Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1933. Heft III

November-Dezember-Sitzung

München 1933

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Eine neue Winkeldreiteilung des Schneidermeisters Kopf.

Von Oskar Perron.

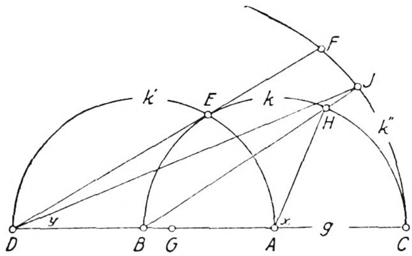
Vorgelegt in der Sitzung vom 2. Dezember 1933.

Herr Kopf hat nach seinem ersten Erfolg[1] sich weiter mit dem Problem der Dreiteilung befaßt. Unter den verschiedenen seitdem von ihm ausgedachten Konstruktionen fand ich eine, die wirklich allgemein bekannt zu werden verdient, da gewiß keine in der Literatur vorkommende Konstruktion auch nur annähernd mit ihr zu konkurrieren vermag. Sie ist ebenso einfach wie die frühere, aber ihre Genauigkeit ist geradezu verblüffend. Die Rechnung zeigt, daß der Maximalfehler für spitze Winkel nicht ganz $15''$ (fünfzehn Sekunden!) beträgt; für Winkel unter 20^0 ist der Fehler sogar kleiner als $1''$ (eine Sekunde!).

Auf einer Geraden g wähle man einen Punkt A und zeichne um ihn als Mittelpunkt den Halbkreis k, der g in B und C trifft. Um B als Mittelpunkt zeichne man den Halbkreis k' mit gleichem Radius; er schneidet k im Punkt E und schneidet g außer in A noch in D. Jetzt verlängere man die Strecke DE, die den Kreis k berührt, um den gemeinsamen Kreisradius über E hinaus bis F. Das (in der Figur nicht gezeichnete) Mittellot zu CF trifft g in G; mit G als Mittelpunkt zeichne man einen Kreis k'' durch C, der dann auch durch F geht. Ist nun $\sphericalangle CAH = x$ der gegebene Winkel (H auf Kreis k), so bringe man BH zum Schnitt mit k'' in J und verbinde J mit D. Dann ist $\sphericalangle CDJ = y$ die Kopfsche Näherung für den dritten Teil von x.

Wir wollen jetzt den nicht ganz einfachen Zusammenhang zwischen x und y ermitteln. Aus der Konstruktion folgt, daß $\sphericalangle CBJ = \frac{x}{2}$ ist. Daher ergibt sich aus dem Dreieck DBJ, wenn der Radius von k und k' gleich 1 gesetzt wird, nach dem Sinussatz

[1] Vgl. diese Sitzungsberichte, Jahrgang 1929, S. 341.



$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-y\right)}{\sin y}=\frac{DB}{BJ}=\frac{1}{BJ}, \tag{1}$$

wo nun BJ noch zu berechnen ist. Zuvor berechnen wir den Radius ρ des Kreises k''. Es ist

$$GC=GF=\rho,\quad DG=DC-GC=3-\rho,$$

und folglich ergibt sich aus dem Dreieck DGF nach dem Cosinussatz die folgende Gleichung für ρ:

$$\begin{aligned}\rho^2=GF^2&=DF^2+DG^2-2\cdot DF\cdot DG\cdot\cos 30^0\\&=(\sqrt{3}+1)^2+(3-\rho)^2-(\sqrt{3}+1)(3-\rho)\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Hier fällt ρ^2 heraus, und die Auflösung nach ρ ergibt:

$$\rho=\frac{4-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{9+\sqrt{3}}{6}. \tag{2}$$

Nun folgt aus dem Dreieck BGJ nach dem Cosinussatz

$$\rho^2=GJ^2=BJ^2+BG^2-2\cdot BJ\cdot BG\cdot\cos\frac{x}{2}$$

oder, da $BG=BC-GC=2-\rho$ ist,

$$BJ^2-2(2-\rho)\cos\frac{x}{2}\cdot BJ-(4\rho-4)=0.$$

Da BJ positiv sein muß, ergibt sich hieraus

$$BJ=(2-\rho)\cos\frac{x}{2}+\sqrt{(2-\rho)^2\cos^2\frac{x}{2}+4\rho-4}$$

und durch Übergang zum reziproken Wert

$$\frac{1}{BJ} = \frac{\sqrt{(2-\rho)^2 \cos^2\frac{x}{2} + 4\rho - 4} - (2-\rho)\cos\frac{x}{2}}{4\rho - 4}.$$

Setzt man das in (1) ein, so erhält man nach geringfügigem Umformen des Radikanden

$$\sin\frac{x}{2}\operatorname{cotg} y - \cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{\rho^2\cos^2\frac{x}{2} + (4\rho-4)\sin^2\frac{x}{2}} - (2-\rho)\cos\frac{x}{2}}{4\rho-4}$$

und hieraus weiter

$$\operatorname{cotg} y = \frac{5\rho-6}{4\rho-4}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4\rho-4}\sqrt{\rho^2\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2} + 4\rho - 4}.$$

Wenn man jetzt für ρ den Wert aus (2) einsetzt, ergibt sich schließlich

$$(3)\quad \operatorname{cotg} y = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{(19-8\sqrt{3})\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2} + 12 - 4\sqrt{3}}.$$

Aus dieser Formel kann man zu jedem Winkel x den konstruierten Winkel y berechnen. Um den Fehler $\delta = \frac{x}{3} - y$ zu erhalten, setzen wir

$$(4)\qquad \operatorname{tang}\frac{x}{6} = v.$$

Dann ist

$$\operatorname{cotg}\frac{x}{3} = \frac{1-v^2}{2v},\qquad \operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{1-3v^2}{3v-v^3}.$$

Daher folgt aus (3)

$$(5)\left\{\begin{aligned}\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg}\frac{x}{3} &= \frac{2+\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1-3v^2}{3v-v^3} - \frac{1-v^2}{2v}\\ &\quad + \frac{1}{4}\sqrt{(19-8\sqrt{3})\left(\frac{1-3v^2}{3v-v^3}\right)^2 + 12 - 4\sqrt{3}}\\ &= \frac{-4+\sqrt{3}-(3\sqrt{3}-2)v^2 - 2v^4 + \sqrt{P(v)}}{4v(3-v^2)},\end{aligned}\right.$$

wobei

$$(6)\quad \begin{aligned} P(v) &= (19-8\sqrt{3})(1-3v^2)^2+(12-4\sqrt{3})(3v-v^3)^2 \\ &= 19-8\sqrt{3}+(12\sqrt{3}-6)v^2+(99-48\sqrt{3})v^4+(12-4\sqrt{3})v^6. \end{aligned}$$

Geht man in (5) zum reziproken Wert über und schafft dann die Quadratwurzel durch Erweitern aus dem Nenner weg, so läßt sich der entstehende Nenner in Faktoren spalten und man erhält nach Wegkürzen des Faktors $4v$:

$$(7)\quad \frac{1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg}\frac{x}{3}} = \frac{(3-v^2)\left[\sqrt{P(v)}+4-\sqrt{3}+(3\sqrt{3}-2)v^2+2v^4\right]}{v(1+v^2)^2(7-4\sqrt{3}-v^2)}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}\delta = \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{3}-y\right) &= \operatorname{cotg}\frac{x}{3} + \frac{1+\operatorname{cotg}^2\frac{x}{3}}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg}\frac{x}{3}} \\ &= \frac{1-v^2}{2v} + \left(\frac{1+v^2}{2v}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg}\frac{x}{3}}. \end{aligned}$$

Setzt man den Wert aus (7) ein, so kommt

$$\operatorname{cotg}\delta = \frac{1-v^2}{2v} + \frac{(3-v^2)\left[\sqrt{P(v)}+4-\sqrt{3}+(3\sqrt{3}-2)v^2+2v^4\right]}{4v^3(7-4\sqrt{3}-v^2)}$$

oder nach leichter Umformung

$$(8)\quad \operatorname{tang}\delta = \frac{4v^3(7-4\sqrt{3}-v^2)}{(3-v^2)\sqrt{P(v)}+12-3\sqrt{3}+(4+2\sqrt{3})v^2+(5\sqrt{3}-8)v^4}.$$

Nun ist $\operatorname{tang} 15^0 = 2-\sqrt{3}$, also $\operatorname{tang}^2 15^0 = 7-4\sqrt{3}$. Für $x = 90^0$ ist also die Konstruktion exakt, was man natürlich auch schneller finden kann; ebenso ist sie für $x = 0^0$ exakt. Für alle spitzen Winkel x ist der Zähler in (8) positiv, ebenso der Nenner. Daher ist δ positiv, der konstruierte Winkel y also zu klein (für $x > 90^0$ ist y zu groß).

Für $x = 0^0$, also $v = 0$, verschwindet nicht nur der Fehler δ, sondern es verschwinden, wie man aus (8) sofort erkennt, auch seine ersten beiden Ableitungen nach v, und die dritte ist zudem sehr klein. Daher wächst δ anfangs außerordentlich langsam, wie auch die unten berechnete Tabelle zeigt. Die Bestimmung des Maximums der Funktion (8) durch Differenzieren würde eine endlose numerische Rechnung erfordern. Man kommt aber rasch zu einer Abschätzung, wenn man bedenkt, daß der Nenner in (8) größer ist als

$$\begin{aligned}&(3-v^2)\sqrt{19-8\sqrt{3}}+12-3\sqrt{3}+(4+2\sqrt{3})\,v^2\\ &=(3-v^2)(4-\sqrt{3})+12-3\sqrt{3}+(4+2\sqrt{3})\,v^2\\ &=24-6\sqrt{3}+3\sqrt{3}\,v^2>24-6\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Daher ergibt sich für den Fehler δ die ganz rohe Abschätzung

$$\delta<\operatorname{tang}\delta<\frac{4\,v^3(7-4\sqrt{3}-v^2)}{24-6\sqrt{3}}$$

oder in Sekunden ausgedrückt:

$$\delta<\left(\frac{4\,v^3(7-4\sqrt{3}-v^2)}{24-6\sqrt{3}}\cdot\frac{180\cdot 60\cdot 60}{\pi}\right)''.$$

Das Maximum dieser Funktion von v liegt bei

$$v=\sqrt{\frac{3}{5}(7-4\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{5}}$$

und liefert

$$\delta<\left(4\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{5}(7-4\sqrt{3})\cdot\frac{2}{5}(7-4\sqrt{3})\cdot\frac{180\cdot 60\cdot 60}{(24-6\sqrt{3})\pi}\right)''$$

$$=\left(\frac{311040}{\sqrt{5}\,(1422+821\sqrt{3})\pi}\right)''.$$

Durch numerische Ausrechnung (eine fünfstellige Tafel genügt) erhält man dann:

$$\delta<15{,}57''. \tag{9}$$

Zu einer etwas besseren Abschätzung gelangt man, wenn man beachtet, daß die Koeffizienten von $P(v)$ nicht kleiner sind als die des Polynoms

$$19-8\sqrt{3}+(24-6\sqrt{3})\,v^2+9\,v^4=(4-\sqrt{3}+3\,v^2)^2.$$

Daher ist der Nenner in (8) größer als

$$(3-v^2)(4-\sqrt{3}+3v^2)+12-3\sqrt{3}+(4+2\sqrt{3})v^2+(5\sqrt{3}-8)v^4$$
$$=24-6\sqrt{3}+(9+3\sqrt{3})v^2-(11-5\sqrt{3})v^4.$$

Da aber (für spitze Winkel x) $v^2 < 7-4\sqrt{3}$ ist, so ist dieser Ausdruck wieder größer als

$$24-6\sqrt{3}+(9+3\sqrt{3})v^2-(11-5\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})v^2$$
$$=24-6\sqrt{3}+(82\sqrt{3}-128)v^2 > 24-6\sqrt{3}+14v^2.$$

Folglich ist auch

$$\operatorname{tang}\delta < \frac{4v^3(7-4\sqrt{3}-v^2)}{24-6\sqrt{3}+14v^2}.$$

Setzt man jetzt zur Berechnung des Maximums die Ableitung gleich 0, so ergibt sich die quadratische Gleichung für v^2

$$21v^4+(11+13\sqrt{3})v^2-(360-207\sqrt{3})=0$$

mit der Lösung

$$v^2 = \frac{234}{(40+23\sqrt{3})(11+13\sqrt{3}+\sqrt{30868-17102\sqrt{3}})}.$$

Setzt man das oben ein und rechnet wieder numerisch aus, so ergibt sich

$$\delta < 14{,}912''. \tag{10}$$

Der zu dem angegebenen Wert von v vermöge der Gleichung (4) gehörige Winkel x ist gleich $69^0\ 57'\ 40''$. In der Nähe dieses Winkels liegt auch das wirkliche Fehlermaximum; doch wäre seine genaue Lage nur durch mühselige Rechnungen feststellbar, da sich der Fehler in der Nähe des Maximums mehrere Minuten weit nur um ein hundertstel Sekunde ändert. Zur numerischen Berechnung einer Fehlertabelle ist die Formel (3) bequemer, doch braucht man eine mindestens 7stellige Tafel. Wir lassen hier eine kleine Tabelle folgen:

x	δ	x	δ	x	δ
0^0	$0{,}00''$	36^0	$4{,}23''$	72^0	$14{,}76''$
12^0	$0{,}18''$	48^0	$8{,}57''$	84^0	$8{,}47''$
24^0	$1{,}38''$	60^0	$13{,}08''$	90^0	$0{,}00''$.

In der Nähe des Fehlermaximums hat man die Werte

x	δ
69^0	$14{,}846''$
$69^0\,30'$	$14{,}863''$
70^0	$14{,}850''$,

aus denen man ersieht, daß die obige Abschätzung (10) schon sehr genau ist.