $r \to \infty$ auf den Punkt $X \in E_n$ zusammenziehen (d. h. topologisch bzw. metrisch gegen X konvergieren). Dann existiert für L_n-fast jedes $X \in E_n$ die nach $\boldsymbol{w}$ genommene Ableitung[2] $D(X; F; \boldsymbol{w})$ des unbestimmten Lebesgueschen Integrals $F(f; \mathfrak{X}) = \int\limits_{\mathfrak{X}} f\, d L_n$ der L_n-summierbaren und *beschränkten* Punktfunktion f und es ist $D(X; F) = f(X)$. Die Bildung der Ableitung erfolgt dabei mit Hilfe derjenigen Grenzübergänge, welche der Konvergenz der $\boldsymbol{v}(X)$ gegen X entsprechen. – Zweitens: Schränkt man die $\mathfrak{I}_r$ durch die Forderung ein, daß sie sämtlich z. B. achsenparallele Würfel sein sollen, so gilt der Ableitungssatz auch bei *nicht-beschränktem Integranden* f.

1.2. *Allgemein* verstehen wir im Anschluß an Herrn de Possel[3] unter einer Ableitungsbasis $\boldsymbol{a}$ folgendes: Es sei $\mathfrak{R}$

---

[1] Vgl. etwa H. Hahn und A. Rosenthal, Set Functions (Albuquerque, New Mexico, 1948) Chap. V sowie die dortigen Literaturangaben; vgl. ferner insbesondere R. de Possel, a) Journ. Math. pures et appl. IX s. 15 (1936) 391 ff., auch b) C. R. Acad. Sci. Paris 224 (1947) 1137 ff. und 1197 ff.

[2] Hierbei soll $D(X; F; w) = \lim\limits_{r\to\infty} F(\mathrm{f}; \mathfrak{I}_r) : L_n(\mathfrak{I}_r)$ sein, und zwar mit dem gleichen Limes für alle Folgen $v(X)$ bei festem X.

[3] R. de Possel, a.a.O.[1], a) vgl. auch Haupt-Pauc, Archiv d. Math. 1 (1948), 23 ff.

eine Menge (Grundmenge), ferner sei $\mathfrak{z}$ ein σ-Körper von Teilmengen von $\mathfrak{R}$ und $\mu|\mathfrak{z}$ ein Maß. Nun ist $\boldsymbol{a}$ eine Gesamtheit von (Moore-Smithschen) Folgen $\boldsymbol{v} = \{\mathfrak{J}_i\}$, wobei also die Indizes i ein gerichtetes System I bilden[4], mit folgenden Eigenschaften: a) Die „Glieder" $\mathfrak{J}_i$ von $\boldsymbol{v}$ sind Mengen aus $\mathfrak{z}$ mit $0 < \mu(\mathfrak{J}_i) < +\infty$. b) Es ist μ-fast jedem Punkt $X \in \mathfrak{R}$ mindestens ein $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{a}$ zugeordnet, in Zeichen $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(X)$; die Gesamtheit dieser dem Punkt X zugeordneten $\boldsymbol{v}(X)$ werde mit $\boldsymbol{a}(X)$ bezeichnet. c) Zu jedem $\boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{a}$ existiert ein $X' = X(\boldsymbol{v}') \in \mathfrak{R}$ derart, daß $\boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{a}(X')$ gilt. d) Für jedes $\boldsymbol{v}(X)$ gilt: Jede zu $\boldsymbol{v}(X)$ konfinale Teilfolge von $\boldsymbol{v}(X)$ gehört selbst zu $\boldsymbol{a}(X)$.

1. 2. 1. Die Menge derjenigen $X \in R$, für welche $\boldsymbol{a}(X)$ nicht leer ist, heiße der Bereich von $\boldsymbol{a}$ kurz $\boldsymbol{a}$-Bereich; der Bereich der Ableitungsbasis $\boldsymbol{a}$ ist bis auf eine μ-Nullmenge gleich $\mathfrak{R}$. Eine Ableitungsbasis $\boldsymbol{a}''$, deren Bereich auch um mehr als eine μ-Nullmenge von $\mathfrak{R}$ verschieden sein darf, heißt Teilbasis von $\boldsymbol{a}$ oder in $\boldsymbol{a}$ enthalten, wenn aus $\boldsymbol{v}''(X) \in \boldsymbol{a}''(X)$ folgt $\boldsymbol{v}''(X) \in \boldsymbol{a}(X)$.

1. 2. 2. Die Menge aller in irgendeinem $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{a}$ auftretenden Glieder bezeichne man als das *zu $\boldsymbol{a}$ gehörige* (Konstituenten-) *System* $\mathfrak{k}(\boldsymbol{a})$, kurz $\boldsymbol{a}$-System, und die Elemente von $\mathfrak{k}(\boldsymbol{a})$ als die Konstituenten von $\boldsymbol{a}$. Es ist also $\mathfrak{k}(\boldsymbol{a})$ Teilmenge von $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{k}(\boldsymbol{a})$ wird aus der Ableitungsbasis $\boldsymbol{a}$ erhalten, indem man absieht von der, in $\boldsymbol{a}$ festgelegten Zusammenfassung (Anordnung) der Konstituenten zu Folgen $\boldsymbol{v}$ und von der Zuordnung der $\boldsymbol{v}$ zu den $X \in \mathfrak{R}$. Gerade diese, durch eine Ableitungsbasis $\boldsymbol{a}$ festgelegte Zuordnung von Mengenfolgen zu Punkten $X \in \mathfrak{R}$ ist als Vorstufe einer Topologie in $\mathfrak{R}$ anzusehen[5]; diese Vorstufe bezeichnen wir als eine Pretopologie. Mit Benutzung dieser Bezeichnung können wir dann sagen: Das Konstituentensystem entsteht aus der Ableitungsbasis durch Abstrahieren von der Pretopologie, m. a. W. durch Tilgung der Pretopologie.

1. 2. 3. Unter einer $\boldsymbol{a}$-feinen Überdeckung einer Menge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$ verstehen wir das Konstituentensystem $\mathfrak{k}(\boldsymbol{a}')$ einer – im

---

[4] Vgl. Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnungen, 2. Aufl., 1. Bd. (Berlin 1948) Nr. 6. 1. 5.

[5] Vgl. a.a.O.[4], Nr. 6. 1. 1.

übrigen beliebigen – Teilbasis $\mathfrak{a}'$ der Ableitungsbasis $\mathfrak{a}$ derart, daß für μ-fast jedes $X \in \mathfrak{M}$ sämtliche Glieder mindestens eines $v(X) \in \mathfrak{a}(X)$ in $\mathfrak{k}(\mathfrak{a}')$ enthalten sind. Gleichbedeutend damit ist die Forderung, daß $\mathfrak{M}$ bis auf eine μ-Nullmenge Teilmenge des $\mathfrak{a}'$-Bereiches ist.

1.3. Die meisten Beweise der in Nr. 1.1. angeführten Ableitungssätze machen explizite Gebrauch von der Tatsache, daß für jede Menge $\mathfrak{M} \in E_n$ alle $\mathfrak{w}$-feinen Überdeckungen $\mathfrak{k}(\mathfrak{w}')$ von $\mathfrak{M}$ die schwache bzw. starke *Vitalische Eigenschaft* besitzen, anders gesagt, daß $\mathfrak{k}(\mathfrak{w}')$ für jede Teilbasis $\mathfrak{w}'$ von $\mathfrak{w}$, in deren $\mathfrak{w}$-Bereich $\mathfrak{M}$ bis auf eine μ-Nullmenge enthalten ist, ein *schwaches* bzw. *starkes Vitalisches System* ist (vgl. Nr. 3. 1.). Diese Heranziehung der Vitalischen Eigenschaft liegt in der Natur der Sache. Wie nämlich Herr de Possel[6], und zwar allgemein für jedes μ-Integral[7], gezeigt hat, ist bei beschränktem Integranden f die Gültigkeit des unter Erstens in Nr. 1. 1. angeführten Ableitungssatzes gleichbedeutend eben damit, daß alle $\mathfrak{k}(\mathfrak{w}')$ schwache Vitalische Systeme sind.

1.3.1. Der Begriff des *schwachen* und *starken Vitalischen Systems* (vgl. Nr. 3. 1.) nimmt keinen Bezug auf eine Pretopologie und ist sogar *rein verbandstheoretischer Natur*. In der Ableitungstheorie von Herrn de Possel spielt aber im Verlaufe der Untersuchung weniger die Ableitungsbasis als solche als vielmehr das einzelne Vitalische System die wesentlichere Rolle. Die Brücke zu den in der Ableitungstheorie auftretenden Grenzübergängen – oder, was auf das Gleiche hinausläuft, zur Pretopologie – wird geschlagen durch die $\mathfrak{a}$-feinen Überdeckungen, in deren Definition ja die Pretopologie eingeht.

1.4. Die soeben (Nr. 1. 3. 1.) gemachten Feststellungen zusammen mit der von Herrn de Possel bewiesenen Unentbehrlichkeit des Vitalischen Überdeckungstheorems (vgl. Nr. 1. 3.) rechtfertigen eine *gesonderte Betrachtung der Vitalischen Systeme* für sich. Außer im E_n sind solche Systeme unseres

---

[6] R. de Possel a.a.O.[1], a).

[7] D. h. das bezüglich des Maßes $\mu|\mathfrak{z}$ gebildete Unterteilungsintegral (vgl. dazu a.a.O.[4], Nr. 6. 1. 6. 2., 3.).

Wissens bisher nur in Verbindung mit gewissen topologischen Räumen betrachtet worden[8]. Demgegenüber ziehen wir im folgenden keinerlei Pretopologie oder Topologie heran, behandeln vielmehr die Frage nach *hinreichenden Bedingungen* verbandsalgebraischer *Natur für starke bzw. schwache Vitalische Systeme,* genauer nach hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein System $\mathfrak{c}$ von Somen aus einem Booleschen σ-*Verband* $\mathfrak{z}$ bezüglich des Maßes $\mu \mid \mathfrak{z}$ ein starkes bzw. schwaches Vitalisches System ist.

Von solchen Bedingungen ist natürlich zu fordern, daß sie sich sowohl einfach formulieren lassen als insbesondere im klassischen Fall des E_n unschwer zu verifizierende Eigenschaften z. B. der achsenparallelen Würfel (oder Kugeln) bzw. Intervalle zum Ausdruck bringen. Es wird sich zeigen, daß gewisse, im wesentlichen schon in den bisher untersuchten Fällen benutzte Eigenschaften[9] (verbandsalgebraisch formulierbar sind und) das Gewünschte leisten.

1. 5. Dem vorstehend Gesagten zufolge gliedern sich unsere Betrachtungen wie folgt: Zunächst werden (§ 2) die durchgehend gemachten Voraussetzungen und benutzten Bezeichnungen zusammengestellt. Sodann (§ 3) wird der Begriff des starken und schwachen Vitalischen Systems erklärt. Es folgt (§ 4) die Formu-

---

[8] Vgl. Hahn-Rosenthal, a.a.O.[1]; dazu insbesondere H. Busemann u. W. Feller, Fund. Math. 22 (1934) 226ff.; P. Romanowski, Rec.Math.Moscou, N, s. 9 (1941) 67ff., 281ff.; A. P. Morse. Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944) 205ff., ebenda 61 (1947) 418ff. – Eine explizite Benutzung des Vitalischen Satzes beim Beweise des Ableitungssatzes erübrigt sich z. B., wenn die Ableitungsbasis durch eine Gitterfolge (vgl. oben im Text Nr. 3. 2. 1.) geliefert wird; vgl. B. Jessen, Abstrakt Maal-og Integralteori (København 1947) 38ff.; auch Romanowski a. a. O., 309ff. – Es sei noch genannt W. Nef, Festschrift A. Speiser (Zürich 1945) 201ff. 9). – Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen gelangten noch zu unserer Kenntnis: C. A. Hayes and A. P. Morse, Proc. Am. Math. Soc., Febr. 1950, 107ff., wo die Äquivalenz der schwachen und starken Vitalischen Eigenschaft für gewisse Ableitungsbasen, die sogen. "annular blankets" in metrischen, nach Carathéodory metrisierten Räumen bewiesen wird (Spezialfall eines solchen annular blankets ist das System der Kugeln); ferner A. Denjoy, C. R. Acad. Sci. Paris 231 (1950) 560ff., 600ff., 737ff., 1013ff., worauf wir an anderer Stelle zurückzukommen hoffen.

[9] Vgl. oben im Text Nr. 4.1. sowie Fußnoten 15 und 16.

lierung der in Nr. 1. 4. erwähnten hinreichenden Bedingungen für starke bzw. schwache Vitalische Systeme; es ergibt sich sogleich, daß z. B. jedes System $\mathfrak{w}$ von achsenparallelen Würfeln im E_n ein starkes Vitalisches System bezüglich des Lebesgueschen Maßes ist, wenn fast jeder Punkt des E_n in beliebig kleinen[9a] Würfeln aus $\mathfrak{w}$ enthalten ist. Schließlich wird (§ 5) die Produktinvarianz für schwache Vitalische Systeme bewiesen, d. h. die Tatsache, daß das Produkt endlich vieler schwacher Vitalischer Systeme wieder ein Vitalisches schwaches System ist und ebenso die Produktinvarianz eines Teiles der hinreichenden Bedingung für schwache Vitalische Systeme, nämlich die sogen. schwache Kranzeigenschaft. Daraus ergibt sich dann beispielsweise, daß im E_n jedes System $\mathfrak{i}$ von achsenparallelen Intervallen ein schwaches Vitalisches System ist, falls fast jeder Punkt des E_n in Intervallen aus $\mathfrak{i}$ von beliebig kleinem Durchmesser enthalten ist.

§ 2. Voraussetzungen und Bezeichnungen

2. 1. Für das folgende soll gelten:

(1) Es sind $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{z}$ zwei *Boolesche σ-Verbände* mit der gemeinsamen *Einheit* E, ferner ist $\mathfrak{g}$ Erweiterung von $\mathfrak{z}$. Daß Nullsoma von $\mathfrak{g}$ (und $\mathfrak{z}$) wird mit θ bezeichnet.

(2) Es ist $\mu \mid \mathfrak{z}$ ein *schwach endliches* in $\mathfrak{g}$ *vollständiges Maß* und $\mathfrak{n}$ das μ-Nullideal, d. h. das σ-Ideal der μ-Nullsomen[10].

(3) Es sei $\bar{\mu} \mid \mathfrak{g}$ das durch $\mu \mid \mathfrak{z}$ in $\mathfrak{g}$ bestimmte äußere Maß[11]. Wegen $E \in \mathfrak{z}$ existieren zu jedem $A \in \mathfrak{g}$ maßgleiche Hüllen $\tilde{A}$, d. h. $\tilde{A} \in \mathfrak{z}$ mit $A \subseteq \tilde{A}$ und $\bar{\mu}(\tilde{A} - A) = 0$.

[9a] „Beliebig klein" bezieht sich hier auf die Metrik des E_n und zieht „beliebig klein im Sinne des (Lebesgueschen) Maßes" (beliebig maßklein) nach sich.

[10] Es heißt $\mu \mid \mathfrak{z}$ schwach endlich, wenn jedes $A \in \mathfrak{z}$ Vereinigung abzählbar vieler $A_\nu \in \mathfrak{z}$ ist mit $\mu(A_\nu) < +\infty$; ferner heißt $\mu \mid \mathfrak{z}$ vollständig in $\mathfrak{g}$, wenn $\mathfrak{n}$ sogar in $\mathfrak{g}$ σ-Ideal ist (d. h. wenn aus $N \in \mathfrak{n}$, $T \in \mathfrak{g}$ und $T \subseteq N$ folgt $T \in \mathfrak{n}$). Jedes Maß $\mu \mid \mathfrak{z}$ läßt sich zu einem kleinsten, in $\mathfrak{g}$ vollständigen Maß erweitern, indem man – kurz gesagt – zu $\mathfrak{n}$ alle Teile $T \in \mathfrak{g}$ von allen $N \in \mathfrak{n}$ adjungiert.

[11] Für beliebiges $A \in \mathfrak{g}$ ist $\bar{\mu}(A) = +\infty$, falls kein $Z \in \mathfrak{z}$ existiert mit $A \subseteq Z$, andernfalls ist $\bar{\mu}(A) = \mu(\tilde{A}) = \inf(\mu(Z); A \subseteq Z; Z \in \mathfrak{z})$.

(4) Irgend zwei Somen A, $B \in \mathfrak{g}$ werden als θ-fremd bzw. als $\mathfrak{n}$-fremd bezeichnet, wenn $A \frown B = AB = \theta$ bzw. $AB = \theta$ (mod $\mathfrak{n}$); gemeinsame Bezeichnung: $AB = \theta$ (mod $\mathfrak{n}'$), in Worten: A und B sind $\mathfrak{n}'$-*fremd* (wobei dann $\mathfrak{n}' = (\theta)$ oder $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}$ sein kann).

2. 2. (1) unter $\mathfrak{c}$ wird ein, *das Nullsoma enthaltendes*, später (§ 3) noch weiteren Bedingungen zu unterwerfendes *Teilsystem von* $\mathfrak{z}$ verstanden derart, daß $\mu(B) < +\infty$ für jedes $B \in \mathfrak{c}$. Ferner werde *mit* $\mathfrak{c}_s$ *bezeichnet* das (ebenfalls in $\mathfrak{z}$ enthaltene) System bestehend aus den *Vereinigungen* von je *endlich vielen* $C \in \mathfrak{c}$.

(2) Ist $F \in \mathfrak{c}_s$, sonst beliebig, so sei $\mathfrak{c}(F; \mathfrak{n}')$ bzw. $\mathfrak{g}(F; \mathfrak{n}')$ oder $\mathfrak{z}(F; \mathfrak{n}')$ usw. das System aller Somen aus $\mathfrak{c}$ bzw. aus $\mathfrak{g}$ oder $\mathfrak{z}$ usw., die $\mathfrak{n}'$-fremd sind zu F.

§ 3. Starke und schwache Vitalische Systeme

3. 1. Das System $\mathfrak{c}$ heiße ein Vitalisches System[12], kurz V-System, bezüglich $X \in \mathfrak{g}$, wenn zu jedem $A \in \mathfrak{g}$ mit $A \subseteq X$, *kurz:* $A \in \mathfrak{g}X$, und jedem $\varepsilon > 0$ eine $\mathfrak{n}'$-starke bzw. eine schwache Vitalische (ε-)Überdeckung (*V-Überdekkung*) *aus* $\mathfrak{c}$ existiert, d. h. wenn *jedes* $A \in \mathfrak{g}X$ *dem äußeren Maße nach beliebig genau von oben einschließbar ist durch Vereinigungen abzählbar vieler Somen aus* $\mathfrak{c}$, *die sich gegenseitig dem Maße nach überhaupt nicht (starkes V-System)* oder doch *nur beliebig wenig (schwaches V-System)* überlappen. Genauer:

Zu jedem $A \in \mathfrak{g}X$ und jedem $\varepsilon > 0$ existieren $C_\varrho \in \mathfrak{c}$, $\varrho = 1, 2., \ldots$, mit folgenden Eigenschaften: Setzt man $S_t = \bigcup_{\varrho=1}^{t} C_\varrho$, $S = \bigcup_{t=1}^{\infty} S_t = \bigcup_{\varrho=1}^{\infty} C_\varrho$, so gilt:

(I) μ-Approximierbarkeit *von* $A \in \mathfrak{g}X$ *von oben her aus* $\mathfrak{c}_s$

(I, 1) $A \subseteq S$ (mod $\mathfrak{n}$) (I, 2) $\mu(S - \tilde{A}) < \varepsilon$.

[12] Vgl. (für den Fall metrischer Räume) Hahn-Rosenthal a. a. O.[1]

(II) Überlappungsbedingung *für die* C_ϱ (in (I)):

Entweder

(II, st): Die C_ϱ sind paarweise $\mathfrak{n}'$-fremd ($\mathfrak{n}'$-Überlappung).

Oder

(II, schw): Für unendlich viele r (und dann[12a] für jedes r) ist das Überlappungsmaß $\omega(C_1, \ldots, C_r) = (\sum_{\varrho=1}^{r} \mu(C_\varrho)) - \mu(S_r)$ kleiner als ε (ε-Überlappung).

Je nachdem (I) und (II, st) bzw. (II, schw) erfüllt sind, heißt also $\mathfrak{c}$ ein $\mathfrak{n}'$-starkes bzw. ein schwaches V-System (bezüglich $\mu|\mathfrak{z}$ und X in $\mathfrak{g}$). Jedes $\mathfrak{n}'$-starke V-System ist zugleich ein schwaches V-System.

Anmerkung. Wir sprechen im folgenden meist kurz von „Vitalischen Systemen" usw. ohne den Beisatz „bezüglich $X \in \mathfrak{g}$". Dadurch entstehen hier keine Mißverständnisse.

3. 2. Bemerkungen zur μ-Approximierbarkeit (I).

(a) Es sei $\mathfrak{z}_e$ das System der Somen $A' \in \mathfrak{z}$ mit $\mu(A') < +\infty$. Es ist (I) gleichwertig damit, daß $\mathfrak{c}_s$ dicht ist in $\mathfrak{z}_e$ bezüglich der Quasimetrik

$$d(D, B) = \mu(D \dotplus B) = \mu(D - B) + \mu(B - D) \text{ für } D, B \in \mathfrak{z}.$$

Bew. Wegen $S = \lim \text{alg}\, S_t$ folgt aus (I), daß $d(A, S_t) < \varepsilon$ für schließlich alle t, wenn $A \in \mathfrak{z}_e$; ferner ist $S_t \in \mathfrak{c}_s$. Umgekehrt: Wir betrachten zuerst den Fall $\bar{\mu}(A) < +\infty$. Wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $r \geq 1$ ein $S_r \in \mathfrak{c}_s$ existiert mit $\mu(S_r - \tilde{A}) < 2^{-r}\varepsilon$ und $\mu(\tilde{A} - S_r) < 2^{-r}\varepsilon$, dann gilt für $S = \bigcup_{r=1}^{\infty} S_r$: Erstens $\mu(\tilde{A} - S) = 0$, d. h. $\tilde{A} = S \pmod{\mathfrak{n}}$, mithin $\tilde{A} \subseteq S \pmod{\mathfrak{n}}$; zweitens $\mu(S - \tilde{A}) < \varepsilon$. Der Fall, daß $\bar{\mu}(A) = +\infty$ ist, läßt sich durch Zerlegung von A in abzählbar viele Somen je von endlichem äußerem Maß auf den vorhergehenden zurückführen.

[12a] Denn $\omega(C_1, \ldots, C_r)$ nimmt nicht ab mit wachsendem r; es ist nämlich $S_{r+1} - S_r \subseteq C_{r+1}$, also $\omega(C_1, \ldots, C_{r+1}) = \omega(C_1, \ldots, C_r) + [\mu(C_{r+1}) - \mu(S_{r+1} - S_r)] \geq \omega(C_1, \ldots, C_r)$. Wegen dieser Monotonie ist aber $\omega(C_1, \ldots, C_{r+1}) \geq \varepsilon$, wenn $\omega(C_1, \ldots, C_r) \geq \varepsilon$.

(b) Ist $\mathfrak{c}_\sigma$ ein σ-Verband, so ist (I) gleichwertig damit, daß $\mathfrak{z}$ (mod $\mathfrak{n}$) enthalten ist im kleinsten σ, δ-System $\mathfrak{b}(\mathfrak{c})$ über $\mathfrak{c}$ (in $\mathfrak{g}$).

Bew. Ist (I) erfüllt, so gibt es zu jedem $B \in \mathfrak{z}$ ein $D \in \mathfrak{c}_{\sigma\delta}$, also $D \in \mathfrak{b}(\mathfrak{c})$, mit $B \subseteq D$ (mod $\mathfrak{n}$) und $\mu(D - B) = 0$, also $D \subseteq B$ (mod $\mathfrak{n}$); und daraus $B = D$ (mod $\mathfrak{n}$). Umgekehrt: Ist $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{b}(\mathfrak{c})$ (mod $\mathfrak{n}$) und ist zunächst $\mu \mid \mathfrak{z}$ endlich, so folgt (I) aus einem bekannten Satz[13]; mittelst der üblichen Schlüsse ergibt sich dann (I) auch für schwach endliches $\mu \mid \mathfrak{z}$.

3. 2. 1. Beispiele starker V-Systeme werden geliefert durch *erzeugende Gitterfolgen* $\mathfrak{f}$ *für das Maß* $\mu \mid \mathfrak{z}$ *in* E. Wir verstehen darunter[14] folgendes: Als ein Gitter $\mathfrak{c}$ in E werde bezeichnet jedes abzählbare System von μ-meßbaren, $\mathfrak{n}$-fremden Somen M_ϱ mit $E = \bigcup M_\varrho$ (mod $\mathfrak{n}$). Eine Gitterfolge $\{\mathfrak{c}_\nu\}$ liegt vor, wenn (mod $\mathfrak{n}$) jedes $M_{\nu\tau} \in \mathfrak{c}_\nu$ in genau einem $M_{\nu-1,\lambda} \in \mathfrak{c}_{\nu-1}$ enthalten ist, $\nu = 1, 2, \ldots$ Die Vereinigungen aus je endlich vielen der $M_{\nu\lambda}$ bilden ein System $\mathfrak{a}$. Ist nun $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\mathfrak{a})$ der kleinste Boolesche σ-Verband über $\mathfrak{a}$ und ist $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{b}$ (mod $\mathfrak{n}$), so heiße das System $\mathfrak{h}$ der $M_{\nu\lambda}$ oder vielmehr $\mu \mid \mathfrak{h}$ Erzeugende von $\mu \mid \mathfrak{z}$ in E. Daß in der Tat für $\mu \mid \mathfrak{z}$ und $\mathfrak{h} = \mathfrak{c}$ die Forderungen (I), (II, st) erfüllt sind, ergibt sich aus Nr. 3. 2., (b) sowie aus der Definition der Gitterfolge, gemäß deren irgend zwei Gittersomen $M_{\nu\tau}$ (mod $\mathfrak{n}$) entweder fremd sind oder das eine Soma Teil des anderen ist.

3. 3. Bemerkungen über schwache Vitalische Systeme.

Falls $\mu(X) < +\infty$ *ist, sind folgende Aussagen gleichwertig*:

(1) Es gelten (I) und (II, schw);

---

[13] Haupt-Pauc, a. a. O.[3], 27, Hilfssatz. Dort sind zwar nur Boolesche σ-Verbände von *Mengen* (σ-Körper) betrachtet; indes gelten die dortigen Ausführungen allgemein für *beliebige* Boolesche σ-Verbände. Der oben im Text vorliegende Fall, daß $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{b}(\mathfrak{c})$ (mod $\mathfrak{n}$) wird durch Restklassenbildung mod $\mathfrak{n}$ auf den Fall $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{b}(\mathfrak{c})$ zurückgeführt und damit der Anschluß an den Hilfssatz a. a. O. hergestellt.

[14] Vgl. a. a. O.[3]. Das Maß $\mu|\mathfrak{z}$ läßt erzeugende Gitterfolgen zu, wenn und nur wenn der Maßraum rational ist (d. h. eine abzählbare Basis von Umgebungen besitzt); betr. Maßraum siehe oben im Text (Nr. 3. 2., (a)), wo jetzt $d(A, B) = +\infty$ zugelassen wird. Vgl. Chr. Y. Pauc, L'Intermed. Recherches Math., Suppl. au Fasc. 9 (Janvier 1947) = Assoc. Française Avanc. Sci., 64. Sess., Paris 1945, Mathématiques 85.

(2) Es gelten (I, 1) (d. h. es existiert ein $S \in \mathfrak{c}_\sigma$ mit der Eigenschaft (I, 1)) und

(II′, schw): $\omega(A; \{C_\varrho\}) = \sum_{\varrho=1}^{\infty} \mu(C_\varrho) - \mu(\tilde{A}) < \varepsilon$;

(3) Es gilt (I, 1) und es ist

$$\mu(\tilde{A}) = \inf\left(\sum_{\varrho=1}^{\infty} \mu(C_\varrho);\ A \subseteq \bigcup_{\varrho=1}^{\infty} C_\varrho \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{n});\ C_\varrho \in \mathfrak{c}\right).$$

Bew. Aus (1) folgt (2). Zufolge $\mu(S - \tilde{A}) < \varepsilon$ und $\mu(\tilde{A}) < < +\infty$ ist nämlich $\mu(S) < \mu(\tilde{A}) + \varepsilon$. Aus (II, schw) folgt daher $\sum_{\varrho=1}^{\infty} \mu(C_\varrho) \leq \mu(S) + \varepsilon < \mu(\tilde{A}) + 2\varepsilon$, also $\omega(A; \{C_\varrho\}) < 2\varepsilon$, d.i. (II′, schw). – Aus (2) folgt (3). Wegen (I, 1) und (II′, schw) existiert nämlich ein $S \in \mathfrak{c}_\sigma$ mit $\tilde{A} \subseteq S$ (mod $\mathfrak{n}$), also $\mu(\tilde{A}) \leq \mu(S) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(C_\varrho) < \mu(\tilde{A}) + \varepsilon$. – Aus (3) folgt (1). Wegen (I, 1) existiert $S \in \mathfrak{c}_\sigma$ mit $\tilde{A} \subseteq S$ (mod $\mathfrak{n}$); und gemäß der zweiten Bedingung (3) gibt es unter diesen S solche mit $\mu(\tilde{A}) \leq \sum \mu(C_\varrho) < < \mu(\tilde{A}) + \varepsilon$, die also (II, schw) erfüllen. Wegen $\mu(S) \leq \sum \mu(C_\varrho)$ ist schließlich $\mu(S) < \mu(\tilde{A}) + \varepsilon$ und daher $\mu(S - \tilde{A}) < \varepsilon$, womit auch (I, 2) als erfüllt nachgewiesen ist.

3. 4. *Ein Somensystem $\mathfrak{c}$ ist ein schwaches Vitalisches System, wenn $\mathfrak{c}$ schwaches Vitalisches System ist bezüglich eines jeden $W \in \mathfrak{g}X$ mit $\mu(\tilde{W}) < +\infty$.*

Bew. Ist nämlich $W \in \mathfrak{g}X$ mit $\mu(\tilde{W}) = +\infty$, so folgt aus der schwachen Endlichkeit von $\mu \mid \mathfrak{z}$ die Existenz von $W_\nu \in \mathfrak{g}X$ mit $\tilde{W} = \sum \tilde{W}_\nu$ sowie $\tilde{W}_\nu \tilde{W}_\varrho = 0$ für $\nu \neq \rho$ und $\mu(\tilde{W}_\nu) < +\infty$. Nach Annahme gibt es aber $C_{\nu\tau} \in \mathfrak{c}$; $\nu, \tau = 1, 2, \ldots$, so daß für $S_\nu = \bigcup_{t=1}^{\infty} S_{\nu t}$ mit $S_{\nu t} = \bigcup_{\tau=1}^{t} C_{\nu\tau}$ gilt: $\tilde{W}_\nu \subseteq S_\nu$ (mod $\mathfrak{n}$), $\mu(S_\nu - \tilde{W}_\nu) < \varepsilon_\nu$, $\omega(C_{\nu 1}, \ldots, C_{\nu t}) < \varepsilon_\nu$ für $t, \nu = 1, 2, \ldots$ Es sei $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots$ und $S = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} S_\nu$. Dann ist $\tilde{W} \subseteq S$ (mod $\mathfrak{n}$) und $\mu(S - \tilde{W}) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(S_\nu - \tilde{W}_\nu) < \varepsilon$; es gilt also für das System der $C_{\nu\tau}$ bezüglich W jedenfalls (I, 1) und (I, 2) (Nr. 3. 1.). Zum

Beweise von (II, schw) (Nr. 3. 1.) sei $n \geq 1$ beliebig vorgegeben. Es ist $\mu(S_{\nu t}) < \mu(\tilde{W}_\nu) + \varepsilon_\nu$ und $\sum_{\nu=1}^{n} \mu(S_{\nu t}) < \sum_{\nu=1}^{n} \mu(\tilde{W}_\nu) + \varepsilon$ für $t = 1, 2, \ldots$ Wegen $\sum_{\nu=1}^{n} \tilde{W}_\nu \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n} (\bigcup_{t=1}^{\infty} S_{\nu t})$ (mod $\mathfrak{n}$) gibt es weiter ein t_n^* derart, daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mu(\tilde{W}_\nu) = \mu(\sum_{\nu=1}^{n} \tilde{W}_\nu) \leq \mu(\bigcup_{\nu=1}^{n} S_{\nu t}) + \varepsilon \text{ für } t \geq t_n^*.$$

Weil aber für alle t außerdem $\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{t} \mu(C_{\nu t}) < \sum_{\nu=1}^{n} \mu(S_{\nu t}) + \varepsilon$ ist, folgt $\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{t} \mu(C_{\nu\tau}) < \mu(\bigcup_{\nu=1}^{n} \bigcup_{\tau=1}^{t} C_{\nu\tau}) + 3\varepsilon$. Daher lassen sich die $C_{\nu\tau}$ derart in eine Folge $\{C_\varrho\}$ ordnen, so daß für unendlich viele (also für alle) r gilt: $\omega(C_1, \ldots, C_r) < \varepsilon$. Somit ist (II, schw) erfüllt.

§ 4. Hinreichende Bedingungen für starke und schwache Vitalische Systeme.

4. 1. Wir formulieren zunächst die in Nr. 1. 3. erwähnten hinreichenden Bedingungen dafür, daß $\mathfrak{c}$ ein $\mathfrak{n}'$-starkes bzw. ein schwaches V-System ist.

(A_F) μ-Approximierbarkeit *von* $X \in \mathfrak{g}(F; \mathfrak{n}')$ *von oben her aus* $\mathfrak{c}(F, \mathfrak{n}')_\sigma$: Zu jedem $F \in \mathfrak{c}_s$, jedem $X \in \mathfrak{g}(F; \mathfrak{n}')$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge von Somen $M_\varrho \in \mathfrak{c}(F; \mathfrak{n}')$, $\rho = 1, 2, \ldots$, für deren Vereinigung $S = \bigcup_{\varrho=1}^{\infty} M_\varrho$ gilt:

$$X \subseteq S \text{ (mod } \mathfrak{n}) \text{ und } \mu(S - \tilde{X}) < \varepsilon.$$

(K, st) Starke μ-Kranzeigenschaft (auch Haloeigenschaft) von $\mathfrak{c}$ (mod $\mathfrak{n}'$)[15]: Es existiert eine reelle Zahl $\beta = \beta(\mathfrak{c})$ mit $0 < \beta < +\infty$ von folgender Beschaffenheit: Für jedes $C \in \mathfrak{c}$ und beliebig, aber *endlich viele* $C_\nu \in \mathfrak{c}$ mit $C_\nu C \neq 0$ (mod $\mathfrak{n}'$) und $\mu(C_\nu) \leq \mu(C)$ gilt $\mu(\bigcup_\nu C_\nu) \leq \beta\mu(C)$.

[15] Vgl. z. B. Romanowski, a. a. O.[8], 75.

(K, schw) Schwache μ-Kranzeigenschaft (auch Haloeigenschaft) von $\mathfrak{c}$.[16] Zu jedem reellen α mit $0 < \alpha < 1$ existiert ein reelles $\beta = \beta(\mathfrak{c}; \alpha)$ mit $0 < \beta < +\infty$ von folgender Beschaffenheit: Für jedes $F \in \mathfrak{c}_s$ und je beliebig, aber *endlich viele* $C_\nu \in \mathfrak{c}$ mit $\mu(C_\nu) \leq \alpha^{-1}\mu(C_\nu F)$ gilt $\mu(\bigcup_\nu C_\nu) \leq \beta\mu(F)$.

Zusatz. O. B. d. A. kann $1 \leq \beta < +\infty$ angenommen werden.

Anmerkung. $\beta(\mathfrak{c}; \alpha)$ als Funktion von α werde als Kranzfunktion bezeichnet.

4. 2. Im Gegensatz zu (A_F) stellt (K, st) bzw. (K, schw) eine Forderung sehr spezieller Natur dar. Dabei ist übrigens (K, st) *nicht Spezialfall* von (K, schw).

Es ist (A_F) erblich im folgenden Sinne: Gilt (A_F) für $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{z}$, so auch für jedes $\mathfrak{g}(F; \mathfrak{n}')$ und $\mathfrak{z}(F; \mathfrak{n}')$. Es ist ($K$, st) bzw. ($K$, schw) erblich im folgenden Sinne: Gilt (K, st) bzw. (K, schw) für $\mathfrak{c}$, so auch für jedes (nicht leere) Teilsystem von $\mathfrak{c}$.

Beispiel. Ist $\mathfrak{g}$ das System der Teilmengen eines rationalen, topologischen Raumes $\mathfrak{R}$, ist ferner $\mu \mid \mathfrak{z}$ topologisch adaptiert[17] an $\mathfrak{R}$ und existiert eine Umgebungsbasis $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{R}$ gebildet aus quadrierbaren Umgebungen, so ist (A_F) für $\mathfrak{c}$ erfüllt.

4. 3. Es gilt der

Satz. *Jedes System* $\mathfrak{c}$, *welches (bei den Festsetzungen in § 2) den Bedingungen (*A_F*) und (*K, st*) bzw. (*K, schw*) genügt, ist ein* $\mathfrak{n}'$*-starkes bzw. ein schwaches Vitalisches System.*

Bei dem an anderer Stelle[18] wiederzugebenden Beweis wird zunächst mit Hilfe von (A_F) eine Überdeckung $\bigcup_\varrho C_\varrho$ von $\tilde{A}$ konstruiert, welche den Approximierbarkeitsforderungen (I, 1) und (I, 2) (Nr. 3. 1.) genügt; sodann wird mit Hilfe von (K, st) bzw. (K, schw) diese Überdeckung (unter Erhaltung von (I, 1), (I, 2)) ersetzt durch eine solche mit $\mathfrak{n}'$- bzw. ε-Überlappung (im Sinne von (II, st) bzw. (II, schw)).

---

[16] Vgl. Busemann-Feller, a. a. O.[8], für den Fall des E_n; siehe auch Fußnote 20.

[17] Vgl. Haupt-Pauc, C. R. Acad. Sci. Paris 230 (1950), 711; sowie Pauc, ebenda, 810–811.

[18] Vgl. Haupt-Pauc, Somatic Foundations of the Differentiation Theory of Set Functions. Erscheint später.

4. 4. Aus dem Satz in Nr. 4. 3. folgt speziell die bekannte Tatsache:

Vor. (1) Es seien $x_1, \ldots x_n$ rechtwinklige kartesische Koordinaten im n-dimensionalen E_n mit $n \geq 1$. Der Boolesche Vollverband aller Teilmengen des E_n sei $\mathfrak{g}$. Ferner sei $\mu \mid \mathfrak{z}$ das n-dimensionale (in $\mathfrak{g}$ vollständige, schwach endliche) Lebesguesche Maß L_n und $\mathfrak{n}$ das σ-Ideal aller Lebesgueschen Nullmengen. – (2) Es sei $\mathfrak{c}$ ein (nicht leeres) System von (nicht sämtlich leeren) offenen Würfeln mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen derart, daß mod $\mathfrak{n}$ jeder Punkt des E_n (dem Innern von) Würfeln beliebig kleiner Kantenlängen aus $\mathfrak{c}$ angehört.

Beh. *Jedes solche Würfelsystem* $\mathfrak{c}$ *ist ein* $\mathfrak{n}'$*-starkes Vitalisches System mit* $\mathfrak{n}' = (\theta)$.

Zusatz. Der Satz bleibt richtig, wenn beispielsweise statt der oder neben den offenen Kernen von Würfeln deren abgeschlossenen Hüllen oder irgendwelche, zwischen der abgeschlossenen Hülle $\overline{W}$ und dem offenen Kern $\underline{W}$ eines Würfels $W \in \mathfrak{c}$ gelegene Mengen zugelassen werden (denn es ist $L_n(\overline{W} - \underline{W}) = 0$); oder neben den Würfeln auch Kugeln oder gleichmäßig flachheitsbeschränkte Intervalle.

Bew. Wir haben (A_F) und (K, st) als erfüllt nachzuweisen.

Betr. (A_F). Es sei gesetzt $F_g = \overline{F} - \underline{F}$, wobei $F = \underline{F}$. Weil L_n-fast jeder Punkt von $E_n' = E_n - \overline{F}$ innerhalb beliebig kleiner $C \in \mathfrak{c}(F; \mathfrak{n}')$ liegt, ist mod $\mathfrak{n}$ jede in E_n' enthaltene *offene* Menge O Vereinigung offener, in E_n' enthaltener Würfel aus $\mathfrak{c}(F; \mathfrak{n}')$; und da E_n eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, genügen für die Überdeckung von O (mod $\mathfrak{n}$) schon abzählbar viele dieser Würfel, etwa $C_1, C_2, \ldots$ Gemäß der Definition von L_n lassen sich somit zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und beliebigem $X \in \mathfrak{g}(F; \mathfrak{n})$ die C_ϱ so wählen, daß für $S = \bigcup_\varrho C_\varrho$ gilt $\tilde{X}' = \tilde{X} - F_g \subseteq S$ (mod $\mathfrak{n}$) und $L_n(S - \tilde{X}') < \varepsilon$. Wegen $L_n(F_g) = 0$ ist daher $\tilde{X} \subseteq S$ (mod $\mathfrak{n}$) und $L_n(S - \tilde{X}) < \varepsilon$.

Betr. (K, st). Ist $C \in \mathfrak{c}$ ein fester Würfel der Kantenlänge λ, ferner $C_\nu \in \mathfrak{c}$ mit $CC_\nu \neq \theta$ (mod $\mathfrak{n}'$) und $L_n(C_\nu) \leq L_n(C)$,

$\nu = 1, 2, \ldots$, so liegt C_ν in dem zu C konzentrischen (offenen) Würfel der Kantenlänge 3λ. Mithin ist $L_n(\bigcup_\nu C_\nu) \leq 3^n \lambda^n = 3^n L_n(C)$, so daß (K, st) gilt mit $\beta \geq 3^n$.

§ 5. Schwache Vitalische Systeme in Produkträumen

5. 1. Die Existenz schwacher Vitalischer Systeme in den Faktoren zieht nach sich die Existenz solcher Systeme im Produkt, genauer gilt:

Produktinvarianz der schwachen Vitaleigenschaft.

Vor. (1) Es seien $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}''$ wieder Boolesche σ-Verbände, ferner $\mathfrak{z}', \mathfrak{z}''$ Verengerungen von $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}''$ mit den gemeinsamen Einheiten E', E'' und $\mu' \mid \mathfrak{z}', \mu'' \mid \mathfrak{z}''$ schwach endliche, in $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}''$ vollständige Maße mit den σ-Nullidealen $\mathfrak{n}', \mathfrak{n}''$. Schließlich sei der Boolesche σ-Verband $\mathfrak{g}$ Erweiterung von $\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}''$ mit der Einheit $E = E' \times E''$. – (2) Es sei $\mathfrak{a}$ der *Boolesche Verband der Aggregate* aus $\mathfrak{z}' \times \mathfrak{z}''$ in $\mathfrak{g}$, d. h. der Vereinigungen von je endlich vielen „Intervallen" $Z = Z' \times Z'' \in \mathfrak{g}$ mit $Z' \in \mathfrak{z}'$, $Z'' \in \mathfrak{z}''$. Weiter sei durch $\mu(Z) = \mu'(Z') \cdot \mu''(Z'')$ der (schwach endliche) Produktinhalt $\mu \mid \mathfrak{a}$ definiert[19]. – (3) Es sei $\mu \mid \mathfrak{z}$ die in $\mathfrak{g}$ kleinste (schwach endliche) Erweiterung von $\mu \mid \mathfrak{a}$ zu einem vollständigen Maß mit dem σ-Nullideal $\mathfrak{n}$. (Es ist $\mathfrak{n}' \times \mathfrak{n}'' \subseteq \mathfrak{n}$; ferner ist E Einheit von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{g}$.)[19]

Beh. *Ist $\mathfrak{c}'$ bzw. $\mathfrak{c}''$ ein schwaches Vitalisches System in $\mathfrak{g}'$ bzw. in $\mathfrak{g}''$ bezüglich $X' \in \mathfrak{g}'$ und $\mu' \mid \mathfrak{z}'$ bzw. $X'' \in \mathfrak{g}''$ und $\mu'' \mid \mathfrak{z}''$, so ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' \times \mathfrak{c}''$ ein schwaches Vitalisches System in $\mathfrak{g}$ bezüglich $X = X' \times X'' \in \mathfrak{g}$ und $\mu \mid \mathfrak{z}$.*

Zusatz. Durch vollständige Induktion ergibt sich die Produktionsinvarianz der schwachen Vitalieigenschaft für Produkte von beliebig, aber endlich vielen Faktoren.

Bew. (A) Zum Beweise der Eigenschaften (I) und (II, schw) (Nr. 3. 1.) kann gemäß Nr. 3. 4. angenommen werden, daß $\mu(\tilde{W}) < +\infty$ für $A = W \in \mathfrak{g}X$.

---

[19] Vgl. D. A. Kappos, Math. Ann. 120 (1947) 43ff.

(B) Es sei also $W \in \mathfrak{g}X$ und überdies $\mu(\tilde{W}) < +\infty$. Es gibt dann $C_\varrho \in \mathfrak{c}$, $\varrho = 1, 2, \ldots$, mit $\tilde{W} \subseteq \bigcup_\varrho C_\varrho$ (mod $\mathfrak{n}$); beispielsweise existieren $C'_\nu \in \mathfrak{c}'$ mit $X' \subseteq \bigcup_\nu C'_\nu$ (mod $\mathfrak{n}'$) sowie $C''_\tau \in \mathfrak{c}''$ mit $X'' \subseteq \bigcup_\tau C''_\tau$ (mod $\mathfrak{n}''$), also $C_{\nu\tau} = C'_\nu \times C''_\tau \in \mathfrak{c}$ mit $X \subseteq \bigcup_{\nu\tau} C_{\nu\tau}$ (mod $\mathfrak{n}$). Es ist somit (I, 1) erfüllbar. Gemäß Nr. 3. 3., (2) braucht nur noch bewiesen zu werden die

Beh. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ *existieren unter denjenigen* $\{C_\varrho\}$, *für die* (I, 1) *erfüllt ist, solche, für die zugleich* (II', schw) *gilt.*

(C) *Bew. der Beh.* (B).

(C, 1) Es besitzt $\omega(A; \{C_\varrho\})$ (vgl. Nr. 3. 3., (2)) folgende Eigenschaften:

(a) Ist $G, H \in \mathfrak{z}$ und $H \subseteq G$ (mod $\mathfrak{n}$), ferner $\mu(G) < +\infty$ und $\mu(G - H) < \varepsilon$ sowie $G \subseteq \bigcup_{\varrho=1}^{\infty} C_\varrho$ (mod $\mathfrak{n}$), so gilt

$$\omega(H; \{C_r\}) < \omega(G; \{C_r\}) + \varepsilon.$$

(b) Ist $G_\tau \in \mathfrak{z}$, $\tau = 1, 2, \ldots$, $G_\tau G_\varrho = 0$ (mod $\mathfrak{n}$) für $\tau \neq \varrho$ und $G_t \subseteq \bigcup_{\varrho=1}^{\infty} C_{t\varrho}$ (mod $\mathfrak{n}$) mit $C_{tr} \in \mathfrak{c}$; $t, \varrho = 1, 2, \ldots$, so gilt

$$\omega\left(\sum_{t=1}^{\infty} G_t; \{C_{t\varrho}\}\right) = \sum_{t=1}^{\infty} \omega(G_t; \{C_{t\varrho}\}).$$

Bew. *Betr.* (a) Wegen $H \subseteq G$ (mod $\mathfrak{n}$) ist auch $H \subseteq \bigcup_{\varrho=1}^{\infty} C_\varrho$ (mod $\mathfrak{n}$); ferner ist $-\mu(H) < -\mu(G) + \varepsilon$.

Betr. (b) $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(G_t) = \mu\left(\sum_{t=1}^{\infty} G_t\right)$, $\sum_{t=1}^{\infty} G_t \subseteq \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{t=1}^{\infty} C_{tr}$ (mod $\mathfrak{n}$).

(C, 2) Es genügt, statt W stets $\tilde{W}$ zu betrachten, also $W \in \mathfrak{z}$ anzunehmen. Zufolge (C, 1), (a), ist Beh. (B) bewiesen, wenn sie bewiesen ist für alle Somen G mit $\mu(G) < +\infty$ einer Borelschen Erzeugenden $\mathfrak{b}$ (mod $\mathfrak{n}$) des kleinsten Booleschen σ-Verbandes $\mathfrak{a}'$ über $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ (also $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{z}$), d. h. eines σ-Verbandes $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}'$ derart, daß $\mathfrak{a}'$ (mod $\mathfrak{n}$) im kleinsten σ, δ-System $\mathfrak{b}'$ über $\mathfrak{b}$ enthalten ist. In der Tat: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und jedem $H \in \mathfrak{z}$ existiert dann[13] ein $G \in \mathfrak{b}$ mit $H \subseteq G$ (mod $\mathfrak{n}$) und $\mu(G - H) < \varepsilon$.

Nach Definition von $\mathfrak{z}$ bzw. $\mathfrak{z}'$ kann $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_\sigma$ gesetzt werden[19a]. Aber jedes $G \in \mathfrak{a}_\sigma$ mit $\mu(G) < +\infty$ ist Vereinigung abzählbar vieler paarweise fremder Somen $G_t \in \mathfrak{a}$ (mit $\mu(G_t) < +\infty$), $t = 1, 2, \ldots$ Gemäß (C, 1), (b), genügt es daher, die Beh. (B) für jedes $G_t \in \mathfrak{a}$ mit $\mu(G_t) < +\infty$ und jedes $\varepsilon > 0$ zu beweisen. Zufolge der Definition von $\mathfrak{a}$ ist aber jedes $G_t \in \mathfrak{a}$ Vereinigung endlich vieler paarweise fremder „Intervalle" $Z = Z' \times Z''$ mit $\mu(Z) < +\infty$. Gemäß (C. 1), (b), genügt es daher, die Beh. (B) nur für solche Intervalle zu beweisen.

(C, 3) Entsprechend den Folgerungen in (C, 2) sei gegeben

$$Z = Z' \times Z'' \in \mathfrak{z}' \times \mathfrak{z}'' \text{ mit } \mu'(Z')\,\mu''(Z'') < +\infty.$$

Voraussetzungsgemäß existieren zu jedem $\eta > 0$ solche $C'_\varrho \in \mathfrak{c}'$ und $C''_\tau \in \mathfrak{c}''$; $\varrho, \tau = 1, 2, \ldots$, daß (I, 1) gilt: $Z' \subseteq \bigcup_{\varrho=1}^{\infty} C'_\varrho \pmod{\mathfrak{n}'}$, $Z'' \subseteq \bigcup_{\tau=1}^{\infty} C''_\tau \pmod{\mathfrak{n}''}$ und (II', schw.): $\omega(Z'; \{C'_\varrho\}) < \eta$, $\omega(Z''; \{C''_\tau\}) < \eta$. Setzt man $C_{\varrho\tau} = C'_\varrho \times C''_\tau$, so ist $C_{\varrho\tau} \in \mathfrak{c}$; $\varrho, \tau = 1, 2, \ldots$, und für passende $N' \in \mathfrak{n}'$, $N'' \in \mathfrak{n}''$ gilt $Z \subseteq (N' \cup \bigcup_{\varrho=1}^{\infty} C'_\varrho) \times (N'' \cup \bigcup_{\tau=1}^{\infty} C''_\tau) = (\bigcup_{\varrho,\tau} C_{\varrho\tau}) \cup (\bigcup_{\tau} (N' \times C''_\tau)) \cup \cup (\bigcup_{\varrho} (C'_\varrho \times N'')) \cup (N' \times N'')$, also $Z \subseteq \bigcup_{\varrho,\tau} C_{\varrho\tau} \pmod{\mathfrak{n}}$, d. i. (I, 1). Ferner gilt $\omega(Z; \{C_{\varrho\tau}\}) = (\sum_\varrho \mu'(C'_\varrho))(\sum_\tau \mu''(C''_\tau)) - \mu'(Z')\mu''(Z'') < (\mu'(Z') + \eta)(\mu''(Z'') + \eta) - \mu'(Z')\mu''(Z'') < (1 + \mu'(Z') + \mu''(Z''))\,\eta$, falls $0 < \eta < 1$ gewählt wird. Für passendes η mit $0 < \eta < 1$ ist daher $\omega(Z; \{C_{\varrho\tau}\}) < \varepsilon$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$; d. i. (II, schw).

Anmerkung zum Beweisteil (B). Gemäß Nr. 3. 3., (2), haben wir in (B) des vorstehenden Beweises (I) und (II, schw) ersetzt durch (I, 1) und (II', schw). Man kann aber auch unter Benutzung von Nr. 3. 2., (a), unmittelbar zeigen, daß (I) produktionsinvariant ist.

5. 2. Zum Schluß beweisen wir noch einen Satz, demzufolge das Produkt von Systemen, welche der schwachen Kranzbedin-

---

[19a] Denn $\mathfrak{g}$ ist als Boolescher σ-Verband σ, δ-distributiv, also $\mathfrak{a}_\sigma \subseteq \mathfrak{g}$ ein σ-Verband.

gung (K, schw) genügen, ebenfalls dieser Bedingung genügt. Zwecks kurzer Formulierung der Voraussetzung dieses Satzes führen wir noch folgende Bezeichnung ein: Ein System $\mathfrak{c}$ besitzt die *verschärfte schwache* (μ-)*Kranzeigenschaft* (K, v schw), wenn (K, schw) erfüllt ist für alle $F \in \mathfrak{c}_0$, wobei $\mathfrak{c}_0$ der kleinste Boolesche Verband über $\mathfrak{c}$ (in $\mathfrak{g}$) ist. (Bei (K, schw) werden nur $F \in \mathfrak{c}_s$ in Betracht gezogen; es ist $\mathfrak{c}_s \subseteq \mathfrak{c}_0$). Der in Aussicht genommene Satz[20] lautet nun:

Produktinvarianz der schwachen Kranzeigenschaft.

Vor. *Wie in Nr.* 5. 1. *für die Produktinvarianz der schwachen Vitaleigenschaft.*

Beh. *Besitzen* $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ *die schwache Kranzeigenschaft* (K, schw) *und besitzt eines von ihnen beiden (etwa* $\mathfrak{c}'$*) sogar die verschärfte schwache Kranzeigenschaft* (K, v schw), *so besitzt auch* $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' \times \mathfrak{c}''$ *die schwache Kranzeigenschaft.*

Zusatz. Vermittelst vollständiger Induktion erhält man die Produktinvarianz der schwachen Kranzeigenschaft für Produkte von n Faktoren, von denen (mindestens) $(n-1)$ sogar die verschärfte schwache Kranzeigenschaft besitzen.

Bew. (A) *Vorbemerkungen.*

(I). Es sei $C'_\varrho \in \mathfrak{c}'$, $C''_\varrho \in \mathfrak{c}''$, $\rho = 1, \ldots, r$; ferner $C_\varrho = C'_\varrho \times C''_\varrho$ und $F = \bigcup_{\varrho=1}^{r} C_\varrho$. Schließlich sei $J'_\varkappa \in \mathfrak{c}'$, $J''_\varkappa \in \mathfrak{c}''$; $\varkappa = 1, \ldots, k$; und $J_\varkappa = J'_\varkappa \times J''_\varkappa$ mit $0 < \mu(J_\varkappa) \leq \alpha^{-1} \mu(J_\varkappa F)$, wobei α beliebig mit $0 < \alpha < 1$.

(II) Der kleinste Boolesche Verband (kurz BVerband) in $\mathfrak{g}'$ über dem Somensystem gebildet aus $C'_1, \ldots, C'_r$; $J'_1, \ldots, J'_k$ sei $\mathfrak{b}'$;

[20] Satz und Beweis stellen eine, auf den oben im Text vorliegenden Fall zugeschnittene, Modifikation von Ausführungen bei Busemann-Feller, a. a.O.[8] dar; diese Ausführungen beziehen sich auf den E_n. Bei Busemann-Feller wird überdies eine *Kennzeichnung* der aus Umgebungen gebildeten schwachen Vitalischen Ableitungsbasen im E_n gegeben und zwar mittelst einer – wie wir sagen können – „Grenzeigenschaft"; vgl. die Wiedergabe in Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnungen, Berlin 1938, 3. Bd. 122ff.

entsprechend sei $\mathfrak{b}''$ erklärt. (Es ist $\mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{c}_0'$, $\mathfrak{b}'' \subseteq \mathfrak{c}_0''$). Es ist dann[21] $\mathfrak{b}'$ bzw. $\mathfrak{b}''$ atomar mit endlich vielen Atomen p' bzw. p'' derart, daß jedes $B' \in \mathfrak{b}'$ bzw. $B'' \in \mathfrak{b}''$, speziell also jedes der $C_1', \ldots, J_k'$ bzw. $C_1'', \ldots, J_k''$ Vereinigung solcher p' bzw. p'' ist. Entsprechend ist jedes der $C_1, \ldots, C_r, J_1, \ldots, J_k$ und damit auch F Vereinigung je endlich vieler Atome $p = p' \times p''$ des kleinsten BVerbandes (in $\mathfrak{g}$) über dem System der $C_1, \ldots, J_k$. Wir bezeichnen als p'-Schnitt $B(p')$ von $B = \bigcup_{\tau=1}^{t} B_\tau' \times B_\tau''$, wo $B_\tau' \in \mathfrak{b}'$, $B_\tau'' \in \mathfrak{b}''$, die (ev. leere) Vereinigung aller derjenigen B_τ'', für deren zugehörige B_τ' gilt $p' \subseteq B_\tau'$; unter der p'-Tranche von B wird dann $p' \times B(p')$ verstanden. Es ist $B(p') \in \mathfrak{b}''$ und *B ist gleich der Vereinigung aller seiner (endlich vielen) nicht leeren p'-Tranchen; diese sind fremd für verschiedene p'*. Entsprechend sind $B(p'')$ und $B(p'') \times p''$ erklärt. Ist speziell $B_\tau'' \in \mathfrak{c}_s'' \subseteq \mathfrak{b}''$, $\tau = 1, \ldots, t$, so ist $B(p') \in \mathfrak{c}_s''$; dies gilt also insbesondere für $B = F$.

(**B**) *Beweis der Behauptung des Satzes.*

(I) *Umformung von $\mu(J_\varkappa F) : \mu(J_\varkappa)$, wobei* $0 < \mu(J_\varkappa) < +\infty$. Setzt man $C' = C_1' \cup \ldots \cup C_h'$, so gilt $J_\varkappa \cap F = J_\varkappa F = = (\bigcup_{p' \subseteq J_\varkappa'} p' \times J_\varkappa'') \cap (\bigcup_{p' \subseteq C'} p' \times F(p')) = \bigcup_{p' \subseteq J_\varkappa'} p' \times J_\varkappa'' F(p')$, *wobei also die Vereinigung jeweils zu bilden ist über alle p', die in $J_\varkappa'$ bzw. in C' enthalten sind.* Setzt man daher zur Abkürzung

$$\alpha_\varkappa''(p') = \mu''(J_\varkappa'' F(p')) : \mu''(J_\varkappa''), \quad \varkappa = 1, \ldots, k,$$

wobei jeweils $p' \subseteq J_\varkappa'$, so folgt aus der Annahme über $J_\varkappa$ und F (vgl. (A), (I)), sowie aus $\mu(J_\varkappa) = \mu'(J_\varkappa') \cdot \mu''(J_\varkappa'')$:

$$(\mathrm{I}_*) \quad 0 < \alpha \leq \mu(J_\varkappa F) : \mu(J_\varkappa) = \Big(\sum_{p' \subseteq J_\varkappa'} \mu'(p')\, \alpha_\varkappa''(p')\Big) : \mu(J_\varkappa') \leq 1\,,$$
$$\varkappa = 1, \ldots, k;$$

---

[21] Ist $\mathfrak{b}$ ein Boolescher Verband mit Einheit E, ist ferner $A_\nu \in \mathfrak{b}$, $\nu = 1, \ldots, n$, so ist auch $A_\nu' = E - A_\nu \in \mathfrak{b}$ und die distributive Entwicklung von $(A_1 + A_1')(A_2 + A_2') \ldots (A_n + A_n')$ liefert eine Zerlegung von E in 2^n fremde Somen p_λ von $\mathfrak{b}$. Da jedes A_ν Vereinigung je gewisser der p_λ ist, gilt Gleiches auch für jedes Soma des (in $\mathfrak{g}$) kleinsten Booleschen Verbandes $\mathfrak{a}$ (mit E als Einheit) über dem System der $A_1, \ldots, A_n$. Daher ist $\mathfrak{a}$ atomar mit den p_λ als Atomen.

die Ungleichung rechterhand ergibt sich aus $\alpha''_\varkappa(p') \leq 1$ wegen

$$\mu'(J'_\varkappa) = \sum_{p' \subseteq J'_\varkappa} \mu'(p').$$

(II) *Anwendung von* (K, v schw) *für* $\mathfrak{c}'$. Es sei γ fest gegeben mit $0 < \gamma < \alpha$. Ferner *sei* $S'_\varkappa$ *die Vereinigung aller* $p' \subseteq J'_\varkappa$, *deren zugehörige* $\alpha''_\varkappa(p') \geq \gamma$ sind $\varkappa = 1, \ldots, k$. Wegen $\alpha''_\varkappa(p') \leq 1$ für alle p' und $\varkappa$ ist andererseits

$$\Big(\sum_{p' \subseteq S'_\varkappa} \mu'(p')\,\alpha''(p')\Big) : \Big(\sum_{p' \subseteq S'_\varkappa} \mu'(p')\Big) \leq 1,$$

wobei die Vereinigung wieder gebildet wird (bei festem $\varkappa$) über alle p' mit $p' \subseteq S'_\varkappa$. In Rücksicht auf ($\mathrm{I}_*$) sowie darauf, daß $\alpha''_\varkappa(p') < \gamma$ für $p' \subseteq J'_\varkappa - S'_\varkappa$, folgt daher $\alpha\,\mu'(J'_\varkappa) \leq \gamma\,\mu'(J'_\varkappa - S'_\varkappa) + \mu'(S'_\varkappa)$ oder

$$0 < \alpha'\,\mu'(J'_\varkappa) \leq \mu'(S'_\varkappa)$$

mit $\alpha' = (\alpha - \gamma) : (1 - \gamma)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, wobei $0 < \gamma < \alpha < 1$. Insbesondere ist also $S'_\varkappa \neq 0$.

Wir setzen nun $S_\varkappa = S'_\varkappa \times J''_\varkappa$ und $S = \bigcup_{\varkappa=1}^{k} S_\varkappa$. Dann ist $S'_\varkappa = S_\varkappa(p'')\,J'_\varkappa$ für jedes p'' mit $p'' \subseteq J''_\varkappa$ und jedes $\varkappa = 1, \ldots, k$. Daher läßt sich die letzte Ungleichung auch schreiben

$$\mu'(J'_\varkappa) \leq \bar{\alpha}\,\mu'(S_\varkappa(p'')\,J'_\varkappa) \leq \bar{\alpha}\,\mu'(S(p'')\,J'_\varkappa) \text{ für } p'' \subseteq J''_\varkappa;$$

dabei ist $\bar{\alpha} = (\alpha')^{-1}$. Da nun $S(p'') \in \mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{c}'_0$ und da (K, v schw) für $\mathfrak{c}'$ gilt, so folgt bei festem p''_0 aus der letzten Ungleichung

$$(\mathrm{II}_*) \qquad \mu'\Big(\bigcup_{p''_0 \subseteq J''_\varkappa} J'_\varkappa\Big) \leq \beta'\,\mu'(S(p''_0))$$

für beliebiges aber festes $p''_0 \in \mathfrak{b}''$ mit $\beta' = \beta'(\alpha') = \beta(\mathfrak{c}'; \alpha')$ (gemäß Nr. 4. 1.); die Vereinigung linkerhand gebildet über alle $\varkappa$, für die $p''_0 \subseteq J''_\varkappa$.

(III) *Anwendung von* (K, schw) *für* $\mathfrak{c}''$. Es ist

$$S = \bigcup_{\varkappa=1}^{k} S_\varkappa = \bigcup_{\varkappa=1}^{k}\Big(\bigcup_{p' \subseteq S'_\varkappa} p' \times S_\varkappa(p')\Big) = \bigcup_{p' \subseteq S'_1 \cup \ldots \cup S'_k} p' \times S(p'),$$

wobei $S'_\varkappa \in \mathfrak{b}'$, $S(p') \in \mathfrak{b}''$. Nach Definition von $S'_\varkappa$ gilt bei beliebigem, aber festem Atom $p'_0 \in \mathfrak{b}'$ für alle $\varkappa$ mit $p'_0 \subseteq S'_\varkappa$, also für alle $J''_\varkappa \subseteq S(p'_0)$

$$\mu''(J''_\varkappa) \leq \gamma^{-1} \mu''(J''_\varkappa F(p'_0)).$$

Weil $F(p'_0) \in \mathfrak{c}''_s$ und weil (K, schw) für $\mathfrak{c}''$ gilt, ist daher

$$(\mathrm{III}_*) \qquad \mu''(S(p'_0)) \leq \beta''(\gamma)\mu''(F(p'_0)) \text{ für jedes } p'_0;$$

dabei ist $\beta''(\gamma) = \beta(\mathfrak{c}''; \gamma)$.

(IV) *Übergang zu F und zu* $H = J_1 \cup \ldots \cup J_k$. Es ist $H(p'') = \bigcup_{p'' \subseteq J''_\varkappa} J'_\varkappa$. Bildet man die Vereinigung über alle p'' mit $p'' \subseteq J'' = J''_1 \cup \ldots \cup J''_k$, $p'' \subseteq J''_\varkappa$, so kommt $H = \bigcup_{p'' \subseteq J''} H(p'') \times p''$. Entsprechend ist $S = \bigcup_{p'' \subseteq J''} S(p'') \times p''$. Multipliziert man nun

(II_*) mit $\mu''(p''_0)$ und summiert über alle $p''_0 \subseteq J''$, so ergibt sich wegen $\mu(H) = \sum_{p''_0 \subseteq J''} \mu'(H(p''_0))\, \mu''(p''_0)$ usw.

$$(\mathrm{IV}_*) \qquad \mu(H) \leq \beta' \mu(S).$$

Analog folgt aus (III_*) bei Summation über alle $p'_0 \subseteq S' = S'_1 \cup \ldots \cup S'_k$

$$\sum_{p'_0 \subseteq S'} \mu'(p'_0)\, \mu''(S(p'_0)) \leq \beta''(\gamma) \sum_{p'_0 \subseteq S'} \mu'(p'_0) \cdot \mu''(F(p'_0))$$
$$\leq \beta''(\gamma) \Big(\sum_{p'_0 \subseteq C'} \mu'(p'_0)\, \mu''(F(p'_0))\Big)$$

letzteres, weil $F(p') \neq 0$ (höchstens) für $p' \subseteq C'$; oder also

$$(\mathrm{IV}_{**}) \qquad \mu(S) \leq \beta''(\gamma)\, \mu(F).$$

Aus (IV_*) und (IV_{**}) folgt aber

$$\mu\Big(\bigcup_{\varkappa=1}^{k} J_\varkappa\Big) \leq \beta\mu(F) \text{ mit } \beta = \beta'(\alpha')\,\beta''(\gamma) \text{ (für jedes } \gamma \text{ mit } 0 < \gamma < \alpha).$$

5.2.1. In Ergänzung zu Nr. 5.2. zeigen wir noch:

Ein System $\mathfrak{c}$ *besitzt die verschärfte* μ-*Kranzeigenschaft* (K, v schw) *jedenfalls dann, wenn* $\mathfrak{c}$ *außer* (K, schw) *noch die Approximierbarkeitseigenschaft* (I) *in* Nr. 3.1. *besitzt.*

Bew. Mit Hilfe von (I) läßt sich jedes $B \in \mathfrak{c}_0$ dem Maße nach beliebig genau approximieren durch passende $F \in \mathfrak{c}_s$. Genauer: Es sei $0 < \mu(J_\varkappa) \leq \alpha^{-1} \mu(J_\varkappa B)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$. Wegen (I) und $\mu(B) < +\infty$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $F \in \mathfrak{c}_s$ mit $0 \leq \mu(F - B) < \varepsilon$ und $0 \leq \mu(B - F) < \varepsilon$ (Nr. 3. 2., (a)). Wegen $J_\varkappa(F - B) \subseteq F - B$ ist $0 \leq \mu(J_\varkappa F - B) < \varepsilon$; ebenso $0 \leq \mu(J_\varkappa B - F) < \varepsilon$, $k = 1, \ldots, k$. Daraus folgt u. a. $0 \leq \mu(F) < \mu(B) + \varepsilon$ und $0 \leq \mu(J_\varkappa B) < \mu(J_\varkappa F) + \varepsilon$. Bei beliebigem $\lambda > 1$ ist demgemäß $\mu(F) < \lambda\mu(B) - ((\lambda - 1)\mu(B) - \varepsilon)$ und $\mu(J_\varkappa B) < < \lambda\mu(J_\varkappa F) - ((\lambda - 1)\mu(J_\varkappa B) - \lambda\varepsilon)$. Wird also $\varepsilon > 0$ kleiner als $\lambda^{-1}(\lambda - 1)$ Min $(\mu(J_\varkappa B);\ \varkappa = 1, \ldots, k)$ gewählt, so gilt $\mu(F) < \lambda\mu(B)$ und $\mu(J_\varkappa B) < \lambda\mu(J_\varkappa F)$.

Aus $\mu(J_\varkappa) \leq \alpha^{-1} \mu(J_\varkappa B)$ folgt somit $\mu(J_\varkappa) \leq \lambda\alpha^{-1} \mu(J_\varkappa F)$ und (wegen (K, schw)),

$$\mu\Big(\bigcup_{\varkappa=1}^{k} J_\varkappa\Big) \leq \beta(\lambda^{-1}\alpha)\,\mu(F) < \beta(\lambda^{-1}\alpha)\,\lambda\mu(B), \text{ d. h.}$$

$$\mu\Big(\bigcup_{\varkappa=1}^{k} J_\varkappa\Big) \leq \bar{\beta}(\alpha)\,\mu(B) \text{ mit } \bar{\beta}(\alpha) = \lambda\beta(\lambda^{-1}\alpha).$$

Zusatz. Vor. Es gelte (K, schw); ferner sei $A \in \mathfrak{z}$ mit $\mu(A) < +\infty$ beliebig genau approximierbar durch passende $F \in \mathfrak{c}_s$.

Beh. Aus $0 < \mu(J_\varkappa) \leq \alpha^{-1} \mu(J_\varkappa A)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, folgt $\mu(\bigcup_\varkappa J_\varkappa) \leq \underline{\beta}(\alpha)\,\mu(A)$, wobei $\underline{\beta}(\alpha) = \inf\,(\beta(\alpha');\ 0 < \alpha' \leq \alpha)$.

Bew. Bis auf die Beh. betr. $\underline{\beta}(\alpha)$ folgt alles aus dem obigen Bew., wenn man darin B durch A ersetzt. Weiter kann in der Beh. statt $\underline{\beta}(\alpha)$ zunächst gesetzt werden $\hat{\beta}(\alpha) = \lambda\beta(\lambda^{-1}\alpha)$ mit beliebigem $\lambda > 1$. Andererseits kann $\beta(\alpha) = \beta(\mathfrak{c}; \alpha)$ in (K, schw) offensichtlich ersetzt werden durch $\underline{\beta}(\alpha) = \inf\,(\beta(\alpha');\ 0 < \alpha' \leq \alpha)$, so daß $\hat{\beta}(\alpha) = \lambda\underline{\beta}(\lambda^{-1}\alpha)$ gesetzt werden kann. Wegen $\underline{\beta}(\alpha) = = \inf\,(\underline{\beta}(\alpha');\ 0 < \alpha' \leq \alpha)$ folgt jetzt die Beh.

5. 3. Aus Nr. 5. 2. folgt die (ebenfalls bekannte) Tatsache:

Vor. *Wie in* Nr. 4. 4, *Vor.* (1).

Beh. (I). *Jedes (nicht leere) System* $\mathfrak{c}$ *von n-dimension. achsenparallelen (nicht sämtlich leeren) Intervallen besitzt die schwache*

Kranzeigenschaft (K, schw) *bezüglich des n-dimensionalen Lebesgueschen Maßes* L_n; $n \geq 1$. – (II) *Ein System* $\mathfrak{i}$ *von achsenparallelen Intervallen ist ein schwaches Vitalisches System jedenfalls dann, wenn* L_n*-fast jeder Punkt des* E_n *dem Innern von Intervallen aus* $\mathfrak{i}$ *angehört, die beliebig kleine Durchmesser besitzen.*

Anmerkung. Die Intervalle können dabei abgeschlossen oder offen sein oder beliebige Mengen zwischen abgeschlossener Hülle und offenem Kern eines Intervalles sein.

Bew. *Betr. Beh.* (I). Wegen der Erblichkeit von (K, schw) (vgl. Nr. 4. 2.) genügt es, das System $\mathfrak{i}_n$ *aller* (achsenparalleler) Intervalle des E_n zu betrachten. Aber $\mathfrak{i}_n = \mathfrak{i}_1 \times \ldots \times \mathfrak{i}_1$. Gemäß Nr. 5. 2. braucht daher nur gezeigt zu werden, daß (K, v schw) für $\mathfrak{i}_1$ gilt. Nun ist aber der kleinste BVerband $\mathfrak{i}_1'$ über $\mathfrak{i}_1$ (in E_1) gleich $(\mathfrak{i}_1)_s$, d. h. gleich dem System der Vereinigungen je endlich vieler Intervalle, so daß hier (K, schw) stets (K, v schw) nach sich zieht. Es sei also $0 < \alpha < 1$ beliebig, $F \in (\mathfrak{i}_1)_s$ und $J_\varkappa \in \mathfrak{i}_1, \varkappa = 1, \ldots, k$, mit $L_1(J_\varkappa) \leq \alpha^{-1} L_1(J_\varkappa F)$. Es ist[22] dann $H = J_1 \cup \ldots \cup \cup J_k$ Vereinigung von gewissen unter den $J_\varkappa$, etwa von $J_1', \ldots, J_t'$ derart, daß der Durchschnitt von je dreien dieser J_t' leer ist; denn von irgend drei gegebenen Intervallen mit nicht leerem Durchschnitt ist (mindestens) eines in der Vereinigung der beiden anderen enthalten (nämlich im größten der 3 Intervalle, die durch Vereinigung je zweier der 3 ursprünglich gegebenen entstehen). Somit ist $\sum\limits_\tau L_1(J_\tau' F) \leq 2\, L_1(HF) \leq 2\, L_1(F)$. Aus $L_1(J_\tau') \leq \alpha^{-1} L_1(J_\tau' F)$, $\tau = 1, \ldots, t$, folgt $\sum\limits_\tau L_1(J_\tau') \leq \alpha^{-1} \cdot \cdot (\sum\limits_\tau L_1(J_\tau' F))$. Wegen $H = \bigcup\limits_{\tau=1}^{t} J_\tau'$ ist aber $L_1(H) \leq \sum\limits_\tau L_1(J_\tau')$ und mithin $L_1(H) \leq 2\,\alpha^{-1} L_1(F)$. Daher ist ($K$, schw) bzw. ($K$, v schw) für $\mathfrak{i}_1$ mit $\beta(\alpha) = 2\,\alpha^{-1}$ erfüllt.

Betr. Beh. (II). Daß $\mathfrak{i}_n$ die Eigenschaft (A_F) (Nr. 4. 1.) besitzt, ergibt sich wie in Nr. 4. 4., Bew. Da zufolge Beh. (I) auch (K, v schw) gilt, folgt Beh. (II) aus Nr. 4. 3.

---

[22] Busemann-Feller a. a. O.[8] oder a. a. O.[20], 124 unten.