Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1933. Heft III

November-Dezember-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über orthogonaloide Systeme.

Von Aurel Voß.

Auf Grund hinterlassener Aufzeichnungen herausgegeben

von Otto Volk in Würzburg.

Vorgelegt von W. von Dyck in der Sitzung am 11. November 1933.

Vorbemerkung.

Herr Aurel Voß hatte in einem letzten Vortrag in der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften am 7. Juli 1928 (vgl. Sitzungsberichte 1928 S. 12*) über die „Lösung der orthogonaloiden Transformation durch eine Kette linearer Gleichungen unter Adjunktion von quadratischen Irrationalitäten" gesprochen.

In den hierüber im Nachlaß vorhandenen Aufzeichnungen werden für die Fälle $n = 2, 3, 4, 5$ unter Benützung linearer Gleichungen $\frac{n(n+1)}{2}$ Unbekannte durch die übrigen $\frac{n(n-1)}{2}$ ausgedrückt.

Indem in der ersten der Gleichungen

$$x_{11}x_{l1} + x_{12}x_{l2} + \cdots + x_{1n}x_{ln} = a_{1l}, \; l = 1, 2, \cdots, n$$

die $x_{11}^2, x_{12}^2, \cdots, x_{1n}^2$ aufgefaßt werden als lineare Größen mit sich selbst als Koeffizienten, ergeben sich für $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}$ die linearen Gleichungen:

$$x_{11}\,\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & x_{12} \cdots x_{1n} \\ a_{12} & x_{22} \cdots x_{2n} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ a_{1n} & x_{n2} \cdots x_{nn} \end{vmatrix},$$

$$x_{12}\,\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & a_{11} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & a_{12} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & a_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Analog wird mit den Gleichungen

$$x_{21}\,x_{m1} + x_{22}\,x_{m2} + \cdots + x_{2,\,n-1}\,x_{m,\,n-1} = a_{2m} - x_{2n}\,x_{mn}$$
$$m = 2, 3, \cdots, n$$

verfahren u. s. w.

Die Rechnungen sind aber teilweise sehr verwickelt und insbesondere die Ausnahmefälle durch Gleichungen der 2., bzw. 3., bzw. 4., bzw. 5. Ordnung gekennzeichnet.

Herr Voß hat noch ein zweites Verfahren versucht, indem er von den $n-1$ Gleichungen

$$x_{11}\,x_{l1} + x_{12}\,x_{l2} + \cdots + x_{1,\,n-1} = a_{1l} - x_{1n}\,x_{ln} = \dot{a}_{1l},$$
$$l = 2, 3, \cdots, n$$

ausgeht und dann aus

$$x_{11}^2 + x_{12}^2 + \cdots x_{1n}^2 = a_{11}$$

x_{1n} bestimmt und analog mit den weiteren Gleichungen verfährt. Auch von dieser Methode gilt ähnliches wie oben.

Von Anfang an hatte mich Herr Voß zu diesen seinen letzten Untersuchungen herangezogen und ihre Durchführung mir ans Herz gelegt. Auf Veranlassung des Herrn W. v. Dyck habe ich die Untersuchungen aufgenommen und glaube sie nunmehr zu einem befriedigenden Abschluß gebracht zu haben.

Es handelt sich in der vorliegenden Arbeit um die etwas erweiterte Aufgabe:

Die n^2 Unbekannten

$$x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{n,n}$$

aus den $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen

$$x_{k1}\, x_{l1} + x_{k2}\, x_{l2} + \cdots + x_{kn}\, x_{ln} = a_{kl},$$
$$k = 1, 2, \cdots, n,$$
$$l = 1, 2, \cdots, n$$

mittels einer Kette von linearen Gleichungen rational durch $\frac{n(n-1)}{2}$ Parameter darzustellen.

Es gelingt dies in übersichtlicher Weise unter Benützung der Beziehungen:

$$\begin{array}{l} x_{11}\,\Delta_1 + x_{12}\,\Delta_2 + \cdots + x_{1n}\quad \Delta_n \quad = \Delta, \\ x_{21}\,\dot{\Delta}_1 + x_{22}\,\dot{\Delta}_2 + \cdots + x_{2,n-1}\,\dot{\Delta}_{n-1} = \dot{\Delta}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Im Folgenden sind die Fälle $n = 2, 3, 4, 5$ explizit behandelt und daraufhin wird der allgemeine Fall $n > 5$ gekennzeichnet.

§ 1.

$n = 2$.

Die Veränderlichen x_1, x_2, y_1, y_2 sind zu bestimmen aus:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= a_{11}, \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 &= a_{12}, \\ x_2^2 + y_2^2 &= a_{22}. \end{aligned}$$

1. $a_{22} \neq 0$.

(1) $$x_2 = \sqrt{a_{22}}\,\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},\quad y_2 = \sqrt{a_{22}}\,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2};$$

(2) $$\Delta = x_1 y_2 - x_2 y_1;\quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_2^2 + y_2^2 \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2.$$

x_1, y_1 ergeben sich aus den linearen Gleichungen:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = a_{12},$$
$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = \Delta\ ;$$

man erhält:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{22}}(a_{12}\,x_2 + \Delta\, y_2) = \dfrac{1}{\sqrt{a_{22}}\,(1+\lambda^2)}\left(a_{12}\,(1-\lambda^2) + 2\,\Delta\,\lambda\right), \\[2ex] y_1 = \dfrac{1}{a_{22}}(a_{12}\,y_2 - \Delta\, x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{a_{22}}\,(1+\lambda^2)}\left(2\,a_{12}\lambda - \Delta\,(1-\lambda^2)\right). \end{cases}$$

Man verifiziert leicht, daß in der Tat die gegebenen Gleichungen durch (1) und (3) erfüllt sind:

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{a_{22}}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \Delta\, x_2 - a_{12} y_2 & a_{12}\, x_2 + \Delta\, y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{22}}(\Delta^2 + a_{12}^2) = a_{11};$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{1}{a_{22}}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ \Delta\, x_2 - a_{12} y_2 & a_{12}\, x_2 + \Delta\, y_2 \end{vmatrix} = a_{12}.$$

2. $a_{22} = 0,\ a_{11} = 0$[1]).

$$(4)\qquad y_1 = i\,x_1,\ \ y_2 = j\,x_2,\ \ j^2 = i^2 = -1.$$

Aus der 2. Gleichung $x_1 x_2 + y_1 y_2 = a_{12}$ kommt dann:

$$(5)\qquad x_1\,x_2\,(1 + i\,j) = a_{12}.$$

Ist $a_{12} \neq 0$, so muß $i\,j = 1$ sein; ist $a_{12} = 0$, so erhält man für $i \cdot j = -1$ die beiden Parameter $x_1,\ x_2$.

§ 2.

$n = 3$.

Die Veränderlichen x_k, y_k, z_k $(k = 1, 2, 3)$ sind zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$\text{A)}\ \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a_{11}, \\ x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2 = a_{12}, \\ x_1\,x_3 + y_1\,y_3 + z_1\,z_3 = a_{13}; \end{cases} \qquad \text{B)}\ \begin{cases} x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = a_{22}, \\ x_2\,x_3 + y_2 y_3 + z_2\,z_3 = a_{23}, \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = a_{33}. \end{cases}$$

---

[1]) $a_{22} = 0,\ a_{11} \neq 0$ erledigt sich durch Vertauschung von x_2, y_2 mit x_1, y_1 nach 1.

I. Aus den Gleichungen B) erhalten wir durch die Substitution

$$(1)\qquad \dot{a}_{22} = a_{22} - z_2^2,\ \dot{a}_{23} = a_{23} - z_2 z_3,\ \dot{a}_{33} = a_{33} - z_3^2$$

das System:

$$\mathrm{B}')\quad \begin{cases} x_2^2 + y_2^2 = \dot{a}_{22}, \\ x_2 x_3 + y_2 y_3 = \dot{a}_{23}, \\ x_3^2 + y_3^2 = \dot{a}_{33}, \end{cases}$$

das sich nach § 1 unmittelbar behandeln läßt. Wir setzen:

$$(2)\qquad \dot{\Delta} = x_2 y_3 - x_3 y_2,\quad \dot{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & z_2 \\ a_{23} & a_{33} & z_3 \\ z_2 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

und haben die folgenden Fälle zu unterscheiden.

1. $\dot{a}_{33} \neq 0$.

$$(3)\qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{\dot{a}_{33}} (\dot{a}_{23} x_3 + \dot{\Delta} y_3), \\[2ex] y_2 = \dfrac{1}{\dot{a}_{33}} (\dot{a}_{23} y_3 - \dot{\Delta} x_3). \end{cases}$$

a) $a_{33} \neq 0,\ D = a_{22} a_{33} - a_{23}^2 \neq 0$.

$$(4)\quad x_3 = \sqrt{a_{33}} \frac{2(1-\lambda^2)\mu}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)},\ y_3 = \sqrt{a_{33}} \frac{4\lambda\mu}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)},$$

$$z_3 = \sqrt{a_{33}} \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2};$$

$$\dot{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \sqrt{D \cdot \dot{a}_{33} - (a_{33} z_2 - a_{23} z_3)^2} = \sqrt{D} \frac{4\mu\nu}{(1+\mu^2)(1+\nu^2)},$$

$$a_{33} z_2 - a_{23} z_3 = \sqrt{\dot{a}_{33} \cdot D} \frac{1-\nu^2}{1+\nu^2},$$

$$(5)\quad \begin{cases} z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a_{33}}} \dfrac{a_{23}(1-\mu^2)(1+\nu^2) + 2\sqrt{D}\,\mu(1-\nu^2)}{(1+\mu^2)(1+\nu^2)}, \\[2ex] y_2 = \dfrac{a_{23}}{\sqrt{a_{33}}} \dfrac{4\lambda\mu}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)} \\[2ex] \qquad - \dfrac{2\sqrt{D}}{\sqrt{a_{33}}} \dfrac{(1-\lambda^2)(1+\mu^2)\nu + \lambda(1-\mu^2)(1-\nu^2)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)(1+\nu^2)}, \end{cases}$$

$$\left|\begin{aligned} x_2 = \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{33}}} \frac{2(1-\lambda^2)\mu}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)} \\ + \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{a_{33}}} \frac{4\lambda(1+\mu^2)\nu - (1-\lambda^2)(1-\mu^2)(1-\nu^2)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)(1+\nu^2)}. \end{aligned}\right.$$

b) $a_{33} \neq 0$, $D = 0$.

x_3, y_3, z_3 wie in (4);

$$\dot{\Delta} = \frac{i}{\sqrt{a_{33}}}(a_{33} z_2 - a_{23} z_3) = 2 i a_{23} \frac{\mu \nu}{1+\mu^2},$$

$$(6) \quad \left\{\begin{aligned} z_2 &= \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{33}}} \frac{1-\mu^2+2\mu\nu}{1+\mu^2}, \\ y_2 &= \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{33}}} \frac{2\lambda((-1+\mu^2)\nu+2\mu) - i(1-\lambda^2)(1+\mu^2)\nu}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}, \\ x_2 &= \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{33}}} \frac{(1-\lambda^2)((-1+\mu^2)\nu+2\mu) + 2i\lambda(1+\mu^2)\nu}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}. \end{aligned}\right.$$

c) $a_{33} = 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$.

Vertauschung von x_2, y_2, z_2 und x_3, y_3, z_3 in a).

d) $a_{33} = a_{23} = 0$, $a_{22} \neq 0$.

$$(7) \qquad x_3 = \frac{i(1-\lambda^2)\mu}{1+\lambda^2}, \quad y_3 = \frac{2i\lambda\mu}{1+\lambda^2}, \quad z_3 = \mu;$$

$$\dot{\Delta} = i\sqrt{a_{22}}\,\mu,$$

$$(8) \quad z_2 = i\sqrt{a_{22}}\,\nu, \; y_2 = -\sqrt{a_{22}}\frac{2\lambda\nu+1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \; x_2 = \sqrt{a_{22}}\frac{2\lambda-(1-\lambda^2)\nu}{1+\lambda^2}.$$

e) $a_{33} = a_{22} = 0$, $a_{23} \neq 0$.

x_3, y_3, z_3 wie in (7);

$$\dot{\Delta} = \frac{2 i a_{23} \nu}{1+\nu^2},$$

$$z_2 = \frac{a_{23}}{2\mu}\left(\frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}\right)^2,$$

$$y_2 = -\frac{a_{23}(i\lambda(1+6\nu^2+\nu^4)+2(1-\lambda^2)(1+\nu^2)\nu)}{(1+\lambda^2)\mu(1+\nu^2)^2},$$

$$x_2 = -\frac{a_{23}(i(1-\lambda^2)(1+6\nu^2+\nu^4)-8\lambda(1+\nu^2)\nu)}{2(1+\lambda^2)\mu(1+\nu^2)^2}.$$

f) $a_{22} = a_{23} = a_{33} = 0$.

x_3, y_3, z_3 wie in (7); $\dot{\Delta} = 0$;

$$z_2 = \nu,\ y_2 = \frac{2\,i\lambda\nu}{1+\lambda^2},\ x_2 = \frac{i(1-\lambda^2)\nu}{1+\lambda^2}.$$

2. $\dot{a}_{33} = 0$.

(9)
$$x_3 = i\mu,\ y_3 = \mu,\ z_3 = \sqrt{a_{33}};$$

$$(y_2 + i x_2)\mu = \dot{a}_{23},\ (y_2 - i x_2)\dot{a}_{23} = \dot{a}_{22}\mu.$$

a) $\dot{a}_{23} \neq 0$.

(10)
$$z_2 = \nu,\ y_2 = \frac{(a_{23} - \sqrt{a_{33}}\,\nu)^2 + \mu^2(a_{22} - \nu^2)}{2\mu(a_{23} - \sqrt{a_{33}}\,\nu)},$$

$$x_2 = i\,\frac{\mu^2(a_{22} - \nu^2) - (a_{23} - \sqrt{a_{33}}\,\nu)^2}{2\mu(a_{23} - \sqrt{a_{33}}\,\nu)}.$$

b) $\dot{a}_{23} = 0$.

(11)
$$z_2 = \sqrt{a_{22}},\ y_2 = \nu,\ x_2 = i\nu;\ a_{22}\,a_{33} = a_{23}^2.$$

II. Die Gleichungen A) bestimmen x_1, y_1, z_1 rational durch die Parameter. Wir gehen aus von der Determinante:

(12)
$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1\Delta_1 + y_1\Delta_2 + z_1\Delta_3;\quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

die Determinanten

(13)
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_3 = \dot{\Delta} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

sind rational durch die Parameter darstellbar.

1. Aus (12) und der 2. und 3. Gleichung A) ergeben sich sofort x_1, y_1, z_1 für

$$
(14)\qquad D = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.^{1)}
$$

Man erhält:

$$
(15)\qquad \left\{ \begin{aligned}
D\,x_1 &= \begin{vmatrix} \Delta & \Delta_2 & \Delta_3 \\ a_{12} & y_2 & z_2 \\ a_{13} & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \Delta\,\Delta_1 - \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}^{2)}, \\
D\,y_1 &= \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta & \Delta_3 \\ x_2 & a_{12} & z_2 \\ x_3 & a_{13} & z_3 \end{vmatrix} = \Delta\,\Delta_2 - \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \\
D\,z_1 &= \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta \\ x_2 & y_2 & a_{12} \\ x_3 & y_3 & a_{13} \end{vmatrix} = \Delta\,\Delta_3 - \begin{vmatrix} 0 & z_2 & z_3 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \right.
$$

Man überzeugt sich leicht, daß in der Tat die Gleichungen A) damit erfüllt sind. Es wird nämlich:

$$
(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\,D = - \begin{vmatrix} 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \Delta & \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ a_{12} & x_2 & y_2 & z_2 \\ a_{13} & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -a_{11} & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_2 \\ 0 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = a_{11}\,D,
$$

$$
(x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2)\,D = - \begin{vmatrix} 0 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \Delta & \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ a_{12} & x_2 & y_2 & z_2 \\ a_{13} & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = a_{12}\,D,
$$

$$
(x_1\,x_3 + y_1\,y_3 + z_1\,z_3)\,D = - \begin{vmatrix} 0 & x_3 & y_3 & z_3 \\ \Delta & \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ a_{12} & x_2 & y_2 & z_2 \\ a_{13} & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = a_{13}\,D.
$$

---

1) Es wird nämlich: $D^2 = D \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2) $\begin{vmatrix} 0 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ a_{12} & y_2 & z_2 \\ a_{13} & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\Delta_1\,x_2 & -\Delta_1 x_3 \\ a_{12} & a_{22} - x_2^2 & a_{23} - x_2\,x_3 \\ a_{13} & a_{23} - x_2\,x_3 & a_{33} - x_3^2 \end{vmatrix} = -\Delta_1 \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2. Ist $D = 0$, also:

(16) $$a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2 = 0,$$

so erhält man zunächst aus den beiden Gleichungen

$$x_1\, x_2 + y_1\, y_2 = a_{12} - z_1\, z_2 = \dot{a}_{12},$$
$$x_1\, x_3 + y_1\, y_3 = a_{13} - z_1\, z_3 = \dot{a}_{13}$$

unter der Annahme $\dot{\Delta} \neq 0$ für x_1, y_1:

(17) $$\begin{cases} \dot{\Delta}\, x_1 = \begin{vmatrix} \dot{a}_{12} & y_2 \\ \dot{a}_{13} & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & y_2 & z_2 \\ a_{13} & y_3 & z_3 \\ z_1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ \dot{\Delta}\, y_1 = \begin{vmatrix} x_2 & \dot{a}_{12} \\ x_3 & \dot{a}_{13} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & x_2 & z_2 \\ a_{13} & x_3 & z_3 \\ z_1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

somit:

$$\dot{\Delta}^2\, x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & y_2 & z_2 \\ a_{13} & y_3 & z_3 \\ z_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \dot{\Delta} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & 0 & 1 \\ a_{12} & a_{13} & z_1 & 0 \\ a_{22} & a_{23} & z_2 & x_2 \\ a_{23} & a_{33} & z_3 & x_3 \end{vmatrix},$$

$$\dot{\Delta}^2\, y_1 = -\begin{vmatrix} a_{12} & x_2 & z_2 \\ a_{13} & x_3 & z_3 \\ z_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \dot{\Delta} = -\begin{vmatrix} y_2 & y_3 & 0 & 1 \\ a_{12} & a_{13} & z_1 & 0 \\ a_{22} & a_{23} & z_2 & y_2 \\ a_{23} & a_{33} & z_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Aus (17) folgt:

$$\dot{\Delta}^2 (x_1^2 + y_1^2) = \dot{\Delta}\left(x_1 \begin{vmatrix} \dot{a}_{12} & y_2 \\ \dot{a}_{12} & y_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} x_2 & \dot{a}_{12} \\ x_3 & \dot{a}_{13} \end{vmatrix} \right) = -\dot{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & y_1 \\ \dot{a}_{12} & x_2 & y_2 \\ \dot{a}_{13} & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & 2\,\dot{a}_{12} & 2\,\dot{a}_{13} \\ \dot{a}_{12} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{13} & \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix} = \dot{a}_{11} \begin{vmatrix} \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix},$$

da $x_1^2 + y_1^2 = \dot{a}_{11}$ sein soll. Man erhält also für z_1 die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} \\ \dot{a}_{12} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{13} & \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & z_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & z_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

unter der Annahme, daß

$$D' = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{12} \\ a_{33} & a_{13} \end{vmatrix} \neq 0; \quad D'' = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0;$$

folgt hieraus $\left(\text{Multiplikation mit } D'' = \begin{vmatrix} D & D' & D'' & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$:

$$\begin{vmatrix} \Delta^2 & 0 & 0 & Dz_1 + D'z_2 + D''z_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & z_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

also:

$$(18) \qquad (Dz_1 + D'z_2 + D''z_3) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} - \Delta^2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & z_1 \\ a_{22} & a_{23} & z_2 \\ z_2 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

da $D = 0$ ist, so ist das eine lineare Gleichung für z_1; setzt man:

$$a_{22} = \alpha^2, \quad a_{23} = \alpha\beta, \quad a_{33} = \beta^2,$$

so ergibt (18):

$$2\,(\alpha a_{13} - \beta a_{12})\,(\alpha z_3 - \beta z_2)\, z_1 - a_{11}\,(\alpha z_3 - \beta z_2)^2 \\ + (a_{12} z_3 - a_{13} z_2)^2 - (\alpha a_{13} - \beta a_{12})^2 = 0.$$

Da nach Voraussetzung

$$\dot{\Delta}^2 = -(\alpha z_3 - \beta z_2)^2, \; D' = \beta\,(\alpha a_{13} - \beta a_{12}), \; D'' = \alpha\,(\beta a_{12} - \alpha a_{13})$$

nicht verschwinden, ist aus (18) z_1 eindeutig bestimmt. Ist aber $D'' = 0$, was für $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ genau dann eintritt, wenn $\alpha a_{13} - \beta a_{12} = 0$ wird, somit $D' = 0$ nach sich zieht, so ist (18) für alle Werte von z_1 erfüllt; in diesem Falle tritt z_1 als weiterer Parameter auf.

Ist $\dot{\Delta} = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, so bestimme man x_1, y_1 aus den Gleichungen:

$$(19) \qquad \begin{cases} x_1 x_2 + y_1 y_2 = a_{12} - z_1 z_2 = \dot{a}_{12}, \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 = \Delta_3'', \end{cases}$$

$$\Delta_3''^2 = \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} \\ \dot{a}_{12} & \dot{a}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & z_1 \\ a_{12} & a_{22} & z_2 \end{vmatrix};$$

für $\dot{a}_{22} \neq 0$ erhält man:

$$(20) \qquad \begin{cases} \dot{a}_{22}\, x_1 = \dot{a}_{12}\, x_2 + \Delta_3''\, y_2, \\ \dot{a}_{22}\, y_1 = \dot{a}_{12}\, y_2 - \Delta_3''\, x_2; \end{cases}$$

hieraus folgt unmittelbar:

$$\dot{a}_{22}^2 (x_1^2 + y_1^2) = \dot{a}_{12}^2\, \dot{a}_{22} + \Delta_3''^2\, \dot{a}_{22} = \dot{a}_{11}\, \dot{a}_{22}^2,$$

also:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a_{11};$$

ferner wird:

$$\dot{a}_{22}\, (x_1 x_3 + y_1 y_3) = \dot{a}_{12}\, \dot{a}_{23},$$

also:

$$\dot{a}_{22}\, \dot{a}_{13} - \dot{a}_{12}\, \dot{a}_{23} = \begin{vmatrix} z_2 & z_3 & 1 \\ a_{22} & a_{23} & z_2 \\ a_{12} & a_{13} & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

was für $z_3 \neq 0$ auf $\alpha a_{13} - \beta a_{12} = 0$ oder $a_{22} a_{13} - a_{12} a_{23} = 0$ führt. Man überzeugt sich leicht, daß bei Berücksichtigung der in I gefundenen Werte

$$(21) \begin{cases} x_3 = \dfrac{2\beta\lambda(1-\mu^2)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}, & y_3 = \dfrac{4\beta\lambda\mu}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}, & z_3 = \beta\,\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}; \\[2ex] x_2 = \dfrac{2\alpha\lambda(1-\mu^2)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}, & y_2 = \dfrac{4\alpha\lambda\mu}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}, & z_2 = \alpha\,\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{cases}$$

die Gleichungen (17) erfüllt sind. z_1, Δ_3'' lassen sich analog wie früher durch einen Parameter rational darstellen.

Die weiteren besonderen Fälle erledigen sich nach I unmittelbar.

Anmerkung.

Im Falle

$$a_{11} = a_{22} = a_{23} = 1,$$
$$a_{12} = a_{13} = a_{33} = 0$$

führen die Formeln (4), (5), (15) unmittelbar auf die Cayleyschen Formeln.

§ 3.

$$n = 4.$$

Wir haben die 3 Gruppen von Gleichungen:

A) $x_1 x_i + y_1 y_i + z_1 z_i + t_1 t_i = a_{1i}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$
B) $x_2 x_k + y_2 y_k + z_2 z_k + t_2 t_k = a_{2k}, \quad k = 2, 3, 4.$

$$\text{C)} \begin{cases} x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + t_3^2 = a_{33}, \\ x_3 x_4 + y_3 y_4 + z_3 z_4 + t_3 t_4 = a_{34}, \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + t_4^2 = a_{44}. \end{cases}$$

Nach § 1 ist C) zu lösen. Sei $a_{44} \neq 0$; dann setze man:

$$(1) \begin{cases} x_4 = \sqrt{a_{44}} \dfrac{8\lambda\mu\nu}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)(1+\nu^2)}, & y_4 = \sqrt{a_{44}} \dfrac{4\lambda\mu(1-\nu^2)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)(1+\nu^2)}, \\ z_4 = \sqrt{a_{44}} \dfrac{2\lambda(1-\mu^2)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}, & t_4 = \sqrt{a_{44}} \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}; \end{cases}$$

x_3, y_3 sind dann aus den beiden Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} x_3^2 + y_3^2 = a_{33} - z_3^2 - t_3^2 = \ddot{a}_{33}, \\ x_3 x_4 + y_3 y_4 = a_{34} - z_3 z_4 - t_3 t_4 = \ddot{a}_{34} \end{cases}$$

zu bestimmen. Wir bilden:

$$\ddot{\Delta} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}, \qquad \ddot{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} \ddot{a}_{33} & \ddot{a}_{34} \\ \ddot{a}_{34} & \ddot{a}_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} & z_3 \\ \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} & z_4 \\ z_3 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

wo ist:

$$\dot{a}_{33} = a_{33} - t_3^2, \ \dot{a}_{34} = a_{34} - t_3 t_4, \ \dot{a}_{44} = a_{44} - t_4^2; \ \ddot{a}_{44} = \dot{a}_{44} - z_4^2.$$

Es ergibt sich dann unmittelbar:

$$\ddot{\Delta}^2 = \frac{1}{\ddot{a}_{44}} \begin{vmatrix} \dot{a}_{33}\dot{a}_{44} - \dot{a}_{34}^2 & \dot{a}_{34} & z_3 \\ 0 & \dot{a}_{44} & z_4 \\ \dot{a}_{44} z_3 - \dot{a}_{34} z_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\dot{a}_{44}} \left\{ \ddot{a}_{44} (\dot{a}_{33} \dot{a}_{44} - \dot{a}_{34}^2) - (\dot{a}_{44} z_3 - \dot{a}_{34} z_4)^2 \right\}.$$

Wir setzen:

$$(3) \qquad \dot{a}_{44} z_3 - \dot{a}_{34} z_4 = \sqrt{\ddot{a}_{44}} \sqrt{\dot{a}_{33} \dot{a}_{44} - \dot{a}_{34}^2} \, \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2};$$

es wird dann:

$$(4) \qquad \ddot{\Delta} = \frac{\sqrt{\ddot{a}_{44}}}{\sqrt{\dot{a}_{44}}} \sqrt{\dot{a}_{33}\,\dot{a}_{44} - \dot{a}_{34}^2}\;\frac{2\rho}{1+\rho^2}.$$

In gleicher Weise wird:

$$\begin{vmatrix} \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} \\ \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{44}}\left((a_{33}\,a_{44} - a_{34}^2)\,\dot{a}_{44} - (a_{44}\,t_3 - a_{34}\,t_4)^2\right);$$

$$(5) \qquad a_{44}\,t_3 - a_{34}\,t_4 = \sqrt{a_{33}\,a_{44} - a_{34}^2}\,\sqrt{\dot{a}_{44}}\;\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}$$

$$= \sqrt{a_{33}\,a_{44} - a_{34}^2}\,\sqrt{a_{44}}\;\frac{2\lambda(1-\sigma^2)}{(1+\lambda^2)(1+\sigma^2)},$$

$$(6) \qquad \sqrt{\dot{a}_{33}\,\dot{a}_{44} - \dot{a}_{34}^2} = \frac{\sqrt{a_{33}\,a_{44} - a_{34}^2}}{\sqrt{a_{44}}}\sqrt{\dot{a}_{44}}\;\frac{2\sigma}{1+\sigma^2}$$

$$= \sqrt{a_{33}\,a_{44} - a_{34}^2}\;\frac{4\lambda\sigma}{(1+\lambda^2)(1+\sigma^2)};$$

aus (3) und (4) kommt nun:

$$(7) \quad \begin{cases} \ddot{\Delta} = \dfrac{16\sqrt{a_{33}\,a_{44} - a_{34}^2}\;\lambda\mu\rho\sigma}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)(1+\rho^2)(1+\sigma^2)}, \\[2ex] \dot{a}_{44}\,z_3 - \dot{a}_{34}\,z_4 = \dfrac{16\sqrt{a_{44}}\sqrt{a_{33}\,a_{44} - a_{34}^2}\;\lambda^2\mu\sigma(1-\rho^2)}{(1+\lambda^2)^2(1+\mu^2)(1+\sigma^2)(1+\rho^2)}. \end{cases}$$

Aus (5) und (7) sind z_3, t_3, $\ddot{\Delta}$ rational durch die Parameter $\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma$ bestimmt. x_3, y_3 erhält man aus den beiden linearen Gleichungen:

$$x_3\,x_4 + y_3\,y_4 = \ddot{a}_{34},$$
$$x_3\,y_4 - x_4\,y_3 = \ddot{\Delta};$$

es kommt:

$$(8) \qquad \begin{cases} x_3\,\ddot{a}_{44} = \ddot{a}_{34}\,x_4 + \ddot{\Delta}\,y_4, \\ y_3\,\ddot{a}_{44} = \ddot{a}_{34}\,y_4 - \ddot{\Delta}\,x_4. \end{cases}$$

Aus C) bestimmen sich x_2, y_2, z_2 nach § 2; wir schreiben:

$$C') \qquad \begin{cases} x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = a_{22} - t_2^2 = \dot{a}_{22}, \\ x_2\,x_3 + y_2\,y_3 + z_2\,z_3 = a_{23} - t_2\,t_3 = \dot{a}_{23}, \\ x_2\,x_4 + y_2\,y_4 + z_2\,z_4 = a_{24} - t_2\,t_4 = \dot{a}_{24}. \end{cases}$$

Die Determinante ist:

$$(9)\qquad \dot\Delta = \begin{vmatrix} x_2 y_2 z_2 \\ x_3 y_3 z_3 \\ x_4 y_4 z_4 \end{vmatrix}; \quad \dot\Delta^2 = \begin{vmatrix} \dot a_{22} \dot a_{23} \dot a_{24} \\ \dot a_{23} \dot a_{33} \dot a_{34} \\ \dot a_{24} \dot a_{34} \dot a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & t_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} & t_3 \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} & t_4 \\ t_2 & t_3 & t_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wir setzen:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \; D_2 = \begin{vmatrix} a_{34} & a_{23} \\ a_{44} & a_{24} \end{vmatrix}, \; D_3 = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{33} \\ a_{24} & a_{34} \end{vmatrix}, \; D = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix};$$

dann wird für $D_1 \neq 0$:

$$\dot\Delta^2 = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} D & a_{23} & a_{24} & t_2 \\ 0 & a_{33} & a_{34} & t_3 \\ 0 & a_{34} & a_{44} & t_4 \\ D_1 t_2 + D_2 t_3 + D_3 t_4 & t_3 & t_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D_1} \left(D \begin{vmatrix} \dot a_{33} & \dot a_{34} \\ \dot a_{34} & \dot a_{44} \end{vmatrix} - (D_1 t_2 + D_2 t_3 + D_3 t_4)^2 \right).$$

Der Ansatz

$$(10)\qquad D_1 t_2 + D_2 t_3 + D_3 t_4 = \sqrt{D}\sqrt{\dot a_{33} \dot a_{44} - \dot a_{34}^2}\,\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}$$

$$= 4\sqrt{D\cdot D_1}\,\frac{\lambda\sigma(1-\tau^2)}{(1+\lambda^2)(1+\sigma^2)(1+\tau^2)}$$

ergibt für $\dot\Delta$:

$$(11)\qquad \dot\Delta = \frac{8\sqrt{D}\,\lambda\cdot\sigma\cdot\tau}{(1+\lambda^2)(1+\sigma^2)(1+\tau^2)},$$

womit t_2, $\dot\Delta$ rational durch die Parameter λ, σ, τ ausgedrückt sind. x_2, y_2, z_2 bestimmen sich nun aus den linearen Gleichungen:

$$(12)\qquad \begin{cases} x_2 \dot\Delta_1 + y_2 \dot\Delta_2 + z_2 \dot\Delta_3 = \dot\Delta, \\ x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 = \dot a_{23}, \\ x_2 x_4 + y_2 y_4 + z_2 z_4 = \dot a_{24}, \end{cases}$$

wo

$$\dot{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad \dot{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_4 & x_4 \end{vmatrix}, \dot{\Delta}_3 = \ddot{\Delta} \tag{13}$$

rational durch die Parameter ausdrückbar sind. Die Determinante des Systems (12) ist:

$$\dot{D} = \begin{vmatrix} \dot{\Delta}_1 & \dot{\Delta}_2 & \dot{\Delta}_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \dot{\Delta}_1^2 + \dot{\Delta}_2^2 + \dot{\Delta}_3^2 = \dot{a}_{33}\,\dot{a}_{44} - \dot{a}_{34}^2, \tag{14}$$

$$\left(\dot{D}^2 = \begin{vmatrix} \dot{\Delta}_1^2 + \dot{\Delta}_2^2 + \dot{\Delta}_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} \\ 0 & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{34} \end{vmatrix} = \dot{D} \begin{vmatrix} \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} \\ \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} \end{vmatrix}\right)$$

die sich ebenfalls durch die Parameter rational darstellen läßt. Für $\dot{D} \neq 0$ kommt somit:

$$\left\{\begin{aligned} x_2\,\dot{D} &= \begin{vmatrix} \dot{\Delta} & \dot{\Delta}_2 & \dot{\Delta}_3 \\ \dot{a}_{23} & y_3 & z_3 \\ \dot{a}_{24} & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \dot{\Delta}\,\dot{\Delta}_1 - \begin{vmatrix} 0 & x_3 & x_4 \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} \\ \dot{a}_{24} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} \end{vmatrix}, \\ y_2\,\dot{D} &= \begin{vmatrix} \dot{\Delta}_1 & \dot{\Delta} & \dot{\Delta}_3 \\ x_3 & \dot{a}_{23} & z_3 \\ x_4 & \dot{a}_{24} & z_4 \end{vmatrix} = \dot{\Delta}\,\dot{\Delta}_2 - \begin{vmatrix} 0 & y_3 & y_4 \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} \\ \dot{a}_{24} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} \end{vmatrix}, \\ z_2\,\dot{D} &= \begin{vmatrix} \dot{\Delta}_1 & \dot{\Delta}_3 & \dot{\Delta} \\ x_3 & y_3 & \dot{a}_{23} \\ x_4 & y_4 & \dot{a}_{24} \end{vmatrix} = \Delta\,\dot{\Delta}_3 - \begin{vmatrix} 0 & z_3 & z_4 \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} \\ \dot{a}_{24} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Von der Behandlung der Ausnahmefälle in C) und B) sehen wir ab; sie geschieht ganz analog wie in § 1 bzw. § 2.

Aus A) ergeben sich x_1, y_1, z_1, t_1 mittels der Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} = x_1\,\Delta_1 + y_1\,\Delta_2 + z_1\,\Delta_3 + t_1\,\Delta_4,$$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & t_2 \\ y_3 & z_3 & t_3 \\ y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} z_2 & t_2 & x_2 \\ z_3 & t_3 & x_3 \\ z_4 & t_4 & x_4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} t_2 & x_2 & y_2 \\ t_3 & x_3 & y_3 \\ t_4 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

Die 4 linearen Gleichungen

$$(16) \qquad \begin{cases} x_1\,\Delta_1 + y_1\,\Delta_2 + z_1\,\Delta_3 + t_1\,\Delta_4 = \Delta, \\ x_1\;x_2 + y_1\;y_2 + z_1\;z_2 + t_1\;t_2 = a_{12}, \\ x_1\;x_3 + y_1\;y_3 + z_1\;z_3 + t_1\;t_3 = a_{13}, \\ x_1\;x_4 + y_1\;y_4 + z_1\;z_4 + t_1\;t_4 = a_{14} \end{cases}$$

mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 = D \neq 0$$

$$\left((\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2)^2 = \begin{vmatrix} \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2)\, D \right)$$

liefern:

$$(17) \qquad \begin{cases} x_1\,D = \begin{vmatrix} \Delta & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \\ a_{12} & y_2 & z_2 & t_2 \\ a_{13} & y_3 & z_3 & t_3 \\ a_{14} & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} = \Delta\;\Delta_1 - \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \\ y_1\,D = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta & \Delta_3 & \Delta_4 \\ x_2 & a_{12} & y_2 & t_2 \\ x_3 & a_{13} & y_3 & t_3 \\ x_4 & a_{14} & y_4 & t_4 \end{vmatrix} = \Delta\;\Delta_2 - \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 & y_4 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \\ z_1\,D = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta & \Delta_4 \\ x_2 & y_2 & a_{12} & t_2 \\ x_3 & y_3 & a_{13} & t_3 \\ x_4 & y_4 & a_{14} & t_4 \end{vmatrix} = \Delta\;\Delta_3 - \begin{vmatrix} 0 & z_2 & z_3 & z_4 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

$$\left\{\; t_1 D = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta \\ x_2 & y_2 & z_2 & a_{12} \\ x_3 & y_3 & z_3 & a_{13} \\ x_4 & y_4 & z_4 & a_{14} \end{vmatrix} = \Delta\,\Delta_4 - \begin{vmatrix} 0 & t_2 & t_3 & t_4 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \right.$$

womit x_1, y_1, z_1, t_1 als rationale Funktionen der Parameter bestimmt sind.

Wird die Determinante $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 = 0$, was, wie man leicht erkennt, $D = 0$ erfordert, so ist $\dot{\Delta} = \Delta_4$ bei entsprechender Modifikation der Gleichung (10) unmittelbar rational durch die Parameter ausdrückbar; x_1, y_1, z_1 bestimmen wir zunächst aus:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 &= \dot{a}_{12} = a_{12} - t_1 t_2, \\ x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 &= \dot{a}_{13} = a_{13} - t_1 t_3, \\ x_1 x_4 + y_1 y_4 + z_1 z_4 &= \dot{a}_{14} = a_{14} - t_1 t_4, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} x_1\,\dot{\Delta} &= \begin{vmatrix} \dot{a}_{12} & y_2 & z_2 \\ \dot{a}_{13} & y_3 & z_3 \\ \dot{a}_{14} & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & y_2 & z_2 & t_2 \\ a_{13} & y_3 & z_3 & t_3 \\ a_{14} & y_4 & z_4 & t_4 \\ t_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ y_1\,\dot{\Delta} &= \begin{vmatrix} x_2 & \dot{a}_{12} & z_2 \\ x_3 & \dot{a}_{13} & z_3 \\ x_4 & \dot{a}_{14} & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & a_{12} & z_2 & t_2 \\ x_3 & a_{13} & z_3 & t_3 \\ x_4 & a_{14} & z_4 & t_4 \\ 0 & t_1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ z_1\,\dot{\Delta} &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & \dot{a}_{12} \\ x_3 & y_3 & \dot{a}_{13} \\ x_4 & y_4 & \dot{a}_{14} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & a_{12} & t_2 \\ x_3 & y_3 & a_{13} & t_3 \\ x_4 & y_4 & a_{14} & t_4 \\ 0 & 0 & t_1 & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned} \right.$$

somit:

$$x_1\,\dot{\Delta}^2 = -\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 1 \\ a_{12} & y_2 & z_2 & t_2 \\ a_{13} & y_3 & z_3 & t_3 \\ a_{14} & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & z_2 & t_2 \\ 0 & y_3 & z_3 & t_3 \\ 0 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ t_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ t_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ t_3 & a_{23} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ t_4 & a_{24} & a_{34} & a_{44} & x_4 \end{vmatrix}$$

u. s. w.;

für t_1 ergibt $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 = a_{11}$ die lineare Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & t_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & t_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & t_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & t_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

$$\Bigg((x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\,\dot{\Delta}^2 = \dot{a}_{11} \begin{vmatrix} \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} & \dot{a}_{24} \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} \\ \dot{a}_{24} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \dot{a}_{12} & x_2 & y_2 & z_2 \\ \dot{a}_{13} & x_3 & y_3 & z_3 \\ \dot{a}_{14} & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 0 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \dot{a}_{12} & x_2 & y_2 & z_2 \\ \dot{a}_{13} & x_3 & y_3 & z_3 \\ \dot{a}_{14} & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & 2\dot{a}_{12} & 2\dot{a}_{13} & 2\dot{a}_{14} \\ \dot{a}_{12} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} & \dot{a}_{24} \\ \dot{a}_{13} & \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} \\ \dot{a}_{14} & \dot{a}_{24} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} \end{vmatrix},$$

also:

$$2 \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} & \dot{a}_{14} \\ \dot{a}_{12} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} & \dot{a}_{24} \\ \dot{a}_{13} & \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} \\ \dot{a}_{14} & \dot{a}_{24} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} \end{vmatrix} = 0 \Bigg).$$

Die Behandlung der weiteren Ausnahmefälle macht keine Schwierigkeit; wir sehen davon ab.

§ 4.

$n = 5$.

Wir haben die 4 Systeme:

$$
\begin{aligned}
&\text{A)}\quad x_1 x_k + y_1 y_k + z_1 z_k + t_1 t_k + v_1 v_k = a_{1k}, \; k = 1, 2, 3, 4, 5;\\
&\text{B)}\quad x_2 x_l + y_2 y_l + z_2 z_l + t_2 t_l + v_2 v_l = a_{2l}, \; l = 2, 3, 4, 5;\\
&\text{C)}\quad x_3 x_m + y_3 y_m + z_3 z_m + t_3 t_m + v_3 v_m = a_{3m}, \; m = 3, 4, 5;\\
&\text{D)}\left\{\begin{aligned} &x_4 x_n + y_4 y_n + z_4 z_n + t_4 t_n + v_4 v_n = a_{4n}, \; n = 4, 5,\\ &x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + t_5^2 + v_5^2 = a_{55}.\end{aligned}\right.
\end{aligned}
$$

Aus D) kommt für $a_{55} \neq 0$:

$$
(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
x_5 &= \sqrt{a_{55}}\,\frac{16\lambda\mu\nu\rho}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)(1+\nu^2)(1+\rho^2)},\\
y_5 &= \sqrt{a_{55}}\,\frac{8\lambda\mu\nu(1-\rho^2)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)(1+\nu^2)(1+\rho^2)},\\
z_5 &= \sqrt{a_{55}}\,\frac{4\lambda\mu(1-\nu^2)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)(1+\nu^2)},\\
t_5 &= \sqrt{a_{55}}\,\frac{2\lambda(1-\mu^2)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)},\\
v_5 &= \sqrt{a_{55}}\,\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2};
\end{aligned}\right.
$$

$$
(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&x_4 x_5 + y_4 y_5 = a_{44} - y_4^2 - t_4^2 - z_4^2 = \ddot{a}_{44},\\
&x_4 y_5 - x_5 y_4 = \ddot{\Delta},
\end{aligned}\right.
$$

wo ($\ddot{a}_{55} \neq 0$):

$$
\ddot{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} x_4^2 + y_4^2 & x_4 x_5 + y_4 y_5 \\ x_4 x_5 + y_4 y_5 & x_5^2 + y_5^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ddot{a}_{44} & \ddot{a}_{45} \\ \ddot{a}_{45} & \ddot{a}_{55} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \ddot{a}_{44} & \ddot{a}_{45} & z_4 \\ \ddot{a}_{45} & \ddot{a}_{55} & z_5 \\ z_4 & z_5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\ddot{a}_{55}} \begin{vmatrix} \ddot{a}_{44}\ddot{a}_{55} - \ddot{a}_{45}^2 & \ddot{a}_{45} z_4 \\ 0 & \ddot{a}_{55} z_5 \\ z_4 \ddot{a}_{55} - z_5 \ddot{a}_{45} & z_5 \quad 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{\ddot{a}_{55}} \left(\ddot{a}_{55}(\ddot{a}_{44}\ddot{a}_{55} - \ddot{a}_{45}^2) - (z_4 \ddot{a}_{55} - z_5 \ddot{a}_{45})^2\right).
$$

Wir setzen (unter der Voraussetzung, daß $a_{44}\, a_{55} - a_{45}^2 \neq 0$ u. s. w.):

$$
(3)\quad \begin{cases}
z_4\, \ddot{a}_{55} - z_5\, \ddot{a}_{45} = \sqrt{\dddot{a}_{55}}\, \sqrt{\ddot{a}_{44}\, \ddot{a}_{55} - \ddot{a}_{45}^2}\, \dfrac{1-\omega^2}{1+\omega^2}, \\[2ex]
t_4\, \dot{a}_{55} - t_5\, \dot{a}_{45} = \sqrt{\ddot{a}_{55}}\, \sqrt{\dot{a}_{44}\, \dot{a}_{55} - \dot{a}_{45}^2}\, \dfrac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \\[2ex]
v_4\, a_{55} - v_5\, a_{45} = \sqrt{\dot{a}_{55}}\, \sqrt{a_{44}\, a_{55} - a_{45}^2}\, \dfrac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}, \\[2ex]
\qquad\qquad = \sqrt{a_{55}}\, \sqrt{a_{44}\, a_{55} - a_{45}^2}\, \dfrac{2\lambda(1-\sigma^2)}{(1+\lambda^2)(1+\sigma^2)},
\end{cases}
$$

so daß sich ergibt:

$$
(4)\begin{cases}
\sqrt{\dot{a}_{44}\, \dot{a}_{55} - \dot{a}_{45}^2} = \sqrt{a_{44}\, a_{55} - a_{45}^2}\, \dfrac{4\lambda\sigma}{(1+\lambda^2)(1+\sigma^2)}, \\[2ex]
\sqrt{\ddot{D}} = \sqrt{\ddot{a}_{44}\, \ddot{a}_{55} - \ddot{a}_{45}^2} = \sqrt{a_{44}\, a_{55} - a_{45}^2}\, \dfrac{16\lambda\mu\sigma\tau}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)(1+\sigma^2)(1+\tau^2)}, \\[2ex]
\ddot{\Delta} = \sqrt{a_{44}\, a_{55} - a_{45}^2}\, \dfrac{64\lambda\mu\nu\sigma\tau\omega}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)(1+\nu^2)(1+\sigma^2)(1+\tau^2)(1+\omega^2)}.
\end{cases}
$$

Damit sind z_4, t_4, v_4, $\dddot{\Delta}$ rational durch die Parameter λ, μ, ν, ρ, σ, τ, ω dargestellt; x_4, y_4 erhält man aus (2):

$$
(5)\qquad \begin{cases}
\dddot{a}_{55}\, x_4 = \ddot{a}_{45}\, x_5 + \dddot{\Delta}\, y_5, \\
\dddot{a}_{55}\, y_4 = \ddot{a}_{45}\, y_5 - \dddot{\Delta}\, x_5.
\end{cases}
$$

C) führt auf:

$$
(6)\qquad \begin{cases}
x_3\, x_4 + y_3\, y_4 + z_3\, z_4 = \ddot{a}_{34}, \\
x_3\, x_5 + y_3\, y_5 + z_3\, z_5 = \ddot{a}_{35}, \\
x_3\, \ddot{\Delta}_1 + y_3\, \ddot{\Delta}_2 + z_3\, \ddot{\Delta}_3 = \ddot{\Delta},
\end{cases}
$$

wo ($\dot{D}_1 \neq 0$):

$$
\begin{cases}
\ddot{\Delta} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}, \\[4ex]
\ddot{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} \ddot{a}_{33} & \ddot{a}_{34} & \ddot{a}_{35} \\ \ddot{a}_{34} & \ddot{a}_{44} & \ddot{a}_{45} \\ \ddot{a}_{35} & \ddot{a}_{45} & \ddot{a}_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{35} & t_3 \\ \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} & \dot{a}_{45} & t_4 \\ \dot{a}_{35} & \dot{a}_{45} & \dot{a}_{55} & t_5 \\ t_3 & t_4 & t_5 & 1 \end{vmatrix}
\end{cases}
$$

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&= \frac{1}{\dot D_1}\begin{vmatrix} \dot D & \dot a_{31} & \dot a_{35} & t_3 \\ 0 & \dot a_{44} & \dot a_{45} & t_4 \\ 0 & \dot a_{45} & \dot a_{55} & t_5 \\ t_3 \dot D_1 + t_4 \dot D_2 + t_5 \dot D_3 & t_4 & t_5 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\dot D_1}(\dot D \ddot D - (t_3 \dot D_1 + t_4 \dot D_2 + t_5 \dot D_3)^2), \\
\dot D &= \begin{vmatrix} \dot a_{33} & \dot a_{34} & \dot a_{35} \\ \dot a_{34} & \dot a_{41} & \dot a_{45} \\ \dot a_{35} & \dot a_{45} & \dot a_{55} \end{vmatrix} = \dot a_{33} \dot D_1 + \dot a_{34} \dot D_2 + \dot a_{35} \dot D_3.
\end{aligned}\right.$$

Wir setzen ($\dot D \neq 0$, $D_1 \neq 0$):

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
& t_3 \dot D_1 + t_4 \dot D_2 + t_5 \dot D_3 = \sqrt{\dot D \ddot D}\ \frac{1-\varkappa^2}{1+\varkappa^2}, \\
& v_3 D_{11} + v_4 D_{12} + v_5 D_{13} = \sqrt{D_1 \dot D_1}\ \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}, \\
& D_1 = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{34} & a_{41} & a_{45} \\ a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix} = a_{33} D_{11} + a_{34} D_{12} + a_{35} D_{12};
\end{aligned}\right.$$

es kommt dann nach (7), (8) und (4):

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
\dot D &= \frac{1}{D_{11}}\begin{vmatrix} D_1 & a_{34} & a_{35} & v_3 \\ 0 & a_{44} & a_{45} & v_4 \\ 0 & a_{45} & a_{55} & v_5 \\ D_{11} v_3 + D_{12} v_4 + D_{13} v_5 & v_4 & v_5 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{D_{11}}(D_1 \dot D_1 - (D_{11} v_3 + D_{12} v_4 + D_{13} v_5)^2) \\
&= \frac{D_1 \dot D_1}{D_{11}}\ \frac{4\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2} = \frac{64\,\varepsilon^2 \lambda^2 \sigma^2 D_1}{(1+\varepsilon^2)^2 (1+\lambda^2)^2 (1+\sigma^2)^2}, \\
\ddot\Delta &= \sqrt{D_1}\ \frac{64\,\varepsilon \varkappa \lambda \mu \sigma \tau}{(1+\varepsilon^2)(1+\varkappa^2)(1+\lambda^2)(1+\mu^2)(1+\sigma^2)(1+\tau^2)}.
\end{aligned}\right.$$

Damit sind $\ddot\Delta$, t_3, v_3 und somit auch $\ddot\Delta_1$, $\ddot\Delta_2$, $\ddot\Delta_3$ durch die Parameter rational ausgedrückt; x_3, y_3, z_3 findet man aus (6):

$$
(10)\quad \begin{cases}
x_3\,\ddot{D} = \begin{vmatrix} \ddot{\Delta} & \ddot{\Delta}_2 & \ddot{\Delta}_3 \\ \ddot{a}_{34} & y_4 & z_4 \\ \ddot{a}_{35} & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = \ddot{\Delta}\,\ddot{\Delta}_1 - \begin{vmatrix} 0 & x_4 & x_5 \\ \ddot{a}_{34} & \ddot{a}_{44} & \ddot{a}_{45} \\ \ddot{a}_{35} & \ddot{a}_{45} & \ddot{a}_{55} \end{vmatrix}, \\
y_3\,\ddot{D} = \begin{vmatrix} \ddot{\Delta}_1 & \ddot{\Delta} & \ddot{\Delta}_3 \\ x_4 & \ddot{a}_{34} & z_4 \\ x_5 & \ddot{a}_{35} & z_5 \end{vmatrix} = \ddot{\Delta}\,\ddot{\Delta}_2 - \begin{vmatrix} 0 & y_4 & y_5 \\ \ddot{a}_{34} & \ddot{a}_{44} & \ddot{a}_{45} \\ \ddot{a}_{35} & \ddot{a}_{45} & \ddot{a}_{55} \end{vmatrix}, \\
z_3\,\ddot{D} = \begin{vmatrix} \ddot{\Delta}_1 & \ddot{\Delta}_2 & \ddot{\Delta} \\ x_4 & y_4 & \ddot{a}_{34} \\ x_5 & y_5 & \ddot{a}_{35} \end{vmatrix} = \ddot{\Delta}\,\ddot{\Delta}_3 - \begin{vmatrix} 0 & z_4 & z_5 \\ \ddot{a}_{34} & \ddot{a}_{44} & \ddot{a}_{45} \\ \ddot{a}_{35} & \ddot{a}_{45} & \ddot{a}_{55} \end{vmatrix}.
\end{cases}
$$

Die Gleichungen B) liefern für die Bestimmung der x_2, y_2, z_2, t_2:

$$
(11)\quad \begin{cases}
x_2\,x_3 + y_2\,y_3 + z_2\,z_3 + t_2\,t_3 = \dot{a}_{23}, \\
x_2\,x_4 + y_2\,y_4 + z_2\,z_4 + t_2\,t_4 = \dot{a}_{24}, \\
x_2\,x_5 + y_2\,y_5 + z_2\,z_5 + t_2\,t_5 = \dot{a}_{25}, \\
x_2\,\dot{\Delta}_1 + y_2\,\dot{\Delta}_2 + z_2\,\dot{\Delta}_3 + t_2\,\dot{\Delta}_4 = \dot{\Delta},
\end{cases}
$$

wo:

$$
\dot{\Delta} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & t_5 \end{vmatrix},
$$

$$
\dot{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} & \dot{a}_{24} & \dot{a}_{25} \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{35} \\ \dot{a}_{24} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} & \dot{a}_{45} \\ \dot{a}_{25} & \dot{a}_{35} & \dot{a}_{45} & \dot{a}_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & v_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & v_3 \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & v_4 \\ a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & v_5 \\ v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} D & a_{23} & a_{24} & a_{25} & v_2 \\ 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & v_3 \\ 0 & a_{34} & a_{44} & a_{45} & v_4 \\ 0 & a_{35} & a_{45} & a_{55} & v_5 \\ D_1\,v_2 + D_2\,v_3 + D_3\,v_4 + D_4\,v_5 & v_3 & v_4 & v_5 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{D_1}\left(D\,\dot{D} - (D_1\,v_2 + D_2\,v_3 + D_3\,v_4 + D_4\,v_5)^2\right).
$$

Wir setzen ($D \neq 0$):

$$
(12)\qquad D_1\,v_2 + D_2\,v_3 + D_3\,v_4 + D_4\,v_5 = \sqrt{D\dot{D}}\,\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2},
$$

so daß wird:

$$\dot{\Delta} = \frac{16 \cdot \lambda \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot \eta \cdot \sqrt{D}}{(1+\lambda^2)(1+\sigma^2)(1+\varepsilon^2)(1+\eta^2)}; \tag{13}$$

damit ist $\dot{\Delta}$ rational durch die Parameter dargestellt; dasselbe gilt von $\dot{\Delta}_1, \dot{\Delta}_2, \dot{\Delta}_3, \dot{\Delta}_4$. Die Determinante von (11) ist $\dot{\Delta}_1^2+\dot{\Delta}_2^2+\dot{\Delta}_3^2+\dot{\Delta}_4^2=\dot{D}$; somit ergibt sich aus (11):

$$(14)\left\{\begin{aligned}
x_2 \dot{D} &= \begin{vmatrix} \dot{\Delta} & \dot{\Delta}_2 & \dot{\Delta}_3 & \dot{\Delta}_4 \\ \dot{a}_{23} & y_3 & z_3 & t_3 \\ \dot{a}_{24} & y_4 & z_4 & t_4 \\ \dot{a}_{25} & y_5 & z_5 & t_5 \end{vmatrix} = \dot{\Delta}\,\dot{\Delta}_1 - \begin{vmatrix} 0 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{35} \\ \dot{a}_{24} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} & \dot{a}_{45} \\ \dot{a}_{25} & \dot{a}_{35} & \dot{a}_{45} & \dot{a}_{55} \end{vmatrix}, \\
y_2 \dot{D} &= \begin{vmatrix} \dot{\Delta}_1 & \dot{\Delta} & \dot{\Delta}_3 & \dot{\Delta}_4 \\ x_3 & \dot{a}_{23} & z_3 & t_3 \\ x_4 & \dot{a}_{24} & z_4 & t_4 \\ x_5 & \dot{a}_{25} & z_5 & t_5 \end{vmatrix} = \dot{\Delta}\,\dot{\Delta}_2 - \begin{vmatrix} 0 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{35} \\ \dot{a}_{24} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} & \dot{a}_{45} \\ \dot{a}_{25} & \dot{a}_{35} & \dot{a}_{45} & \dot{a}_{55} \end{vmatrix}, \\
z_2 \dot{D} &= \begin{vmatrix} \dot{\Delta}_1 & \dot{\Delta}_2 & \dot{\Delta} & \dot{\Delta}_4 \\ x_3 & y_3 & \dot{a}_{23} & t_3 \\ x_4 & y_4 & \dot{a}_{24} & t_4 \\ x_5 & y_5 & \dot{a}_{25} & t_5 \end{vmatrix} = \dot{\Delta}\,\dot{\Delta}_3 - \begin{vmatrix} 0 & z_3 & z_4 & z_5 \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{35} \\ \dot{a}_{24} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} & \dot{a}_{45} \\ \dot{a}_{25} & \dot{a}_{35} & \dot{a}_{45} & \dot{a}_{55} \end{vmatrix}, \\
t_2 \dot{D} &= \begin{vmatrix} \dot{\Delta}_1 & \dot{\Delta}_2 & \dot{\Delta}_3 & \dot{\Delta} \\ x_3 & y_3 & z_3 & \dot{a}_{23} \\ x_4 & y_4 & z_4 & \dot{a}_{24} \\ x_5 & y_5 & z_5 & \dot{a}_{25} \end{vmatrix} = \dot{\Delta}\,\dot{\Delta}_4 - \begin{vmatrix} 0 & t_3 & t_4 & t_5 \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{35} \\ \dot{a}_{24} & \dot{a}_{34} & \dot{a}_{44} & \dot{a}_{45} \\ \dot{a}_{25} & \dot{a}_{35} & \dot{a}_{45} & \dot{a}_{55} \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

Endlich ergeben sich x_1, y_1, z_1, t_1, v_1 aus den Gleichungen A) durch Hinzunahme von:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & v_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = x_1\Delta_1 + y_1\Delta_2 + z_1\Delta_3 + t_1\Delta_4 + v_1 z_5, \tag{15}$$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante des Systems ist:

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix} = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \Delta_5^2 = D.$$

Man findet so:

$$(16)\quad \begin{cases} x_1 D = \begin{vmatrix} \Delta & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 \\ a_{12} & y_2 & z_2 & t_2 & v_2 \\ a_{13} & y_3 & z_3 & t_3 & v_3 \\ a_{14} & y_4 & z_4 & t_4 & v_4 \\ a_{15} & y_5 & z_5 & t_5 & v_5 \end{vmatrix} = \Delta\, \Delta_1 - \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix}, \\[2ex] y_1 D = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 \\ x_2 & a_{12} & z_2 & t_2 & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \Delta\, \Delta_2 - \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \\[2ex] z_1 D = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta & \Delta_4 & \Delta_5 \\ x_2 & y_2 & a_{12} & t_2 & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \Delta\, \Delta_3 - \begin{vmatrix} 0 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \\[2ex] t_1 D = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta & \Delta_5 \\ x_2 & y_2 & z_2 & a_{12} & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \Delta\, \Delta_4 - \begin{vmatrix} 0 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \\[2ex] v_1 D = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & a_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \Delta\, \Delta_5 - \begin{vmatrix} 0 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Ist $D = 0$, so ist zunächst (12) entsprechend zu modifizieren (auf der rechten Seite ist η zu setzen), womit sich die Darstellung von $\dot\Delta$ in (13) ebenfalls ändert. x_1, y_1, z_1, t_1 berechnen wir nun aus den 4 Gleichungen:

$x_1\, x_k + y_1 y_k + z_1 z_k + t_1 t_k = \dot a_{1k}$, $\quad k = 2, 3, 4, 5$, was ergibt:

$$
(17)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x_1\,\dot\Delta &= \begin{vmatrix} \dot a_{12} & y_2 & z_2 & t_2 \\ \dot a_{13} & y_3 & z_3 & t_3 \\ \dot a_{14} & y_4 & z_4 & t_4 \\ \dot a_{15} & y_5 & z_5 & t_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & y_2 & z_2 & t_2 & v_2 \\ a_{13} & y_3 & z_3 & t_3 & v_3 \\ a_{14} & y_4 & z_4 & t_4 & v_4 \\ a_{15} & y_5 & z_5 & t_5 & v_5 \\ v_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\
x_1\,\dot\Delta^2 &= \begin{vmatrix} a_{12} & y_2 & z_2 & t_2 & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & z_2 & t_2 & v_2 \\ 0 & y_3 & z_3 & t_3 & v_3 \\ 0 & y_4 & z_4 & t_4 & v_4 \\ 0 & y_5 & z_5 & t_5 & v_5 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 1 \\ v_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 \\ v_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & x_2 \\ v_3 & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & x_3 \\ v_4 & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & x_4 \\ v_5 & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & x_5 \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}
\right.
$$

v_1 bestimmt sich aus der linearen Gleichung:

$$
\dot a_{11}\,\dot\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 0 & x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ \dot a_{12} & x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ \dot a_{13} & x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ \dot a_{14} & x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \\ \dot a_{15} & x_5 & y_5 & z_5 & t_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ 0 & x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ 0 & x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ 0 & x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \\ 0 & x_5 & y_5 & z_5 & t_5 \end{vmatrix}
$$

$$
= -\begin{vmatrix} \dot a_{11} & 2\dot a_{12} & 2\dot a_{13} & 2\dot a_{14} & 2\dot a_{15} \\ \dot a_{12} & \dot a_{22} & \dot a_{23} & \dot a_{24} & \dot a_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},
$$

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} & \dot{a}_{14} & \dot{a}_{15} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & t_1 \\ a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t_2 \\ a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t_3 \\ a_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t_4 \\ a_{15} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t_5 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Von der Betrachtung der weiteren Sonderfälle wird abgesehen:

§ 5.

$n > 5$.

1. Aus den Gleichungen

A) $x_{11}\, x_{k1} + x_{12}\, x_{k2} + \cdots + x_{1n}\, x_{kn} = a_{1k},\ k = 1, 2, 3, \cdots, n$

und der Determinante

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \\ &= x_{11}\Delta_1 + x_{12}\Delta_2 + \cdots + x_{1n}\Delta_n, \\ \Delta^2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

bestimmt man für

$$(2)\qquad D = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \cdots & \Delta_n \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2$$

$$= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ a_{23} & a_{23} & \cdot\cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\left(D \cdot \Delta = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\right.$$

wenn $\Delta \neq 0$; gilt aber auch für $\Delta = 0)$

die Veränderlichen $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$:

$$\text{(3)} \qquad x_{1k}\, D = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \cdot\cdot & \Delta_{k-1} & \Delta & \Delta_{k+1} & \cdots & \Delta_n \\ x_{21} & x_{22} & \cdot\cdot & x_{2,k-1} & a_{12} & x_{2,k+1} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n2} & x_{n3} & \cdot\cdot & x_{n,k-1} & a_{1n} & x_{n,k+1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \Delta \Delta_k - \begin{vmatrix} 0 & x_{2k} & x_{3k} & \cdots & x_{nk} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ist $D = 0$, so kommt aus

$$x_{11}\, x_{k1} + x_{12}\, x_{k2} + \cdots + x_{1,n-1}\, x_{k,n-1} = \dot{a}_{1k} = a_{1k} - x_{1n}\, x_{kn}, \quad k = 2, 3, \ldots, n:$$

$$\text{(4)} \left\{ \begin{aligned} x_{1k} \cdot \dot{\Delta} &= \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,k-1} & \dot{a}_{12} & x_{2,k+1} & \cdots & x_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n,k-1} & \dot{a}_{1n} & x_{n,k+1} & \cdots & x_{n,n-1} \end{vmatrix}, \\ \dot{\Delta} &= \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n,n-1} \end{vmatrix}, \; \dot{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} & \cdots & \dot{a}_{2n} \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \cdots & \dot{a}_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \dot{a}_{2n} & \dot{a}_{3n} & \cdots & \dot{a}_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned} \right.$$

oder:

$$x_{1h}\,\dot{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} 0 & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{n1} & 1 \\ x_{1n} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ x_{2n} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & x_{21} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{nn} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} & x_{n1} \end{vmatrix};$$

x_{1n} bestimmt sich aus der linearen Gleichung:

$$\dot{a}_{11}\,\dot{\Delta}^2 = -\begin{vmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-1} \\ \dot{a}_{12} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \dot{a}_{1n} & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n,n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1,n-1} \\ 0 & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & x_{n1} & \cdots & x_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & 2\dot{a}_{12} & 2\dot{a}_{13} & \cdots & 2\dot{a}_{1n} \\ \dot{a}_{12} & \dot{a}_{22} & \cdot & \cdots & \dot{a}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \dot{a}_{1n} & \dot{a}_{2n} & \cdot & \cdots & \dot{a}_{nn} \end{vmatrix},$$

d. h.

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \cdots & \dot{a}_{1n} \\ \dot{a}_{12} & \dot{a}_{22} & \cdots & \dot{a}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} & x_{nn} \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Aus

B) $x_{21}\,x_{l1} + \cdots + x_{2,n-1}\,x_{l,n-1} = \dot{a}_{2l} = a_{2l} - x_{2n}\,x_{ln};\ l = 2, 3 \ldots, n$

erhält man mittels

$$\dot{\Delta} = x_{21}\,\dot{\Delta}_1 + x_{22}\,\dot{\Delta}_2 + \cdots + x_{2,n-1}\,\dot{\Delta}_{n-1}$$

die Beziehungen:

$$(6)\qquad \dot{D}\,x_{2h} = \begin{vmatrix} \dot{\Delta}_1 & \dot{\Delta}_2 \cdots & \dot{\Delta}_{h-1} & \dot{\Delta} & \dot{\Delta}_{h+1} & \cdots \dot{\Delta}_{n-1} \\ x_{31} & x_{32} \cdots & x_{3,h-1} & \dot{a}_{23} & x_{3,h+1} & \cdots x_{3,n-1} \\ \cdot & \cdot \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \dot{\Delta}\,\dot{\Delta}_h - \begin{vmatrix} 0 & x_{3h} & x_{4h} & \cdots & x_{nh} \\ \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} & \cdots & \dot{a}_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix};$$

dabei ist:

$$(7)\qquad \dot{D} = \dot{\Delta}_1^2 + \dot{\Delta}_2^2 + \cdots + \dot{\Delta}_{n-1}^2 = \begin{vmatrix} \dot{a}_{33} & \dot{a}_{34} & \cdots & \dot{a}_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}.$$

Setzen wir nun:

$$(8)\qquad D = a_{22}\,D_1 + \cdots a_{2n}\,D_{n-1},$$

so wird:

$$\dot{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{2n} & \cdots & a_{nn} & x_{nn} \\ x_{2n} & \cdots & x_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} D & a_{23} & \cdots & a_{2n} & x_{2n} \\ 0 & \cdot & \cdots & \cdot & x_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & \cdot & x_{nn} \\ D_1 x_{2n} + D_2 x_{3n} + \cdots + D_{n-1} x_{nn} & x_{3n} & \cdots & x_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D_1}\left(D\,\dot{D} - (D_1\,x_{2n} + D_2\,x_{3n} + \ldots + D_{n-1}\,x_{nn})^2\right).$$

Für $D \neq 0$ setzen wir:

$$(9) \qquad D_1 x_{2n} + D_2 x_{3n} + \ldots + D_{n-1} x_{nn} = \sqrt{D\dot{D}}\,\frac{\lambda_1^2 - 1}{\lambda_1^2 + 1},$$

so daß wird:

$$\dot{\Delta} = \sqrt{\frac{D\dot{D}}{D_1}}\,\frac{2\lambda_1}{1 + \lambda_1^2}.$$

Das weitere Verfahren ist klar.