Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1949

München 1950

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eine Bemerkung über die Länge einer stetigen Kurve

Von Georg Nöbeling in Erlangen

Vorgelegt von Herrn O. Haupt am 11. November 1949

Ist B ein Bogen (topologisches Bild einer Strecke) im Euklidischen Raum R_n mit endlicher Länge $l(B)$, so ist

(1) $$l(B) = L(B),$$

wobei L ein beliebiges der im § 1 unserer Arbeit „Über die Länge der Euklidischen Kontinuen. I"[1] genannten linearen Maße bedeutet, also beispielsweise das lineare Maß L_C von C. Carathéodory.

Wir wollen die Gleichung (1) verallgemeinern. An Stelle eines Bogens betrachten wir eine stetige Kurve, d. h. ein eindeutiges, stetiges Bild $K = f(T)$ im R_n einer Strecke $T = [0 \leqq t \leqq t^0]$. Die (Durchlaufungs-) Länge $L_f(K)$ von K ist genau so wie die Länge eines Bogens definiert: Wir wählen in der Strecke T endlich viele Punkte $t_0, t_1, \ldots, t_k$ mit $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ und verbinden die Bildpunkte $f(t_{i-1})$ und $f(t_i)$ durch eine Strecke S_i $(i = 1, \ldots, k)$; die obere Grenze (für alle Möglichkeiten, solche Punkte t_i zu wählen) der elementaren Längensummen $l(S_1) + \cdots + l(S_k)$ ist $L_f(K)$.

Für jede natürliche Zahl $j = 1, 2, \ldots$ und für $j = +\infty$ bezeichnen wir mit K_j die Menge aller Punkte p von K, welche genau j Urbildpunkte in T haben. *Es bedeute L eines der im § 1, I. 2 und III–IX unserer obengenannten Arbeit angegebenen linearen Maße.* Dann existiert $L(K_j)$ für jedes j. Dies ist trivial, außer wenn L das integralgeometrische Maß L_F^1 von Favard oder ein Maß L_K^1 von Kolmogoroff ist. Nun ist L_F^1 für jede analytische Menge definiert, wie wir an anderer Stelle[2] gezeigt haben, und L_K^1 ist nach seiner Definition für jede analytische Menge erklärt. Da jede Borelsche Menge analytisch ist, genügt

[1] Jahresbericht der Dt. Mathematikervereinigung 52 [1942] S. 132–160.
[2] Math. Zeitschr. 48 [1943] S. 757.

es also, zu zeigen, daß die Mengen K_j **Borelsche** Mengen sind. Zunächst sei j eine natürliche Zahl. Bezeichnen wir mit H_j die Menge aller Punkte von K mit mindestens j Urbildpunkten in T, so ist $K_j = H_j - H_{j+1}$. Weiter sei, für ein beliebiges natürliches m, $H_j(m)$ die Menge aller Punkte von K, deren Urbildmenge mindestens j Punkte enthält, die zu je zwei einen Abstand $\geqq \frac{1}{m}$ haben. Dann ist $H_j(m)$ abgeschlossen und $H_j = \sum_{m=1}^{\infty} H_j(m)$. Also ist K_j Borelsch. Wegen $K_\infty = K - (K_1 + K_2 + \ldots)$ ist dann auch K_∞ Borelsch.

Unsere Behauptung lautet nun folgendermaßen:

Satz. *Es gilt die Gleichung*

$$L_f(K) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot L(K_j) + \infty \cdot L(K_\infty); \tag{2}$$ [3,4]

dabei ist

$$\infty \cdot L(K_\infty) = L(K_\infty) = 0, \tag{3}$$

wenn $L_f(K) < +\infty$ *ist.*

Beweis. 1. Fall: $L(K) < +\infty$. Dann gilt

$$L(K_j) = L_F^1(K_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, +\infty), \tag{4}$$

da die Mengen K_j Borelsch sind[5]. Bezeichnen wir für eine beliebige Hyperebene E des Raumes mit $n(E) \leqq +\infty$ die Anzahl der Punkte t des Intervalles T, deren Bilder $f(t)$ in E liegen, so ist, wie wir unten beweisen werden,

$$L_f(K) = c \int n(E)\, \dot{E}. \tag{5}$$

Weiter ist

$$n(E) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot m(K_j, E) + \infty \cdot m(K_\infty, E),$$

---

[3] Es sei $\infty \cdot 0 = 0$ und $\infty \cdot p = +\infty$, wenn $p > 0$ ist.

[4] In Worten kann man den Inhalt der Gleichung (2) etwa folgendermaßen aussprechen: $L_f(K)$ ist das Maß L von K, wobei aber jeder Punkt von K mit seiner Vielfachheit zu zählen ist.

[5] a. a. O. [Anm. 1] Satz 4.

wobei $m(K_j, E)$ die Anzahl derjenigen Punkte von K_j ist, die in E liegen ($j = 1, 2, \ldots, +\infty$). Wie oben festgestellt wurde, existiert

$$L_F^1(K_j) = c \int m(K_j, E)\, \dot{E} \quad (j = 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Also ist

$$L_f(K) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot L_F^1(K_j) + \infty \cdot L_F^1(K_\infty).$$

Wegen (4) gilt also (2).

2. Fall: $L(K) = +\infty$. Wegen $L(K) \leqq L_f(K)$[6] gilt dann einerseits

$$L_f(K) = +\infty. \tag{6}$$

Da $K = \sum_{j=1}^{\infty} K_j + K_\infty$, also $L(K) \leqq \sum_{j=1}^{\infty} L(K_j) + L(K_\infty) \leqq$ $\leqq \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot L(K_j) + \infty \cdot L(K_\infty)$ gilt, ist anderseits

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot L(K_j) + \infty \cdot L(K_\infty) = +\infty. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt wieder (2).

Aus (2) folgt unmittelbar (3).

Wir haben nun noch die Gleichung (5) zu beweisen. Wir können zunächst genau so schließen wie W. Maak im speziellen Fall, daß der R_n die Ebene und die Abbildung f topologisch, also $f(T) = K$ ein Bogen ist[7]. Als *Schnittpunkt* der Kurve $f(T)$ mit einer Hyperebene E hat man dabei einen Punkt $f(t)$ zu definieren, der die Eigenschaft besitzt, daß $f(t)$ in E liegt und für jedes $\varepsilon < 0$ zwei Parameterwerte t' und t'' in T existieren derart, daß $|t - t'| < \varepsilon$ und $|t - t''| < \varepsilon$ ist und die Punkte $f(t')$ und $f(t'')$ auf verschiedenen Seiten von E (insbesondere also nicht auf E) liegen. Ist $f(t)$ kein Schnittpunkt von $f(T)$ mit E, so heiße $f(t)$ ein *lokaler Stützpunkt* und E eine *lokale Stützhyperebene* von $f(T)$; man sagt auch, E stütze $f(T)$ lokal in $f(t)$. Anders als im Maakschen Spezialfall müssen

[6] a. a. O. [Anm. 1] S. 159.

[7] W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, 1. Heft, 2. Aufl., Leipzig 1936, S. 46–47.

wir nur den Nachweis führen, daß die Menge $\mathfrak{T}$ aller lokalen Stützhyperebenen E von $f(T)$ eine Lebesguesche Nullmenge im Raum $\mathfrak{R}$ aller Hyperebenen ist[8]. Man kann folgendermaßen vorgehen. Stützt E die Kurve $f(T)$ in $f(t)$ lokal, so existiert ein $r > 0$ derart, daß (mindestens) eine der beiden offenen Halbkugeln, in welche die offene Kugel mit dem Mittelpunkt $f(t)$ und dem Radius r durch Tilgung ihres Durchschnittes mit E zerfällt, keinen Punkt $f(t')$ enthält mit $|t - t'| < r$. Die Menge aller r mit dieser Eigenschaft ist dann ein Intervall $0 < r \leqq r(t, E)$. Die genannte offene Halbkugel bezeichnen wir mit $H(t, E, r)$ (haben beide Halbkugeln die genannte Eigenschaft, so bezeichnen wir eine von ihnen mit $H(t, E, r)$). Für jedes $\rho > 0$ ist die Menge $\mathfrak{T}_\varrho$ aller Hyperebenen E, die $f(T)$ in mindestens einem Punkt $f(t)$ mit $r(t, E) \geqq \rho$ lokal stützen, kompakt und daher meßbar im Raum aller Hyperebenen, und es ist $\mathfrak{T} = \sum \mathfrak{T}_\varrho$, wobei summiert wird über alle rationalen $\rho > 0$. Es genügt daher zu zeigen[9], daß $\mathfrak{T}_\varrho$ für jedes $\rho > 0$ eine Nullmenge ist. Hierzu genügt es weiter, folgendes zu beweisen[9]: Es sei E^0 eine Hyperebene aus $\mathfrak{T}_\varrho$; eine Seite von E^0 sei ausgezeichnet; es sei $\mathfrak{T}_\varrho^0$ die Menge aller Hyperebenen E aus $\mathfrak{T}_\varrho$, die zu E^0 parallel sind und bei denen auf der ausgezeichneten Seite (d. h. der der ausgezeichneten Seite von E^0 entsprechenden Seite) mindestens eine Halbkugel $H(t, E, \rho)$ liegt; dann ist $\mathfrak{T}_\varrho^0$ eine endliche Menge. Und hierfür endlich genügt es, zu zeigen, daß die folgendermaßen definierte Menge $\mathfrak{H}$ aus höchstens endlich vielen Elementen besteht. $\mathfrak{H}$ ist eine Menge von offenen Halbkugeln H mit festem Radius $\rho > 0$; je zwei von ihnen können ineinander überführt werden durch eine Parallelverschiebung; die ebenen Seitenflächen von keinen zwei $H \in \mathfrak{H}$ liegen in derselben Hyperebene E; zu jedem $H \in \mathfrak{H}$ existiert ein Parameterwert $t(H) \in T$ derart, daß der Punkt $f(t(H))$ der Mittelpunkt $m(H)$ von H (d. h. der Mittelpunkt der zu H gehörigen Kugel) ist und kein Punkt $f(t)$ mit $|t - t(H)| < \rho$ in H liegt. Um dies zu beweisen, können wir wegen $L_f(K) < +\infty$ sofort annehmen,

---

[8] Zur Definition des Lebesgue-Maßes μ in $\mathfrak{R}$ vgl. a. a. O. [Anm. 1] S. 136 bis 137.

[9] a. a. O. [Anm. 1] S. 149.

daß die Abbildung f dehnungslos ist, d. h. daß für je zwei Parameterwerte t' und t'' aus T der Abstand der Bildpunkte $f(t')$ und $f(t'')$ höchstens gleich $|t' - t''|$ ist (man wähle als „Parameter t die Länge in der Kurve K''). Dann aber gilt, wenn H_1 und H_2 zwei beliebige Halbkugeln aus $\mathfrak{H}$ sind, die Ungleichung $|t(H_1) - t(H_2)| \geqq \rho$; denn angenommen, es wäre $|t(H_1) - t(H_2)| < \rho$; dann haben die Punkte $f(t(H_1))$ und $f(t(H_2))$ einen Abstand $< \rho$; wegen $f(t(H_1)) = m(H_1)$ und $f(t(H_2)) = m(H_2)$ liegt dann entweder $f(t(H_1))$ in H_2 oder $f(t(H_2))$ in H_1; dies ist wegen $|t(H_1) - t(H_2)| < \rho$ falsch, da in H_2 kein Punkt $f(t)$ mit $|t - t(H_2)| < \rho$ und in H_1 kein Punkt $f(t)$ mit $|t(H_1) - t| < \rho$ liegt. Daraus, daß für je zwei Parameterwerte $t(H_1)$ und $t(H_2)$ die Ungleichung $|t(H_1) - t(H_2)| \geqq \rho$ gilt, folgt aber, daß es nur endlich viele Parameterwerte $t(H)$ gibt, und hieraus, daß $\mathfrak{H}$ nur endlich viele Halbkugeln H enthält. – Damit ist unser Satz bewiesen.

Wir haben bei unserem Satz die Voraussetzung gemacht, daß K in einem Euklidischen Raum enthalten ist. Nun kann man sowohl die (Durchlaufungs-) Länge L_f als auch das lineare Maß L (letzteres etwa als Hausdorffsches Maß) in einem beliebigen metrischen Raum definieren. Es erhebt sich daher die Frage, ob unser Satz auch richtig ist unter der allgemeineren Voraussetzung, daß K in einem beliebigen metrischen Raum enthalten ist.