# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

## Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1948

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

# Zur mathematischen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Von D. A. Kappos in Erlangen.

Vorgelegt von Otto Haupt am 12. November 1948.

## Einleitung.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie als mathematische Wissenschaft wurde bisher im wesentlichen auf zwei Wegen begründet, nämlich einerseits auf statistischem („empirischem"), andererseits auf formalem („ideellem") Wege. Beidemale bedient man sich der Mengenlehre und der Maß- und Integraltheorie auf Mengen:

Erstens: Die Statistiker[1] erklären die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Begriffes der Häufigkeit als einen Inhalt $j$ (bzw. totaladditiven Inhalt),[2] nämlich für bestimmte Teilmengen des Merkmalraumes, die einen Körper bilden. Die ursprünglich von von Mises versuchte Erklärung der Wahrscheinlichkeit für alle Teilmengen des Merkmalraumes führt (falls der Merkmalraum unendlich ist) zu Widersprüchen, wie Wald[3] gezeigt hat, auch wenn man auf die Totaladditivität der Wahrscheinlichkeit (des Inhaltes) verzichtet; der Körper der Mengen mit Wahrscheinlichkeit muß außerdem Jordansche (vollständige) Erweiterung bezüglich eines abzählbaren Körpers sein, damit ein

---

[1] α) R. von Mises, Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschrift 4 (1919), 1–57 oder vom selben Verfasser Wahrscheinlichkeitsrechnung etc., Wien 1931. Die von Misessche statistische Methode ist verbessert worden von β) H. Reichenbach, Math. Zeitschrift 34 (1932) 568–619; γ) D. Popper, Logik der Forschung, Wien 1935; δ) C. Copeland, Amer. Journ. of Math. 58 (1936), ε) E. Kamke, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1932 und anderen, hauptsächlich aber von ζ) W. Wald, Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes, Ergebnisse eines math. Kolloquiums, Heft 8, Wien 1937 oder Actualités scientifiques et industrielles Nr. 735 (1938), 79–99.

[2] Für diese Begriffe vgl. z. B. Haupt-Aumann, Diff.- und Int.-Rechnung, III. Band, Berlin 1938.

[3] Wald l. c. 1ζ), zweite Schrift S. 82.

effektives Konstruktionsverfahren für das Kollektiv angegeben werden kann.[4]

Zweitens: Die Formalisten[5] lassen den zufälligen Ereignissen eines „Wahrscheinlichkeitsfeldes" die meßbaren Teilmengen aus einer abstrakten Grundmenge entsprechen und der Wahrscheinlichkeit das totaladditive Maß dieser Mengen. Ein Wahrscheinlichkeitsfeld ist hier also ein $\sigma$-Körper, der ein Maß trägt und der die Grundmenge (Gewißheit) bzw. die leere Menge (Unmöglichkeit) mit der Wahrscheinlichkeit 1 bzw. 0 enthält. Den (übrigen) Mengen des $\sigma$-Körpers (realisierbaren Ereignissen) sind Wahrscheinlichkeiten $w$ mit $0 \leqq w \leqq 1$ zugeordnet. Hier macht man (anders als beim statistischen Weg) keine weiteren Einschränkungen über den $\sigma$-Körper und erweitert (ihn bzw.) das Maß zu einem vollständigen (Lebesgueschen) Maß. Die Ereignisse, welche diesen Erweiterungsmengen entsprechen sollen, haben keine Beziehung zu der empirischen Welt (ideelle Ereignisse); das so vervollständigte Wahrscheinlichkeitsfeld ist also in gewissem Sinne eine mathematische Konstruktion.

Der Vergleich eines Wahrscheinlichkeitsfeldes mit einem Körper meßbarer Mengen bei den zwei oben erwähnten Methoden ist mit folgendem Mangel behaftet. Man ist nämlich gezwungen z. B. im Falle von geometrischen Wahrscheinlichkeitsfeldern vielen realisierbaren Ereignissen, denen Mengen vom Maß Null (Nullmengen) entsprechen, die Wahrscheinlichkeit Null zuzuordnen, trotzdem die Ereignisse verschieden vom unmöglichen Ereignis sind. Entsprechend muß man unter Umständen Ereignissen, die verschieden von der Gewißheit sind, die Wahrscheinlichkeit 1 zuordnen.[6] Außerdem entsprechen gewisse Teilmengen der Grundmenge (nicht meßbare Mengen) keinen realisierbaren Ereignissen, trotzdem man die Punkte, aus welchen diese Mengen bestehen, als realisierbare Ereignisse betrachtet, was den Axiomen zufolge nötig ist.

---

[4] Wald, l. c. 1 ζ), zweite Schrift. Siehe auch E. Tornier, Wahrscheinlichkeitsrechnung usw., Leipzig 1936.

[5] α) Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1933. β) M. Fréchet, Géneralités sur les Probabilités. Variables aléatoires. Paris 1937.

[6] α) E. Lévy, Calcul des Probabilités. Paris 1923, S. 10 u. 18. β) C. Cramér, Mathematical Methods of statistics. Princeton 1946, S. 149.

Man kann diesem Mangel folgendermaßen abhelfen: Es sei $\mathfrak{F}$ der Körper der meßbaren und $\mathfrak{N}$ das Ideal der Nullmengen. $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ sind ihrer algebraischen Struktur nach Boolesche Verbände oder, wenn man als Grundoperation den Durchschnitt (Produkt) und die symmetrische Differenz (Summe) betrachtet, algebraische Ringe mit idempotenten Elementen. Infolgedessen ist dann das System $\mathfrak{F}/\mathfrak{N} = \mathfrak{F}^*$ der Restklassen in $\mathfrak{F}$ mod $\mathfrak{N}$ ebenfalls ein Ring mit idempotenten Elementen, also ein Boolescher Verband, der zu $\mathfrak{F}$ homomorph ist. Da allen Elementen derselben Restklasse die gleiche Wahrscheinlichkeit entspricht, so ist auch auf $\mathfrak{F}^*$ ein Inhalt bzw. Maß definiert. Betrachtet man nun die Elemente von $\mathfrak{F}^*$ als Ereignisse, so hat man ein Wahrscheinlichkeitsfeld $\mathfrak{F}^*$, in welchem die Wahrscheinlichkeit totaladditiv und „positiv" (reduziert) ist, nämlich gleich Null bzw. gleich Eins nur für das Nullelement, welches in $\mathfrak{F}^*$ der Unmöglichkeit entspricht, bzw. nur für das der Gewißheit entsprechende Einselement von $\mathfrak{F}^*$.

Dem oben Bemerkten, insbesondere der Homomorphie von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$, entsprechend, kann man sich von Anfang an vom Begriff der Punktmengen in der Wahrscheinlichkeitstheorie befreien und so die mit ihm verbundenen oben erwähnten Schwierigkeiten vermeiden, indem man den Wahrscheinlichkeitsfeldern Boolesche Verbände entsprechen läßt, die einen positiven (reduzierten) Inhalt bzw. ein positives Maß tragen. Boole[7] selbst ist zu seiner Algebra von der Wahrscheinlichkeitstheorie her angeregt worden. Aus der großen, stets steigenden Bedeutung der Mengenlehre in der Mathematik unseres Jahrhunderts erklären sich die in den letzten Jahrzehnten entstandenen Begründungen der Wahrscheinlichkeitstheorie von der Mengenlehre her. Nachdem aber inzwischen die Maß- und Integraltheorie in Booleschen Verbänden ausgebildet ist, erscheint der Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Grundlage der Booleschen Verbände (mit positivem Inhalt bzw. Maß) als der natürliche Weg. Diese Verbände sind bekanntlich[8] immer

---

[7] G. Boole, The mathematical analysis of logic. Cambridge 1847, S. 1. G. Birkhoff, Lattice Theory. New York 1940, chapter VIII–IX.

[8] Loomis, On the representation of σ-complete Boolean algebras, Bull. Am. Math. Soc. 53 (1947), 757–60.

(falls sie σ-Boolesche Verbände sind) isomorph zu dem Quotienten eines Booleschen σ-Mengenverbandes durch ein σ-Ideal, aber nicht immer isomorph zu einem Mengenkörper, wenn man bei der Isomorphie die Invarianz der Vereinigung von abzählbar unendlich vielen Elementen fordert.

Wir skizzieren im folgenden eine Darstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf diesem Wege. Die Einführung und Klassifikation der Wahrscheinlichkeitsfelder (§ 1) umfaßt solche der statistischen und formalistischen Methode.[9] Die Erklärung der Wahrscheinlichkeitsfelder als Boolesche Verbände (bzw. Boolesche σ-Verbände), die einen positiven Inhalt (bzw. Maß) tragen, erlaubt uns, zur Gewinnung der vollempirischen bzw. vollideellen Wahrscheinlichkeitsfeldern Erweiterungsprozesse anzuwenden (§ 2, I, II), die den wohlbekannten Methoden von Dedekind und Cantor zur Gewinnung der reellen Zahlen ähneln.[10] Wir hoffen, insbesondere den Begriff der zufälligen Variablen (Größen) auch in beliebigen (nicht endlichen) Wahrscheinlichkeitsfeldern geeignet erfaßt zu haben (§ 3–4). Der beim mengentheoretischen Aufbau erforderliche Vergleich der zufälligen Variablen mit meßbaren Punktfunktionen führt, wie schon oben angedeutet, insbesondere bei geometrischen Wahrscheinlichkeitsfeldern, zu Ungereimtheiten, weshalb man an Stelle der zufälligen Variablen bei verschiedenen Problemen die sogenannte Verteilungsfunktion einführte; man erreichte so besonders in Problemen der Statistik eine sehr schöne und exakte Behandlung der Theorie.[11] Indes ist der Begriff der zufälligen Variablen wesentlich allgemeiner als der der Verteilungsfunktionen (s. diese Arbeit § 3), so daß erstere als für die Wahrscheinlichkeitstheorie unentbehrlich erscheinen.

## § 1. Wahrscheinlichkeitsfelder.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit den sogenannten Wahrscheinlichkeitsfeldern.

---

[9] Betr. statistische Felder vgl. Wald l.c. 1ζ), Tornier l. c. 4); betr. formale Felder vgl. Kolmogoroff l.c. 5α), Fréchet l. c. 5β).

[10] In der Maßtheorie hat solche Methoden C. A. Mac Neille, Extensions of measure, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 24 (1938), 188–93, eingeführt.

[11] Vgl. Cramér l. c. 6β); Fréchet l. c. 5β).

Def. 1. Ein Wahrscheinlichkeitsfeld (kurz W-Feld) ist ein System $\mathfrak{F}$ von Dingen $a, b, \ldots, x, y, \ldots$, genannt zufällige Ereignisse (kurz Ereignisse), für welches gilt:

$\alpha$) $\mathfrak{F}$ ist mit einer algebraischen Struktur versehen, die derjenigen eines Booleschen Verbandes mit Einheit isomorph ist.

$\beta$) In $\mathfrak{F}$ ist ein Inhalt, genannt Wahrscheinlichkeit, in Zeichen $w(x)$, $x \in \mathfrak{F}$, definierbar, welcher nicht negativ, totaladditiv und reduziert, d. h. nur für das Nullelement $\theta$ (Unmöglichkeit) gleich Null und nur für das Einheitselement $e$ (Gewißheit) gleich 1 ist, also $w(\theta) = 1$, $w(e) = 1$, und allgemein $\theta \leqq w(x) \leqq 1$ für $x \in \mathfrak{F}$.

Def. 2. Ein W-Feld heißt empirisch, wenn es höchstens abzählbar viele Elemente besitzt.

Def. 3. Ein W-Feld heißt vollempirisch („effektiv konstruktiv"), wenn es die Jordansche Erweiterung (Definition § 2 dieser Arbeit) eines empirischen W-Feldes ist.

Def. 4. Ein W-Feld heißt vollideell, wenn es überabzählbar viele Elemente und die algebraische Struktur eines vollkommenen Booleschen Verbandes ($\sigma$-B-Verbandes) besitzt.

Folgerung: Ein vollideelles W-Feld ist ein Boolescher Vollverband (d. h. die Operation der Vereinigung bzw. des Durchschnittes ist für beliebig viele Ereignisse immer ausführbar).[12]

## § 2. Erweiterungsprozesse.

Ein beliebiges W-Feld enthält höchstens abzählbar viele atomare Ereignisse (kurz Atome). Ist ein W-Feld atomar,[13] so ist es ein Boolescher Vollverband und abgeschlossen gegenüber (nicht nur der algebraischen Konvergenz sondern auch) der Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit; ein atomares W-Feld ist nämlich isomorph zu dem Booleschen Mengenverband aller Mengen, deren Elemente Atome des W-Feldes sind. Ist dagegen ein W-Feld nicht atomar, so gibt es in $\mathfrak{F}$ (höchstens abzählbar

[12] D. A. Kappos, Die cartesischen Produkte und die Multiplikation von Maßfunktionen in Booleschen Algebren, I. Teil, Math. Annalen 120 (1947), 43–74, insbes. § 11.

[13] Das heißt: Jedes Ereignis ist die Vereinigung von Atomen (elementaren Ereignissen) nämlich von Ereignissen, die kein Teilereignis außer $\theta$ und sich selbst besitzen.

viele Atome und) mindestens ein Ereignis, das kein Atom ist, also mindestens abzählbar viele (nicht atomare) Teilereignisse enthält. Die nicht atomaren W-Felder sind nicht immer abgeschlossen gegenüber den oben erwähnten Grenzprozessen. Um dies zu erreichen, wendet man, je nachdem man (I) vollempirische oder (II) vollideelle W-Felder erhalten will, folgende Erweiterungsprozesse an:

(I): Jordanscher Erweiterungsprozeß.[14] Man führt mit Hilfe des W-Feldes $\mathfrak{F}$ die sog. Schachtelungen $s = [a_n, b_n]$ ein, bestehend je aus zwei Ereignisfolgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mit ($\alpha$): $a_\mu \leqq a_\nu \leqq b_\nu \leqq b_\mu$ für alle $\mu \leqq \nu$ sowie ($\beta$): $\lim\limits_{n\to\infty} w(a_n \dotplus b_n) = 0$, setzt ($\gamma$): $[a_n, b_n] = [a_n^*, b_n^*]$, wenn $a_n \leqq b_n^*$ sowie $a_n^* \leqq b_n$ für jede $n$, und erklärt die Grundoperationen $(s' \dotplus s'')$ (symmetrische Differenz), $s \frown s'$ (Durchschnitt) usw. sowie die Wahrscheinlichkeit $w(s)$ in bekannter Weise. In dem so erhaltenen Booleschen Verband $\mathfrak{F}_J$, dessen Elemente die Restklassen von Schachtelungen bezüglich der Äquivalenz ($\gamma$) sind, ist ein zu $\mathfrak{F}$ isomorpher Verband $\mathfrak{F}'$ enthalten, den wir mit $\mathfrak{F}$ identifizieren. Diese Jordansche Erweiterung[15] $\mathfrak{F}_J$ von $\mathfrak{F}$ kann nun als ein (erweitertes) W-Feld aufgefaßt werden.

(II): Voller oder Lebesguescher Erweiterungsprozeß.[16] Man macht das W-Feld $\mathfrak{F}$ durch Einführung der Entfernung $E(a, b) = w(a \dotplus b)$ zu einem metrischen Raum und bildet die vollständige Hülle $\overline{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{F}$. Nach Erklärung der Grundoperationen und der Wahrscheinlichkeit in $\overline{\mathfrak{F}}$ kann man $\overline{\mathfrak{F}}$ als ein (erweitertes, $\mathfrak{F}$ enthaltendes) W-Feld auffassen, und zwar ist $\overline{\mathfrak{F}}$ ein vollideelles W-Feld.

Ist ein W-Feld $\mathfrak{F}$ die Jordansche bzw. Lebesguesche Erweiterung eines W-Feldes $\mathfrak{F}_0$, so nennen wir $\mathfrak{F}_0$ eine Basis von $\mathfrak{F}$. Ist $\mathfrak{F}_0$ eine empirische Basis, so bezeichnen wir $\mathfrak{F}$ als separabel. In den meisten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegen separable W-Felder vor. In vielen Fällen läßt sich das

[14] Mac Neille, l. c. 10.

[15] Die Jordansche Erweiterung ist – im Gegensatz zur Lebesgueschen – bekanntlich nicht immer ein $\sigma$-B-Verband, also nicht immer abgeschlossen für die $\sigma$- bzw. $\delta$-Operation und dementsprechend nicht für alle Grenzprozesse.

[16] Mac Neille, l. c. 10; Kappos, l. c. 12, § 12; Haupt-Pauc, Sitz. Ber. Bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl. 1948, 277 ff.

W-Feld auf ein eindimensionales W-Feld zurückführen; ist nämlich $\mathfrak{F}$ vollideell, separabel und ohne Atome, so ist $\mathfrak{F}$ isomorph zu $\mathfrak{L}/\mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{L}$ der Boolesche Mengenverband aller Lebesgue-meßbaren Teilmengen des (linearen) Intervalles (0,1) und $\mathfrak{N}$ das zugehörige $\sigma$-Ideal der Nullmengen ist.[16a]

## § 3. Zufällige Variablen und Verteilungsfunktionen für W-Felder mit endlich vielen Ereignissen.

Die zufälligen Variablen (kurz $z$-Variablen) sind zuerst in der Theorie der Glückspiele hervorgetreten und später in allgemeinen W-Feldern eingeführt worden. Dementsprechend betrachten wir zunächst W-Felder mit lediglich endlich vielen Ereignissen. Für solche W-Felder sind die $z$-Variablen identisch mit den „Ortsfunktionen" mit nur endlich vielen Werten. In der Tat werden die $z$-Variablen folgendermaßen erklärt: Unter einem Versuch versteht man eine Zerlegung in endlich viele paarweise unvereinbare (fremde) Ereignisse des W-Feldes

$$e = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n. \tag{1}$$

Jedem „Zerlegungsereignis" $a_i$ ist nun eine reelle Zahl $\alpha_i$ zugeordnet. Wir bezeichnen daher die so definierte $z$-Variable durch

$$X = S\,(a_i \to \alpha_i). \tag{2}$$

$X$ ist unabhängig von der im W-Feld erklärten Wahrscheinlichkeit $w$. Die Wahrscheinlichkeit tritt vielmehr erst auf einerseits in der (hier stets existierenden) mathematischen Erwartung (Mittelwert) von $X$, nämlich in

$$E(X) = \overline{X} = \alpha_1 w(a_1) + \alpha_2 w(a_2) + \ldots + \alpha_n w(a_n) = \int_e X\,dw,$$

andererseits in der sog. Verteilungsfunktion $\varphi_X(\xi)$ der $z$-Variablen $X$. Dabei ist $\varphi_X(\xi)$ folgendermaßen erklärt:

---

[16a] C. Carathéodory, Annali della R.S.N.S. di Pisa, Serie II, Vol VIII (1939), 105–130.

In der $z$-Variablen $X = S(a_i \to \alpha_i)$ sei o. B. d. A. $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_n$; dann sei:

$$\varphi_X(\xi) = \begin{cases} 0 \text{ für } -\infty < \xi < \alpha_1 \\ w(a_1) \text{ für } \alpha_1 \leqq \xi < \alpha_2 \\ w(a_1) + w(a_2) \text{ für } \alpha_2 \leqq \xi < \alpha_3 \\ \vdots \\ w(a_1) + w(a_2) + \ldots + w(a_n) = 1 \text{ für } \alpha_n \leqq \xi < +\infty. \end{cases} \tag{3}$$

$\varphi_X(\xi)$ ist also eine durch $X$ und die Wahrscheinlichkeit eindeutig bestimmte reelle, nur endlich viele Werte annehmende, nicht abnehmende, linksseitig stetige und, wegen $0 \leqq \varphi_X(\xi) \leqq 1$, beschränkte Treppenfunktion. Umgekehrt entsprechen aber einer Funktion mit diesen Eigenschaften im allgemeinen mehrere $z$-Variablen.[17] Die Klasse der $z$-Variablen in $\mathfrak{F}$ ist mithin umfassender als die ihrer Verteilungsfunktionen. Bei der Bildung des Mittelwertes $\overline{X}$ spielt dieser Unterschied keine Rolle, denn aus $\varphi_X(\xi) = \varphi_Y(\xi)$ folgt $\overline{X} = \overline{Y}$.

Hingegen wird die $z$-Variable $X$ eindeutig bestimmt durch ihre Ereignisskala (Spektralschar) $\{s_{a_i}\}$. Bezeichnen wir nämlich mit $s_\xi = [X < \xi]$ das (größte) Ereignis des W-Feldes, für welches $X$ kleiner als $\xi$ bleibt, dann ist

$$\varphi_X(\xi) = w(s_\xi) = w([X < \xi]).$$

Die Ereignisse $s_\xi$ für $\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \infty$ bilden die Ereignisskala von $X$ (in unserer Bezeichnung $s_{\alpha_1} = \theta$, $s_{\alpha_2} = a_1$, $s_{\alpha_3} = a_1 \cup a_2, \ldots, s_{\alpha_n} = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_{n-1}$, $s_{+\infty} = e$).

## § 4. Zufällige Variablen (Ortsfunktionen) in beliebigen W-Feldern.

I. Versuche: Es sei $\mathfrak{F}$ ein beliebiges W-Feld und $e$ seine Gewißheit. Als Versuch $\mathfrak{a}$ bzw. $e = {}^*\bigcup a_i$[18] bezeichnen wir jede Zerlegung der Gewißheit, d. h. eine Darstellung:

---

[17] Gilt nämlich z. B. $w(a) = w(\bar{a})$ und ist $X = S\begin{pmatrix} a \to 0 \\ \bar{a} \to 1 \end{pmatrix}$, $Y = S\begin{pmatrix} a \to 1 \\ \bar{a} \to 0 \end{pmatrix}$ für den Versuch $e = a \cup \bar{a}$, so ist offenbar $X \neq Y$, aber $\varphi_X(\xi) = \varphi_Y(\xi)$.

[18] Der Stern an ${}^*\bigcup$ soll andeuten, daß die Vereinigung von paarweise fremden und von $\theta$ verschiedenen Elementen zu bilden ist.

$$e = {}^*\bigcup_{\iota \in I} a_\iota \text{ mit } a_\mu \cap a_\nu = \theta \text{ für } \mu \neq \nu, \mu, \nu \in I \text{ und } a_\iota \neq \theta \text{ für jedes } \iota \in I, \tag{1}$$

wobei (wegen der Totaladditivität und Positivität der Wahrscheinlichkeit) die Menge $I$ der Indizes $\iota$ höchstens abzählbar ist. **Es gibt also in $\mathfrak{F}$** (auch im allgemeinsten Fall, wo $\mathfrak{F}$ vollideell ist) **Versuche nur mit höchstens abzählbar vielen Zerlegungsgliedern.** Dies ist eine interessante und wichtige Eigenschaft der W-Felder, wenn man sie, wie wir hier, als reduzierte B-Verbände erklärt.

Die Gesamtheit der Versuche in $\mathfrak{F}$ sei $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}$. Ist dann

$$\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}, \text{ bzw. } e = {}^*\bigcup a_i \text{ und } \mathfrak{b} \in \mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}, \text{ bzw. } e = {}^*\bigcup b_j, \tag{2}$$

so nennen wir den Versuch $\mathfrak{a}$ **feiner** als $\mathfrak{b}$, in Zeichen $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, wenn zu jedem $a_i$ aus $\mathfrak{a}$ ein $b_j$ aus $\mathfrak{b}$ existiert derart, daß $a_i \leqq b_j$ ist. $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}$ wird bezüglich $\leqq$ zu einem Verein (teilweise geordnete Menge). Zu beliebigen Versuchen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{F}$ existiert stets der Versuch $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ bzw. $e = {}^*\bigcup a_i \cap b_j$,[18] welcher im Verein $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}$ die Eigenschaften des Durchschnittes der zwei Elemente (Versuche) $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ besitzt. Der Verein ist also ein $\wedge$-Verein (d. h. abgeschlossen für die Operation $\wedge$). Ist das W-Feld $\mathfrak{F}$ **atomar**, so ist $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}$ sogar ein $\delta$-Verein (d. h. zu abzählbar vielen Versuchen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ existiert immer der Versuch $\mathfrak{a}_1 \wedge \mathfrak{a}_2 \wedge \ldots$) mit einem unter allen möglichen Versuchen feinsten Versuch in $\mathfrak{F}$, nämlich $e = {}^*\bigcup a_i$, wobei $a_1, a_2, \ldots$ die sämtlichen nach § 2 abzählbar vielen Atome des Feldes sind. Ist $\mathfrak{F}$ **nicht atomar**, so ist $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}$ nicht $\delta$-abgeschlossen und besitzt keinen allerfeinsten Versuch auch im Falle, wo das W-Feld vollideell, also $\mathfrak{F}$ ein **Boolescher** Vollverband ist. Dies hängt mit der besonderen Struktur des W-Feldes als reduzierten Verbandes und der Tatsache zusammen, daß in reduzierten B-Verbänden das allgemeinste distributive Gesetz nicht gilt.[19]

[19] Sogar bei zweigliedrigen Zerlegungen $e = a_i \cup a_i'$, $a_i \cap a_i' = \theta$, darf man in $e = \bigcap_{i=1}^{\infty} (a_i \cup a_i')$ rechts nicht distrubutiv entwickeln, denn durch geeignete Wahl der Elemente $a_i$ kann man erreichen, daß die rechte Seite bei distributiver Entwicklung gleich einem echten Teil von $e$ ist. Besitzt das Feld überhaupt keine Atome, so kann man dabei erreichen, daß die rechte Seite lauter leere Elemente liefert.

II. Zufällige Variablen. Es sei $\mathfrak{a}$ bzw. $e = {}^*\bigcup a_i$ ein Versuch in $\mathfrak{F}$. Wir ordnen jedem Zerlegungsereignis $a_i$ eine endlich reelle Zahl $\alpha_i$ zu. Durch den Versuch $\mathfrak{a}$ und diese Zuordnung erklären wir eine einfache (Treppen-) $z$-Variable (einfache Ortsfunktion)[20] $X$ in Zeichen:

$$X = S(a_i \rightarrow \alpha_i).$$

Die Gesamtheit der einfachen $z$-Variablen in $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{V}(\mathfrak{F})$. In $\mathfrak{V}(\mathfrak{F})$ kann man eine Gleichheit und die Operationen $X \pm Y$, $XY$, $X \cup Y$, $X \cap Y$, $|X|$, $X : Y$ für $Y \neq 0$ erklären.[20] Da die Gesamtheit der Versuche einen $\bigwedge$-Verein bilden, so sind diese Operationen stets ausführbar. $\mathfrak{V}(\mathfrak{F})$ ist bezüglich der Operationen $X \cup Y$ und $X \cap Y$ ein distributiver Verband.

Es sei $\mathfrak{F}$ ein empirisches W-Feld, $\mathfrak{F}^*$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$ seine vollempirische bzw. vollideelle Erweiterung. Wir haben dann $\mathfrak{F} < \mathfrak{F}^* < \overline{\mathfrak{F}}$, also auch $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}} < \mathfrak{E}_{\mathfrak{F}^*} < \mathfrak{E}_{\overline{\mathfrak{F}}}$ und dementsprechend $\mathfrak{V}(\mathfrak{F}) < \mathfrak{V}(\mathfrak{F}^*) < \mathfrak{V}(\overline{\mathfrak{F}})$. Demgemäß nennen wir eine einfache $z$-Variable empirisch bzw. vollempirisch bzw. vollideell, wenn sie zu $\mathfrak{V}(\mathfrak{F})$ bzw. $\mathfrak{V}(\mathfrak{F}^*)$ bzw. $\mathfrak{V}(\overline{\mathfrak{F}})$ gehört.

## § 5. Vervollständigung des Verbandes $\mathfrak{V}(\mathfrak{F})$ der einfachen $z$-Variablen. Grenzprozesse.

In atomaren W-Feldern erfaßt man nach § 4 alle $z$-Variablen. $\mathfrak{V}(\mathfrak{F})$ ist dann ein (distributiver Verband und ein) nach Freudental-Kantorowitch[21] teilweise geordneter, reeller, linearer Raum, der bedingt abgeschlossen ist für die Operationen $\sigma$ und $\delta$, d. h.: sind $X_1, X_2, \ldots$ abzählbar viele Elemente aus $\mathfrak{V}(\mathfrak{F})$ und existieren in $\mathfrak{V}(\mathfrak{F})$ zwei Elemente $X$, $Y$ derart, daß $X \leqq X_i \leqq Y$ für alle $i = 1, 2, \ldots$, gilt, so existiert in $\mathfrak{V}(\mathfrak{F})$ die Vereinigung $\bigcup X_i$ bzw. der Durchschnitt $\bigcap X_i$. Auf Grund dieser Operationen kann man aber bekanntlich[20] Limesbegriffe in $\mathfrak{V}(\mathfrak{F})$ einführen; denn $\overline{\lim}$ alg $X_n$ bzw. $\underline{\lim}$ alg $X_n$ existieren

[20] Vgl. D. A. Kappos, Ein Beitrag zur Carathéodoryschen Definition der Ortsfunktionen in Booleschen Algebren, Math. Zeitschr. 51 (1948), 616–634, insbesondere § 5–7.

[21] H. Freudenthal, Über teilweise geordnete Moduln, Proceedings, Amsterdam Acad. 39 (1936), 641–651.

dann in $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$. In nicht atomaren W-Feldern sind im allgemeinen die oben erwähnten Operationen $\sigma$ und $\delta$ auch nicht bedingt ausführbar. Wir sind also gezwungen, dem Verband $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$ neue Elemente zu adjugieren. Diese neuen Elemente gewinnt man, unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{F}$ ein vollideelles W-Feld ist, durch ein Verfahren, das dem Cantorschen Verfahren der Vervollständigung der Menge der rationalen Zahlen entspricht.[22] Den Verband, den wir durch diese Vervollständigung erhalten, bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{F})$ und seine Elemente nennen wir allgemeine $z$-Variablen (sie sind identisch mit den allgemeinen Ortsfunktionen[22]). $\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{F})$ ist ein teilweise geordneter, reeller, linearer Raum, der bedingt abgeschlossen ist für die Operationen $\sigma$ und $\delta$. Ist das W-Feld $\mathfrak{F}$ separabel und ist $\mathfrak{F}_0$ eine abzählbare Basis, so kann man $\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{F})$ aus $\mathfrak{B}(\mathfrak{F}_0)$ durch Grenzprozesse gewinnen.

## § 6. Ereignisskala. Verteilungsfunktion der $z$-Variablen.

Jeder einfachen $z$-Variablen $X$ und demgemäß jeder beliebigen allgemeinen $z$-Variablen $X \in \overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{F})$ entspricht, wenn $\mathfrak{F}$ vollideell ist, eine Ereignisskala $\{[X < \xi]\}$ (Somenskala),[23] die folgende charakteristische Eigenschaften besitzt.

I. für $\eta < \xi$ ist $[X < \eta] \subseteq [X < \xi]$;

II. $\lim\limits_{\xi \to -\infty} \text{alg } [X < \xi] = 0, \quad \lim\limits_{\xi \to +\infty} \text{alg } [X < \xi] = e$;

III. ist $\xi_1 < \xi_2 < \ldots$ mit $\lim \xi_n = \xi$, so ist
$\lim\limits_{n \to \infty} \text{alg } [X < \xi_n] = [X < \xi]$.

Man kann umgekehrt die $z$-Variablen durch Ereignisskalen erklären.[23]

Mit Hilfe der Ereignisskala von $X$ definiert man die sog. Verteilungsfunktion von $X$, nämlich

$$\varphi_X(\xi) = w([X < \xi]), \text{ kurz } \varphi_X(\xi) = w\,(X < \xi).$$

Aus den charakteristischen Eigenschaften der Ereignisskala folgen die charakteristischen Eigenschaften von $\varphi_X(\xi)$, nämlich:

---

[22] Kappos, l. c. 20, § 5.
[23] Kappos, l. c. 20, § 6.

$\alpha$) $0 \leqq \varphi_X(\xi) \leqq 1$ und zwar $\varphi_X(-\infty) = \lim_{\xi \to -\infty} \varphi_X(\xi) = 0$,

$\varphi_X(+\infty) = \lim_{\xi \to +\infty} \varphi_X(\xi) = 1$;

$\beta$) $\varphi_X(\xi)$ ist nicht abnehmend;

$\gamma$) $\varphi_X(\xi)$ ist linksseitig stetig.

In Problemen der Statik sind nicht unmittelbar ein W-Feld und die $z$-Variablen gegeben, sondern Verteilungsfunktionen $\varphi(\xi)$. Durch das Stieltjesche Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \xi d\varphi(\xi)$ wird dann in einem W-Feld $\mathfrak{F}$ der Mittelwert einer jeden $z$-Variablen $X$ geliefert, für die $\varphi(\xi) = \varphi_X(\xi)$ ist. Ist das W-Feld gegeben, so definiert man den Mittelwert durch das Unterteilungsintegral von $X$ bezüglich $w$, nämlich $\int_e X\,dw$. Es ist klar, daß nicht alle $z$-Variablen einen Mittelwert besitzen.