Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1933. Heft I
Januar-März-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über den Koeffizientenkörper von Reihenentwicklungen, insbesondere algebraischer Funktionen.

Von F. Lettenmeyer in München.

Vorgelegt in der Sitzung am 5. Februar 1933 von Herrn Perron.

§ 1. Einleitung.

Es sei $f(x, y)$ ein Polynom n-ten Grades in y, dessen Koeffizienten Potenzreihen in x sind:

$$f(x, y) = \sum_{\sigma=0}^{n} A_\sigma(x)\, y^\sigma, \qquad A_\sigma(x) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} a_{\varrho\sigma}\, x^\varrho.$$

Dann gibt es Potenzreihen der Gestalt

$$(1) \qquad \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (\nu_0 \text{ und } k \text{ ganz, } \nu_0 \gtreqless 0,\ k > 0),$$

welche, für y eingesetzt, die Gleichung

$$(2) \qquad f(x, y) = 0$$

formal erfüllen. Dies heißt: nach formaler Ausrechnung der linken Seite und Zusammenfassung der Glieder mit gleich hohen Potenzen von x entsteht eine (ev. mit einem negativen Exponenten beginnende) Potenzreihe in $x^{\frac{1}{k}}$, deren sämtliche Koeffizienten gleich Null sind

σ kom-
id, ins-
Funk-

(x) be-
σ nicht
em die
r Cha-
ier die

Die Verweisungen beziehen sich nicht auf die Paginierung des Heftes, sondern zählen die Seiten dieser Arbeit für sich. So ist

auf S. 118 mit S. 5 die S. 107 gemeint,
S. 119 mit S. 4 die S. 106,
S. 121 mit S. 13 die S. 115,
S. 127 mit S. 8 die S. 110.

Der Existenzbeweis für solche Reihenentwicklungen (1) wird in der Lehre von den algebraischen Funktionen gewöhnlich mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln geführt; ein solcher Beweis kommt hier natürlich nicht in Betracht. Einen Beweis für die obige Aussage in der eben formulierten Allgemeinheit haben Hensel und Landsberg gegeben[1]; und zwar durch eingehende Analysierung der Methode der sog. Puiseuxschen Diagramme, welche gewöhnlich nur zur numerischen Berechnung der Entwicklungskoeffizienten c_ν verwendet wird.[2]

In der vorliegenden Arbeit wird die Existenz solcher Reihenentwicklungen (1) stets vorausgesetzt; es soll sich dann um Aussagen über die Natur der Koeffizienten c_ν handeln. In dieser Beziehung sei zunächst folgender Satz genannt:

Wenn eine Potenzreihe (1), für y eingesetzt, die algebraische Gleichung n-ten Grades (2) formal erfüllt, so gehören die sämtlichen Koeffizienten c_ν einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper über $\mathfrak{A}$ von höchstens n-tem Grad an.

Es gehören also z. B. die Entwicklungskoeffizienten einer algebraischen Funktion n-ten Grades an der Stelle o einem algebraischen Zahlkörper höchstens n-ten Grades über dem Körper der Gleichungskoeffizienten an.

Dieser Satz ist, ohne ausdrücklich formuliert zu sein, in einer Arbeit von Runge vom Jahr 1887[3] enthalten. Dort wird S. 430 bewiesen, daß die c_ν einem endlichen algebraischen Körper über $\mathfrak{A}$ angehören; aus einer späteren Bemerkung (S. 431 Z. 25—26) läßt sich dann schließen, daß dieser Körper von höchstens n-tem Grad sein kann. Auch mit Benützung der von Hensel und Landsberg a. a. O. über das Puiseuxsche Verfahren bewiesenen Hilfssätze läßt sich der Satz gewinnen.

---

[1] Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen usw., Leipzig 1902, S. 39—67.

[2] Einen andern Existenzbeweis werde ich in einer an die vorliegende anschließenden Arbeit mitteilen.

[3] Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) Bd. 100, S. 430—431. (Daß es sich dort um Reihenentwicklungen an der Stelle ∞ handelt, ist natürlich unwesentlich.)

Der Zweck der vorliegenden Arbeit war ursprünglich lediglich der, für den genannten Satz einen besonders elementaren Beweis mitzuteilen, wobei nichts aus der Lehre von den algebraischen Zahlen benützt wird. Es läßt sich ja auch der Satz, ohne den Begriff des Grades eines algebraischen Körpers zu verwenden, einfach so aussprechen:

Die c_ν lassen sich sukzessive aus den $a_{\varrho\sigma}$ durch Auflösung algebraischer Gleichungen berechnen; man braucht dazu nur endlich viele nichtlineare Gleichungen, und das Produkt der Grade dieser letzteren ist $\leqq n$.

Nun leistet aber der Beweis mehr. Einmal zeigt er nämlich, daß für den Grad des „Koeffizientenkörpers" (so sei der die sämtlichen c_ν enthaltende endliche algebraische Erweiterungskörper über $\mathfrak{A}$ kurz genannt) eine Schranke besteht, für deren Angabe die Zahl n gar nicht in Betracht kommt. Der oben formulierte Satz ist also insofern keine abschließende Erkenntnis, als der Grad des Koeffizientenkörpers mit dem Grad der algebraischen Gleichung eigentlich gar nichts zu tun hat, abgesehen davon, daß die für den Grad des Koeffizientenkörpers angebbare Schranke ihrerseits trivialerweise mit $\leqq n$ abgeschätzt werden kann.

Hat man diese Unwesentlichkeit der Zahl n erkannt, so liegt die Vermutung nahe, daß sich der ganze Tatsachenkomplex (Existenz des Koeffizientenkörpers und Aussage über seinen Grad) auch vorfinden wird, wenn eine Potenzreihe (1) eine Gleichung „unendlich hohen Grades in y" formal erfüllt, d. h. eine Gleichung der Form

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\varrho\sigma}\, x^\varrho\, y^\sigma = 0. \tag{3}$$

Dies ist nun in der Tat mit gewissen Einschränkungen richtig. Die Ergebnisse lassen sich in dem Fall am leichtesten aussprechen, daß es sich um eine Potenzreihe (1) ohne negative Exponenten handelt. Schreibt man die Gleichung (2) in der Form

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho\, \Phi_\varrho(y) = 0,$$

wo also die $\Phi_\varrho(y)$ Polynome höchstens n-ten Grades in y mit Koeffizienten aus $\mathfrak{A}$ sind, und natürlich $\Phi_0(y)$ als nicht identisch

Null angenommen werden darf, und setzt voraus, daß diese Gleichung durch eine Potenzreihe der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{h}},$$

für y eingesetzt, formal erfüllt wird, so liefert der im folgenden gegebene Beweis als Schranke für den Grad des Koeffizientenkörpers den Grad m des Polynoms $\Phi_0(y)$, der natürlich $< n$ sein kann. (Übrigens wird später in den Sätzen I und II noch eine bessere Schranke angegeben werden.)

Bei dem Beweis dieser Tatsache wird nun gar nicht davon Gebrauch gemacht, daß die Grade der Polynome $\Phi_\varrho(y)$ beschränkt sind; der Beweis bleibt ohne weiteres gültig, wenn diese Grade nicht beschränkt sind.[4]

Wir legen also den folgenden Untersuchungen für den Fall, daß in (1) $r_0 \geqq 0$ ist, eine Gleichung der Form

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \Phi_\varrho(y) = 0 \text{ mit } \Phi_\varrho(y) = \sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^\sigma \ ^{5} \\ \qquad\qquad (\text{nicht alle } a_{0\sigma} \text{ seien } = 0) \end{cases}$$

zugrunde, wobei die Zahlen n_ϱ nicht beschränkt zu sein brauchen.

Die Gesamtheit der Gleichungen (4) läßt sich noch in anderer Weise charakterisieren:

Es sei $R > 0$ eine beliebig groß vorgeschriebene ganze Zahl und

$$S = \max n_\varrho \text{ mit } 0 \leqq \varrho < R,$$

dann gibt es in (4) keine $a_{\varrho\sigma}$ mit $0 \leqq \varrho < R$ und $\sigma > S$.
Wird also die linke Seite von (4) in der Form

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} y^\sigma \sum_{\varrho=0}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^\varrho$$

---

[4] Daß es auch in diesem allgemeineren Fall von Gleichungen unendlich hohen Grades formal erfüllende Potenzreihen gibt, wird in der vorliegenden Arbeit stets vorausgesetzt. Der in Fußnote 2 angekündigte Existenzbeweis wird sich auf alle diese Fälle mit erstrecken.

[5] Die n_ϱ brauchen hier nicht die wahren Grade (im Sinn $a_{\varrho n_\varrho} \neq 0$) der betr. Polynome zu sein; dies sei hier lediglich festgesetzt, damit in (4) die innere Summe auch Null bedeuten kann. Die vorhin eingeführte Zahl m ist also $\leqq n_0$.

geschrieben, so beginnt für $\sigma > S$ die innere Summe frühestens mit $\varrho = R$; da R beliebig war, bedeutet dies, das sich jede Gleichung (4) in der Form schreiben läßt:

$$(5)\quad \begin{cases} \sum_{\sigma=0}^{\infty} A_\sigma(x)\, y^\sigma = 0 \\ \text{mit } A_\sigma(x) = \sum_{\varrho=g_\tau}^{\infty} a_{\varrho\sigma}\, x^\varrho, \text{[6]} \quad g_\sigma \geqq 0, \quad \lim_{\sigma\to\infty} g_\sigma = +\infty \\ \text{(nicht alle } g_\sigma \text{ seien} > 0 \text{ und nicht alle } a_{0\tau} \text{ seien} = 0). \end{cases}$$

Umgekehrt ist auch jede Gleichung (5) von der Form (4); denn sammelt man auf der linken Seite von (5) die Glieder mit ein und derselben Potenz von x, so gibt es nur endlich viele.

Die Gleichungstypen (4) und (5) sind also einander äquivalent; insbesondere sind auch die Spezialfälle einander äquivalent, daß in (4) die Zahlen n_ϱ beschränkt sind und daß in (5) von einem gewissen Index an alle $A_\sigma(x)$ identisch Null sind, d.h. daß (5) eine Gleichung endlichen Grades in y ist.

In § 2 und § 3 werden die angekündigten Behauptungen für die Gleichungstypen (4) und (5) und den Fall, daß in (1) $r_0 \geqq 0$ ist, bewiesen werden.

In § 4 wird der besondere Fall behandelt werden, daß $r_0 > 0$ ist, und es wird sich herausstellen, daß man dann einen viel allgemeineren Gleichungstypus zugrunde legen kann, nämlich eine Gleichung der Form

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\varrho\sigma}\, x^\varrho\, y^\sigma = 0$$

ohne jede Einschränkung, außer daß natürlich nicht alle $a_{\varrho\sigma} = 0$ sein sollen.

In § 5 wird der Fall behandelt werden, daß die Potenzreihe (1) auch negative Exponenten enthält. Eine einfache Transformation wird zeigen, daß man sich auf solche Gleichungen vom Typus (5)

[6] Aus einem analogen Grund wie in der vorigen Fußnote brauchen hier nicht die $a_{g_\sigma\sigma} \neq 0$ zu sein.

beschränken muß, bei welchen die Anfangsexponenten g_σ stärker als $\frac{-\nu_0}{k}\sigma$ (ν_0 ist jetzt negativ) gegen $+\infty$ wachsen; d. h. es muß gelten:

$$\lim_{\sigma\to\infty}\left(g_\sigma+\frac{\nu_0}{k}\sigma\right)=+\infty;$$

abgesehen von dem ebenfalls zulässigen Fall einer Gleichung endlichen Grades in y. Für den Typus (4) bedeutet dies (s. § 5) die Einschränkung

$$\lim_{\varrho\to\infty}\left(n_\varrho+\frac{k}{\nu_0}\varrho\right)=-\infty.$$

Die Angaben über den Grad des Koeffizientenkörpers werden dann auf den Fall einer Potenzreihe ohne negative Exponenten zurückgeführt werden. In dem Spezialfall einer algebraischen Gleichung n-ten Grades in y wird sich a fortiori wiederum die Schranke $\leqq n$ ergeben.

In § 6 soll schließlich noch ein einfacherer Beweis für die Tatsache allein gegeben werden, daß der Koeffizientenkörper ein endlicher algebraischer Körper über $\mathfrak{A}$ ist, also ohne eine Aussage über seinen Grad.

§ 2. Der Hauptsatz.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Fall, daß eine Potenzreihe der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu, \tag{6}$$

für y eingesetzt, eine Gleichung der Form (4)

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \Phi_\varrho(y)=0$$

formal erfüllt.

Vorbemerkung: Für $x=0$ (d. h. durch Sammlung der von x freien Glieder) ergibt sich $\Phi_0(c_0)=0$. Das (nach Annahme nicht identisch verschwindende) Polynom $\Phi_0(y)$ hat also einen Grad $m\geqq 1$. Als Wurzel des Polynoms $\Phi_0(y)$ ist c_0 eine algebraische Größe eines bestimmten Grades w über $\mathfrak{A}$. Es bezeichne q die Vielfachheit von c_0 als Wurzel von $\Phi_0(y)$. Dann ist $w\leqq\frac{m}{q}$.

Es ist nämlich bekanntlich möglich, durch rationale Operationen aus $\Phi_0(y)$ ein Polynom $\Psi(y)$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{A}$ zu gewinnen, das die sämtlichen q-fachen Wurzeln von $\Phi_0(y)$ als einfache Wurzeln und keine weiteren Wurzeln besitzt. Die Anzahl der q-fachen Wurzeln von $\Phi_0(y)$ oder der Grad von $\Psi(y)$ ist nun eine Zahl $\leqq \frac{m}{q}$. Daher ist sicher $w \leqq \frac{m}{q}$.

Unter Verwendung dieser Vorbemerkung sprechen wir nun folgenden Satz aus:

Satz I: In $F(x,y) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} x^{\varrho}\, \Phi_{\varrho}(y)$

seien die $\Phi_{\varrho}(y)$ Polynome in y mit Koeffizienten aus einem Körper $\mathfrak{A}$. (Die Grade dieser Polynome brauchen nicht beschränkt zu sein.) $\Phi_0(y)$ sei nicht identisch Null.

Die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}\, x^{\nu}$ erfülle, für y eingesetzt, formal die Gleichung $F(x, y) = 0$.

m, q, w seien die in der Vorbemerkung erklärten Zahlen.

Behauptung: Sämtliche c_{ν} gehören einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper über $\mathfrak{A}$ an, dessen Grad $\leqq wq$, also erst recht $\leqq m$ ist.

1. Anmerkung: Die Gleichung $F(x, y) = 0$ kann auch in der äquivalenten Form (5) des § 1 erscheinen.

2. Anmerkung: Ist $F(x, y) = 0$ speziell eine algebraische Gleichung vom Grad n (vgl. § 1), so ist $m \leqq n$, da ja die Grade sogar aller Polynome $\Phi_{\varrho}(y)$ höchstens gleich n sind.

3. Anmerkung: Es sei $\Phi_0(y) = \sum_{\sigma=\mu}^{m} a_{0\sigma}\, y^{\sigma}$ und $c_0 \neq 0$. Dann sind die für c_0 bezüglich dieses Polynoms definierten Zahlen w und q offenbar dieselben wie bezüglich des Polynoms $\sum_{\sigma=0}^{m-\mu} a_{0,\sigma+\mu}\, y^{\sigma}$;

also $wq \leqq m - \mu$. In diesem Fall kann also der Grad des Koeffizientenkörpers mit $m - \mu$ abgeschätzt werden.

Beweis des Satzes I.

Verabredung: $\Phi_\varrho^{(\tau)}$ ohne Argumentangabe bedeute stets $\Phi_\varrho^{(\tau)}(c_0)$.

Wir setzen die Potenzreihe (6) in $F(x, y)$ ein und ordnen formal in eine Potenzreihe in x um:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} K_\lambda x^\lambda.$$

Nach Annahme sind dann alle $K_\lambda = 0$.

Zunächst ist (s. Vorbemerkung) $K_0 = \Phi_0$. Nun sei $\lambda \geqq 1$. Der Koeffizient K_λ wird offenbar bereits dann erhalten, wenn in dem Ausdruck

$$\sum_{\varrho=0}^{\lambda} x^\varrho \Phi_\varrho \left(\sum_{\nu=0}^{\lambda-\varrho} c_\nu x^\nu \right)$$

die Glieder mit x^λ gesammelt werden. Hieraus ersieht man einmal, daß K_λ endlich viele Glieder enthält, ferner daß K_λ keine anderen c_ν enthalten kann als $c_0, c_1, \cdots, c_\lambda$. Suchen wir nun die Glieder von K_λ, welche c_λ enthalten, so muß $\varrho = 0$ sein; es genügt also, sie aus dem Ausdruck

$$\Phi_0 \left(\sum_{\nu=0}^{\lambda} c_\nu x^\nu \right) = \Phi_0 + \Phi_0' \sum_{\nu=1}^{\lambda} c_\nu x^\nu + \frac{1}{2} \Phi_0'' \left(\sum_{\nu=1}^{\lambda} c_\nu x^\nu \right)^2 + \cdots$$

zu sammeln, was ersichtlich $\Phi_0' \cdot c_\lambda$ liefert. Es ist also für $\lambda \geqq 1$:

$K_\lambda = \Phi_0' c_\lambda +$ Polynom in $c_0, c_1, \cdots, c_{\lambda-1}$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{A}$.

Das Gleichungssystem $K_\lambda = 0$ ($\lambda \geqq 1$) liefert also im Fall $\Phi_0' \neq 0$ (d. h. $q = 1$) sukzessive $c_1, c_2, c_3, \cdots$ als Größen des Körpers $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}, c_0)$ vom Grad w. Damit ist im Fall $\Phi_0' \neq 0$ der Satz I bewiesen.

Da $\Phi_0(y)$ ein Polynom m-ten Grades ($m \geqq 1$) ist, sind die Größen $\Phi_0', \Phi_0'', \cdots, \Phi_0^{(m)}$ nicht alle $= 0$. Es gibt also eine ganze Zahl ω mit $1 \leqq \omega \leqq m$, für welche folgendes gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_0' \\ \Phi_0'', \Phi_1' \\ \Phi_0''', \Phi_1'', \Phi_2' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_0^{(\omega-1)}, \Phi_1^{(\omega-2)}, \cdots, \Phi_{\omega-2}' \end{array}\right\} \text{sind alle} = 0; \text{ (im Fall } \omega = 1 \text{ fällt dies weg)}$$

$\Phi_0^{(\omega)}, \quad \Phi_1^{(\omega-1)}, \cdots\cdots, \Phi_{\omega-1}'$ sind nicht alle $= 0$.

Im Fall $\omega = 1$, d. h. $\Phi_0' \neq 0$, ist Satz I richtig. Wir führen nun einen Induktionsbeweis, indem wir die Behauptung für $\omega = 1, 2, \cdots, p-1$ $(p \geqq 2)$ als bewiesen annehmen und hieraus ihre Richtigkeit für $\omega = p$ schließen.

Es gelte also:

(a) $\quad \Phi_\varrho^{(\tau)} = 0$ für alle $\varrho \geqq 0$, $\tau \geqq 1$ mit $\varrho + \tau < p$;

(b) $\quad \Phi_0^{(p)}, \Phi_1^{(p-1)}, \cdots, \Phi_{p-1}'$ nicht alle $= 0$.

Es ist daher c_0 eine mindestens p-fache Wurzel von $\Phi_0(y)$; d. h. $p \leqq q$.

Wir setzen nun $y = c_0 + xz$; dann wird

$$F(x, y) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \sum_{\tau=0}^{\infty} \Phi_\varrho^{(\tau)} x^\tau \frac{z^\tau}{\tau!}; \text{ hierin } \varrho + \tau = \alpha \text{ gesetzt:}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\infty} x^\alpha \sum_{\tau=0}^{\alpha} \Phi_{\alpha-\tau}^{(\tau)} \frac{z^\tau}{\tau!}.$$

Nun sind nach (a) alle $\Phi_{\alpha-\tau}^{(\tau)} = 0$ mit $\alpha < p$, $\tau \geqq 1$; also $(\alpha - p = \varrho$ gesetzt)

$$= \sum_{\alpha=0}^{p-1} x^\alpha \Phi_\alpha + x^p \sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \sum_{\tau=0}^{p+\varrho} \Phi_{p+\varrho-\tau}^{(\tau)} \frac{z^\tau}{\tau!}.$$

Daß $F(x, y)$ durch die für y eingesetzte Potenzreihe (6) formal zu Null gemacht wird, ist nun gleichbedeutend damit, daß der zuletzt erhaltene Ausdruck durch die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu+1} x^\nu, \tag{7}$$

für z eingesetzt, formal zu Null gemacht wird. Hieraus folgt:

$$\Phi_\alpha = 0 \qquad \text{für } \alpha = 0, 1, \cdots, p-1.$$

(Von diesen Relationen mit $\alpha = 1, \cdots, p-1$ wird kein Gebrauch gemacht.)

Wir gewinnen also die Aussage:

Die Potenzreihe (7) erfüllt, für z eingesetzt, formal die Gleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^{\varrho}\, \overline{\Phi}_{\varrho}(z) = 0,$$

wo zur Abkürzung $\sum_{\tau=0}^{p+\varrho} \Phi_{p+\varrho-\tau}^{(\tau)} \frac{z^{\tau}}{\tau!} = \overline{\Phi}_{\varrho}(z)$ gesetzt ist.

Hiebei sind die $\overline{\Phi}_{\varrho}(z)$ Polynome in z mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$; $\overline{\Phi}_0(z) = \sum_{\tau=0}^{p} \Phi_{p-\tau}^{(\tau)} \frac{z^{\tau}}{\tau!}$ ist, wie aus (b) folgt, nicht identisch Null und hat einen Grad $\overline{m}$ mit $1 \leqq \overline{m} \leqq p$.

Damit liegt ein Sachverhalt vor, der dem in Satz I vorausgesetzten Sachverhalt völlig analog ist; es treten an Stelle der $\Phi_{\varrho}(y)$ die $\overline{\Phi}_{\varrho}(z)$, an Stelle von m die Zahl $\overline{m}$, an Stelle von $\mathfrak{A}$ der Körper $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$, an Stelle der c_{ν} die $c_{\nu+1}$ ($\nu \geqq 0$). c_1 ist Wurzel des Polynoms $\overline{\Phi}_0(z)$.

Es gibt dann auch eine zu der Zahl ω analog definierte Zahl $\overline{\omega}$ mit $1 \leqq \overline{\omega} \leqq \overline{m}$.

Ist nun $\overline{\omega} < p$, so liefert die Induktionsannahme, auf den neuen Sachverhalt angewandt, folgende Aussage:

Sämtliche $c_{\nu+1}$ ($\nu \geqq 0$) gehören einem algebraischen Erweiterungskörper über $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$ an, dessen Grad $\leqq \overline{m}$ ist. Als Erweiterungskörper über $\mathfrak{A}$ hat er daher einen Grad $\leqq w\overline{m}$; wegen $\overline{m} \leqq p \leqq q$ ist damit die Behauptung des Satzes I bewiesen.

Es sei nun $\overline{\omega} = p$. Dies besagt (nach Definition von $\overline{\omega}$) unter anderm, daß $\overline{\Phi}_0', \overline{\Phi}_0'', \cdots, \overline{\Phi}_0^{(p-1)}$ alle $= 0$ sind. Dabei besteht jetzt die Verabredung: $\overline{\Phi}_{\varrho}^{(\tau)}$ ohne Argumentangabe bedeute stets $\overline{\Phi}_{\varrho}^{(\tau)}(c_1)$.

Wegen $\overline{\omega} \leqq \overline{m} \leqq p$ ist jetzt $\overline{m} = p$; d. h. (weil $\overline{\Phi}_0(z)$ mit $\Phi_0^{(p)} \frac{z^p}{p!}$ beginnt): $\Phi_0^{(p)} \neq 0$ oder, was dasselbe ist: $\overline{\Phi}_0^{(p)} \neq 0$.

Es ist also c_1 eine p-fache Wurzel von $\overline{\Phi}_0(z)$, woraus folgt (vgl. die Vorbemerkung), daß c_1 dem Körper $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$ angehört. In dem neuen Sachverhalt tritt also an Stelle von q die Zahl p, an Stelle von w die Zahl 1.

Wir setzen nun $z = c_1 + x u$ und führen für den neuen Sachverhalt genau dieselbe Transformation durch wie bei dem ursprünglichen. So gewinnen wir die Aussage:

Die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu+2} x^{\nu}$ erfüllt, für u eingesetzt, formal die Gleichung $\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^{\varrho} \overline{\overline{\Phi}}_{\varrho}(u) = 0$,

wo zur Abkürzung $\sum_{\tau=0}^{p+\varrho} \overline{\Phi}_{p+\varrho-\tau}^{(\tau)} \frac{u^{\tau}}{\tau!} = \overline{\overline{\Phi}}_{\varrho}(u)$ gesetzt ist. Hiebei sind die $\overline{\overline{\Phi}}_{\varrho}(u)$ Polynome in u wieder mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$; $\overline{\overline{\Phi}}_0(u)$ ist nicht identisch Null und vom Grad p.

Das ist nun wiederum ein dem ursprünglichen analoger Sachverhalt, zu welchem es eine Zahl $\overline{\overline{\omega}}$ mit $1 \leqq \overline{\overline{\omega}} \leqq p$ gibt. Ist $\overline{\overline{\omega}} < p$, so folgt genau wie oben die Behauptung des Satzes I; ist $\overline{\overline{\omega}} = p$, so folgt ebenfalls genau wie oben, daß c_2 dem Körper $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$ angehört.

Es ist nun klar, daß sich das Verfahren in völlig analoger Weise fortsetzen läßt, und hier gewiß entbehrlich, dies durch ein Induktionsverfahren ausführlich darzutun. Entweder tritt einmal eine mehrfach überstrichene Zahl ω auf, die $< p$ ist; dann folgt wie oben die Behauptung des Satzes I. Oder es sind die weiteren Zahlen ω sämtlich $= p$ (das Verfahren bricht dann niemals ab); dann gehören sämtliche c_{ν} ($\nu \geqq 1$) bereits dem Körper $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$ an, womit die Behauptung ebenfalls als richtig erkannt ist.

§ 3. Erweiterung auf Potenzreihen mit nicht negativen gebrochenen Exponenten.

Es sei die Gleichung $F(x, y) = 0$ des Satzes I durch eine Potenzreihe der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (k > 0, \text{ ganz}) \tag{8}$$

formal erfüllt. Die Vorbemerkung in § 2 bleibt wörtlich erhalten.

Setzen wir nun $x^{\frac{1}{k}} = t$, so wird die Gleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} t^{k\varrho}\, \Phi_\varrho(y) = 0$$

durch die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, t^\nu$, für y eingesetzt, formal erfüllt.

Hierauf läßt sich Satz I anwenden, und wir erhalten den

Satz II: Erfüllt eine Potenzreihe der Form (8), für y eingesetzt, formal die Gleichung $F(x, y) = 0$ des Satzes I, so gilt wörtlich die Behauptung des Satzes I. Die darin vorkommenden Zahlen m, q und w haben dieselbe Bedeutung wie dort.

Die Anmerkungen zu Satz I bleiben wörtlich bestehen.

§ 4. Potenzreihen mit nur positiven Exponenten.

Die Sätze I und II umfassen natürlich auch den Fall, daß die Potenzreihen (6) bzw. (8) mit einem positiven Exponenten von x beginnen, d.h. daß $c_0 = 0$ ist, ev. auch noch $c_1 = 0$, $c_2 = 0, \ldots$, bis zuerst $c_r \neq 0$ sei ($r > 0$). Die Potenzreihe (8) hat dann die Form

$$(9) \qquad x^{\frac{r}{k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu+r}\, x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (r \text{ und } k \text{ positive ganze Zahlen}, c_r \neq 0).$$

In diesem Fall ist $w = 1$ (da $c_0 = 0$ dem Körper $\mathfrak{A}$ angehört), und q läßt sich sofort aus dem Polynom

$$\Phi_0(y) = a_{00} + a_{01}\, y + \cdots + a_{0m}\, y^m,$$

wo jetzt $a_{00} = 0$ ist, ablesen; es bezeichne $a_{0\mu}$ die erste von Null verschiedene unter den Zahlen $a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{0m}$; dann ist $q = \mu$. Der Satz II liefert also für den Grad des Koeffizientenkörpers die Angabe: $\leqq \mu$.

In zweierlei Hinsicht lohnt es sich indes, diesen Spezialfall noch besonders zu untersuchen. Es liegt nahe, die Gleichung $F(x, y) = 0$ in diejenige umzuformen, welcher die Potenzreihe

$$(10) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu+r}\, x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (c_r \neq 0)$$

genügt, und erst hierauf den Satz II anzuwenden. In der Tat wird sich so eine im allgemeinen bessere Aussage über den Grad des Koeffizientenkörpers ergeben. Aber noch mehr: Die genannte Umformung führt auch dann für die Potenzreihe (9) die Anwendbarkeit des Satzes II herbei, wenn die ursprüngliche, durch (9) erfüllte Gleichung gar nicht von dem besonderen in den Sätzen I und II geforderten Typus ist, sondern nur überhaupt von der Form

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\varrho\sigma}\, x^{\varrho}\, y^{\sigma} = 0 \tag{11}$$

ohne jede Einschränkung, außer daß natürlich nicht alle $a_{\varrho\sigma} = 0$ sein sollen.

Wir setzen also voraus, daß die Potenzreihe (9), für y eingesetzt, die Gleichung (11) formal erfülle. Mittels $y = x^{\overset{r}{k}} z$ und $k\varrho + r\sigma = a$ geht (11) über in

$$\sum_{a=0}^{\infty} x^{\overset{a}{k}}\, \Psi_a(z) = 0, \tag{12}$$

wo $\Psi_a(z) = \Sigma a_{\varrho\sigma} z^{\sigma}$ ist, erstreckt über alle ϱ, σ mit $k\varrho + r\sigma = a$, $\varrho \geqq 0$, $\sigma \geqq 0$; es sind also die $\Psi_a(z)$ Polynome in z, worunter auch identisch verschwindende sein können.

Es bezeichne $\Psi_{a_0}(z)$ das erste nicht identisch verschwindende dieser Polynome. Die Zahl a_0 ist also durch die Eigenschaft definiert: Alle $a_{\varrho\sigma}$ mit $k\varrho + r\sigma < a_0$ sind $= 0$; es gibt $a_{\varrho\sigma}$ mit $k\varrho + r\sigma = a_0$, und diese sind nicht alle $= 0$.

Dann gibt es sicher mindestens zwei solche $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ mit $k\varrho + r\sigma = a_0$; d. h. $\Psi_{a_0}(z)$ ist ein mindestens zweigliedriges Polynom. Wäre nämlich $\Psi_{a_0}(z) = a z^{\gamma}$ $(a \neq 0, \gamma \geqq 0)$, so würde die linke Seite von (12) mit $x^{\overset{a_0}{k}} a z^{\gamma}$ beginnen, und dann könnte sich nach Einsetzung der Potenzreihe (10) für z das Glied $x^{\overset{a_0}{k}} a c_r^{\gamma}$ wegen $c_r \neq 0$ gegen kein anderes wegheben, während doch die Gleichung (12) erfüllt sein soll.

Diese Bemerkung gestattet eine Aussage über die Zahl a_0, welche sich am einfachsten geometrisch fassen läßt: Die Strecke $k\varrho + r\sigma = a_0$, $\varrho \geqq 0$, $\sigma \geqq 0$, der ϱ, σ-Ebene enthält mindestens zwei Gitterpunkte. Hieraus läßt sich schließen:

$a_0 \geqq v$, wo v das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von k und r bezeichnen soll.

Beweis: Es bezeichne d den größten gemeinschaftlichen Teiler von k und r. Bekanntlich ist dann $kr = vd$.

Die Strecke $k\varrho + r\sigma = v$ enthält die beiden Gitterpunkte $\left(0, \frac{k}{d}\right)$ und $\left(\frac{r}{d}, 0\right)$. Einander näher liegende Gitterpunkte als diese beiden kann es auf keiner Strecke $k\varrho + r\sigma = a$, $\varrho \geqq 0$, $\sigma \geqq 0$, geben, da sonst der Bruch aus den Zahlen $\frac{k}{d}$ und $\frac{r}{d}$ sich nochmals kürzen ließe, was nach Definition von d nicht der Fall ist. Keine Strecke mit $a < v$ kann also mehr als einen Gitterpunkt enthalten.

In (11) sind also notwendig alle $a_{\varrho\sigma}$ mit $k\varrho + r\sigma < v$ gleich Null. Die Potenzreihe (10) erfüllt also die Gleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^{\frac{\varrho}{k}} \Psi_{a_0+\varrho}(z) = 0,$$

auf welche nun der Satz I angewandt werden kann (mit $x^{\frac{1}{k}}$ statt x). An Stelle des dortigen c_0 und $\Phi_0(y)$ treten hier c_r und das Polynom $\Psi_{a_0}(z)$, aus dessen Beschaffenheit die Angaben über den Grad des Koeffizientenkörpers zu entnehmen sind.

Beschränken wir uns auf die Aussage, daß dieser Grad höchstens gleich dem Grad des Polynoms $\Psi_{a_0}(z)$ ist (das ist der größte Index σ, der bei den $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ mit $k\varrho + r\sigma = a_0$ vorkommt), so erhalten wir die Angabe $\leqq \frac{a_0}{r}$.

Wegen $c_r \neq 0$ ist jedoch die Anmerkung 3 des Satzes I anwendbar und liefert als Schranke die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Index σ, der bei den $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ mit $k\varrho + r\sigma = a_0$ auftritt.

Für den besonderen Fall, daß die Gleichung (11) von dem für die Sätze I und II erforderlichen Typus ist, stellt folgende Bemerkung die Verbindung mit dem am Anfang dieses Paragraphen Gesagten her:

Da jetzt nach Definition der Zahl a_0 alle $a_{0\sigma}$ mit $\sigma < \frac{a_0}{r}$ gleich Null sind, ist die am Anfang dieses Paragraphen eingeführte

Zahl μ sicher $\geqq \frac{a_0}{r}$. Damit ist gezeigt, daß die oben gewonnene Aussage $\leqq \frac{a_0}{r}$ im allgemeinen (d. h. abgesehen von dem möglichen Spezialfall $\mu = \frac{a_0}{r}$) schärfer ist als die am Anfang dieses Paragraphen gewonnene.

Wir fassen zusammen in

Satz III: Die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=r}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{k}} \quad (r \text{ und } k \text{ positive ganze Zahlen, } c_r \neq 0)$$

erfülle, für y eingesetzt, die Gleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^\varrho y^\sigma = 0 \quad (\text{nicht alle } a_{\varrho\sigma} \text{ seien} = 0).$$

Dann gehören sämtliche c_ν einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper über dem Körper $\mathfrak{A}$ der $a_{\varrho\sigma}$ an.

Es sei a_0 die kleinste ganze Zahl derart, daß das Polynom $\Psi_{a_0}(z) = \sum a_{\varrho\sigma} z^\sigma$, erstreckt über alle ϱ, σ mit $k\varrho + r\sigma = a_0$, $\varrho \geqq 0$, $\sigma \geqq 0$, nicht identisch verschwindet. Diese Zahl a_0 ist größer oder gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von r und k, und $\Psi_{a_0}(z)$ ist mindestens zweigliedrig.

Dann gelten über den Grad des genannten Erweiterungskörpers die Aussagen des Satzes I, angewandt auf das Polynom $\Psi_{a_0}(z)$ und die Größe c_r an Stelle des dortigen $\Phi_0(y)$ und c_0.

Insbesondere ist also der genannte Grad $\leqq \frac{a_0}{r}$.

Beispiel: Es seien nicht alle $a_{\varrho\sigma}$ mit $k\varrho + r\sigma < 2r$ gleich Null (dies ist z. B. der Fall, wenn $a_{01} \neq 0$ ist). Dann ist $a_0 < 2r$, also der Grad des Koeffizientenkörpers gleich 1; die sämtlichen c_ν gehören dem Körper $\mathfrak{A}$ selbst an.

§ 5. Potenzreihen, die mit einem negativen Exponenten beginnen.

Es liege nun der Fall vor, daß eine Potenzreihe der Form

$$(13)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=-s}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{k}} = x^{-\frac{s}{k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu-s} x^{\frac{\nu}{k}}, \\ (s \text{ und } k \text{ positive ganze Zahlen, } c_{-s} \neq 0) \end{cases}$$

für y eingesetzt, eine Gleichung der Form

$$(14)\qquad \sum_{\varrho=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho} y^{\sigma} = 0$$

formal erfüllt.

Hiemit ist gleichbedeutend, daß die Potenzreihe

$$(13a)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu-s} x^{\frac{\nu}{k}},$$

für z eingesetzt, die Gleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho-\frac{s}{k}\sigma} z^{\sigma} = 0$$

formal erfüllt. Damit Satz II anwendbar sei, muß vorausgesetzt werden, daß diese Gleichung vom Typus (5) des § 1 ist, also von der Form

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \left(\sum_{\varrho=g_\sigma}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho-\frac{s}{k}\sigma} \right) z^{\sigma} = 0 \quad \text{mit} \quad \lim_{\sigma\to\infty} \left(g_\sigma - \frac{s}{k}\sigma \right) = +\infty.$$

(Daß hier endlich viele Potenzen von x mit negativen Exponenten auftreten, macht nichts aus.)

Für die Gleichung (14) bedeutet dies, daß sie in der speziellen Form

$$(15)\qquad \begin{cases} \sum_{\sigma=0}^{\infty} A_\sigma(x)\, y^{\sigma} = 0 \\ \text{mit } A_\sigma(x) = \sum_{\varrho=g_\sigma}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho},^{7} \quad g_\sigma \geqq 0, \quad \lim_{\sigma\to\infty} \left(g_\sigma - \frac{s}{k}\sigma \right) = +\infty \\ (\text{nicht alle } g_\sigma \text{ seien} > 0 \text{ und nicht alle } a_{0\sigma} \text{ seien} = 0) \end{cases}$$

vorausgesetzt wird.

[7] Über g_σ vgl. Fußnote 6 S. 5.

Die Gesamtheit der Gleichungen (15) läßt sich noch in anderer Weise charakterisieren[8]. Es sei $R>0$ eine beliebig groß vorgeschriebene Zahl. Dann gibt es eine Zahl S derart, daß

$$g_\sigma \geqq \frac{s}{k}\sigma + R \qquad \text{für alle } \sigma > S.$$

Es gibt also in (15) keine $a_{\varrho\sigma}$ mit $\varrho < \frac{s}{k}\sigma + R$ und $\sigma > S$; oder: es treten nur $a_{\varrho\sigma}$ auf mit $\sigma \leqq \max\left(S, (\varrho - R)\frac{k}{s}\right)$.

Wird daher die linke Seite von (15) in der Form

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\varrho\sigma}\, y^\sigma$$

geschrieben, so ist die innere Summe ein Polynom in y (ev. identisch Null); jedenfalls also von der Form

$$\sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma}\, y^\sigma \quad [9] \quad \text{mit } n_\varrho \leqq (\varrho - R)\frac{k}{s} \quad \text{für } \varrho \geqq S\frac{s}{k} + R;$$

d. h., da R beliebig war:

$$\lim_{\varrho\to\infty}\left(n_\varrho - \frac{k}{s}\varrho\right) = -\infty.$$

Jede Gleichung (15) ist also von der Form

$$(16) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \left(\sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma}\, y^\sigma\right) = 0 \text{ mit } \lim_{\varrho\to\infty}\left(n_\varrho - \frac{k}{s}\varrho\right) = -\infty \ [9] \\ \qquad\qquad \text{(nicht alle } a_{0\sigma} \text{ seien} = 0). \end{cases}$$

Es ist leicht einzusehen, daß auch umgekehrt jede Gleichung (16) von der Form (15) ist: Es sei $T>0$ eine beliebig groß vorgeschriebene ganze Zahl; dann gibt es eine ganze Zahl R derart, daß

$$n_\varrho \leqq \frac{k}{s}\varrho - T \quad \text{für alle } \varrho > R.$$

Es gibt also in (16) keine $a_{\varrho\sigma}$ mit $\sigma > \frac{k}{s}\varrho - T$ und $\varrho > R$; oder: keine $a_{\varrho\sigma}$ mit $R < \varrho < \frac{s}{k}\sigma + \frac{s}{k}T$, wo schon $\sigma > \frac{k}{s}R - T$ sein

[8] Man veranschauliche sich die beiden folgenden Beweise an den Gitterpunkten einer ϱ,σ-Ebene.

[9] Über n_ϱ vgl. Fußnote 5 S. 4.

soll. Sei nun $S = \max n_\varrho$ mit $0 \leqq \varrho \leqq R$, dann gibt es für $\sigma > \max \left(S, \frac{k}{s} R - T\right)$ keine $a_{\varrho\sigma}$ mit $0 \leqq \varrho < \frac{s}{k}\sigma + \frac{s}{k} T$.

Wird also die linke Seite von (16) in der Form

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} y^\sigma \sum_{\varrho=g_\sigma}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^\varrho$$

geschrieben, so ist bei hinreichend hohem σ:

$$g_\sigma \geqq \frac{s}{k}\sigma + \frac{s}{k} T;$$

da T beliebig war, bedeutet dies: $\lim_{\sigma\to\infty} \left(g_\sigma - \frac{s}{k}\sigma\right) = +\infty$.

Die Gleichungstypen (15) und (16) sind also einander äquivalent; insbesondere sind auch die Spezialfälle einander äquivalent, daß in (15) von einem gewissen Index an alle $A_\sigma(x)$ identisch verschwinden, d. h. daß (15) eine Gleichung endlichen Grades in y ist, und daß in (16) die Zahlen n_ϱ beschränkt sind.

Es sei also jetzt vorausgesetzt, daß die Potenzreihe (13), für y eingesetzt, eine Gleichung vom Typus (16) formal erfülle.

Hiemit ist gleichbedeutend, daß die Potenzreihe (13a), für z eingesetzt, die Gleichung erfüllt:

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} x^{-\frac{s}{k}\sigma} z^\sigma = 0.$$

Mittels $k\varrho - s\sigma = \alpha$ nimmt diese Gleichung die Form an:

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} x^{k\alpha} \Psi_\alpha(z) = 0,$$

wo $\Psi_\alpha(z) = \Sigma a_{\varrho\sigma} z^\sigma$ ist, erstreckt über alle ϱ, σ mit $k\varrho - s\sigma = \alpha$, $\varrho \geqq 0$, $\sigma \geqq 0$. Auf Grund der Limesbedingung in (16) gibt es zu jedem α eine ganze Zahl R_α derart, daß $n_\varrho < \frac{k}{s}\varrho - \frac{\alpha}{s}$ für alle $\varrho > R_\alpha$; es gibt also in (16) keine $a_{\varrho\sigma}$ mit $\sigma \geqq \frac{k}{s}\varrho - \frac{\alpha}{s}$ und $\varrho > R_\alpha$;

oder: $k\varrho - s\sigma \leqq \alpha$ und $\varrho > R_\alpha$.

Für $0 \leqq \varrho \leqq R_\alpha$ gibt es in (16) nur endlich viele $a_{\varrho\sigma}$.

Es gibt also zu einem gegebenen a nur endlich viele $a_{\varrho\sigma}$ mit $k\varrho - s\sigma \leqq a$.

Daraus entnehmen wir erstens, daß die $\Psi_a(z)$ Polynome in z sind, und zweitens, daß nur endlich viele negative a in Betracht kommen. Die obige Gleichung hat daher die Form

$$\sum_{a=a_0}^{\infty} x^k \Psi_a(z) = 0. \tag{17}$$

Der Index a_0 ist also dadurch erklärt, daß in (16) alle $a_{\varrho\sigma}$ mit $k\varrho - s\sigma < a_0$ gleich Null sind, daß es dagegen gewisse $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ mit $k\varrho - s\sigma = a_0$ gibt. Da nicht alle $a_{0\sigma} = 0$ sein sollen, ist sicher $a_0 \leqq 0$. Es gibt dann notwendig mindestens zwei solche $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ mit $k\varrho - s\sigma = a_0$, was wie in § 4 (S. 13) daraus folgt, daß die Gleichung (17) durch die Potenzreihe (13a) mit $c_{-s} \neq 0$ erfüllt wird; d. h. das Polynom $\Psi_{a_0}(z)$ ist mindestens zweigliedrig.

Die Potenzreihe (13a) erfüllt also die Gleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^k \Psi_{a_0+\varrho}(z) = 0,$$

auf welche nun der Satz I angewandt werden kann (mit $x^{\frac{1}{h}}$ statt x).

An Stelle des dortigen c_0 und $\Phi_0(y)$ treten hier c_{-s} und das Polynom $\Psi_{a_0}(z)$, aus dessen Beschaffenheit die Angaben über den Grad des Koeffizientenkörpers zu entnehmen sind. Wegen $c_{-s} \neq 0$ ist die Anmerkung 3 des Satzes 1 anwendbar und liefert als Schranke die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Index σ, der bei den $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ mit $k\varrho - s\sigma = a_0$ auftritt. Dieser kleinste Index ist übrigens $\geqq \frac{-a_0}{s}$; denn mit dieser Ordinate schneidet die Gerade $k\varrho - s\sigma = a_0$ die σ-Achse.

In dem Spezialfall, daß in der Gleichung (16) die Zahlen n_ϱ beschränkt sind: alle $n_\varrho \leqq n$, oder, was dasselbe ist, daß (15) eine algebraische Gleichung n-ten Grades in y ist, liefert die eben gemachte Aussage sofort die Schranke $n - \frac{-a_0}{s}$, welche $\leqq n$ ist (wegen $a_0 \leqq 0$).

Nehmen wir in (16) ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_{0n_0} \neq 0$ an (damit ist also n_0 genau das m des Satzes I), so folgt zunächst: $n_0 < n$ [10] (denn wäre $n_0 = n$, so würde die Gerade $k\varrho - s\sigma = a_0$ nur den Gitterpunkt $(0, n_0)$ enthalten); ferner $n_0 \leqq \frac{-a_0}{s}$ (da der Gitterpunkt $(0, n_0)$ nicht oberhalb der genannten Geraden liegen kann); es ist also $n - \frac{-a_0}{s} \leqq n - n_0$; wir erhalten daher als weniger scharfe Schranke die Zahl $n - n_0$.

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen in

Satz IV: Die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=-s}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{k}} \quad (s \text{ und } k \text{ positive ganze Zahlen, } c_{-s} \neq 0)$$

erfülle, für y eingesetzt, eine Gleichung vom Typus (15) oder, was dasselbe ist, vom Typus (16).

Dann gehören sämtliche c_ν einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper über dem Körper $\mathfrak{R}$ der $a_{\varrho\sigma}$ an.

Es sei a_0 die kleinste ganze Zahl derart, daß $\Psi_{a_0}(z) = \Sigma a_{\varrho\sigma} z^\sigma$, erstreckt über alle ϱ, σ mit $k\varrho - s\sigma = a_0$, $\varrho \geqq 0$, $\sigma \geqq 0$, nicht identisch verschwindet; a_0 ist $\leqq 0$ und $\Psi_{a_0}(z)$ ist sicher ein Polynom, und zwar mindestens zweigliedrig.

Dann gelten über den Grad des genannten Erweiterungskörpers die Aussagen des Satzes I, angewandt auf das Polynom $\Psi_{a_0}(z)$ und die Größe c_{-s} an Stelle des dortigen $\Phi_0(y)$ und c_0. Im Fall, daß die zugrunde liegende Gleichung eine algebraische Gleichung vom Grad n in y ist, ist der Grad des Koeffizientenkörpers sicher $\leqq n - \frac{-a_0}{s}$ $(\leqq n)$.

[10] Das ist im Fall algebraischer Funktionen die bekannte Tatsache, daß an der Stelle $x = 0$ nur dann ein Pol vorhanden sein kann, wenn der Grad des Polynoms $f(0, y)$ kleiner ist als der Grad der definierenden Gleichung $f(x, y) = 0$.

Anhang zu § 5.

Im Fall einer algebraischen Gleichung n-ten Grades in y läßt sich eine notwendige Bedingung dafür ableiten, daß der Grad des Koeffizientenkörpers $= n$ sein kann.

Es muß dann $a_0 = 0$ sein, woraus $a_{00} \neq 0$ folgt; ferner muß die Gerade $k\varrho - s\sigma = 0$ die Horizontale $\sigma = n$ in einem zu einem $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ gehörigen Gitterpunkt treffen; andernfalls würde $\Psi_{a_0}(z)$ nicht vom Grad n werden.

Es müssen also

1. alle $a_{\varrho\sigma}$ mit $k\varrho - s\sigma < 0$ gleich Null sein.

(Dies bedeutet: $n_\varrho \leqq \varrho \frac{k}{s}$, was nur für $0 \leqq \varrho \leqq \frac{sn}{k}$ in Betracht kommt.)

2. $a_{00} \neq 0$.

3. $a_{\frac{sn}{k}, n} \neq 0$, wobei $\frac{sn}{k}$ ganz sein muß.

(Diese Bedingungen sind natürlich nicht hinreichend.)

§ 6. Ein Beweis lediglich für die Endlichkeit des Koeffizientenkörpers.

Wenn es sich nur um die Tatsache handeln soll, daß der Koeffizientenkörper ein endlicher algebraischer Körper über $\mathfrak{A}$ ist, ohne eine Aussage über seinen Grad, dann läßt sich dies auf andere Art wesentlich einfacher beweisen.

Es genügt natürlich, den Beweis für den Fall durchzuführen, daß eine Potenzreihe

$$Y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu,$$

für y eingesetzt, eine Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

vom Typus (4) oder (5) des § 1 formal erfüllt; denn hieraus folgt dann die Behauptung wie in § 3 für eine Potenzreihe mit nichtnegativen gebrochenen Exponenten und wie in § 5 bei einer Gleichung vom Typus (15) oder (16) für eine Potenzreihe mit endlich vielen negativen Exponenten.

Für den folgenden Beweis ist nun noch die Voraussetzung nötig, daß $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ für $y = Y$ nicht (identisch in x) gleich Null sei. Es läßt sich aber zeigen, daß man dies ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen darf.

$$\text{Abkürzung: } \frac{\partial^\varkappa F(x,y)}{\partial y^\varkappa} = F_\varkappa(x,y).$$

Es gibt ein $q > 0$ derart, daß $F_\varkappa(x, Y) = 0$ für $\varkappa = 0, 1, \ldots, q$, dagegen $\neq 0$ für $\varkappa = q+1$ ist. Wären nämlich sämtliche $F_\varkappa(x, Y) = 0$, so würde folgen:

$$F(x,y) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{1}{\varkappa!} F_\varkappa(x,Y)\,(y-Y)^\varkappa = 0;$$

d. h. $F(x,y)$ wäre identisch in x und y gleich Null, während nach Voraussetzung in $F(x,y)$ nicht alle $a_{\varrho\sigma} = 0$ sein sollen.

Wegen $F_{q+1}(x, Y) \neq 0$ ist $F_q(x,y)$ sicher nicht identisch in x und y gleich Null; die Koeffizienten von $F_q(x,y)$ gehören natürlich ebenfalls dem Körper $\mathfrak{A}$ an.

Wir benützen nun einfach an Stelle von $F(x,y) = 0$ die Gleichung $F_q(x,y) = 0$. Damit ist, unter Rückkehr zur ursprünglichen Bezeichnung, bewiesen, daß die Voraussetzung $F_1(x, Y) \neq 0$ zulässig ist.

Hilfssatz: $F(x,y) = 0$ wird dann und nur dann durch $Y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ formal erfüllt, wenn für jeden „Reihenanfang"

$$Y_\alpha = \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} c_\nu x^\nu \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

$F(x, Y_\alpha)$ den Faktor x^α hat (d. h. formal in eine Potenzreihe in x umgeordnet von der Form $\sum_{\lambda=\alpha}^{\infty} b_\lambda x^\lambda$ ist).

Beweis: 1. Es sei $F(x, Y) = 0$. Transformation auf die Variable z mittels $y = Y_\alpha + x^\alpha z$ ergibt, daß die Gleichung

$$F(x, Y_\alpha) + F_1(x, Y_\alpha)\, x^\alpha z + \frac{1}{2} F_2(x, Y_\alpha) x^{2\alpha} z^2 + \cdots = 0 \tag{18}$$

durch die Potenzreihe

$$Z_a = c_a + c_{a+1}\, x + \cdots,$$

für z eingesetzt, formal erfüllt wird. Es ist also

$$F(x, Y_a) = -x^a (F_1(x, Y_a)\, Z_a + \cdots);$$

$F(x, Y)$ hat daher den Faktor x^a.

2. Nun sei umgekehrt angenommen, daß für jedes $a \geqq 1$ $F(x, Y_a)$ den Faktor x^a habe. Dann folgt aus der Identität

$$F(x, Y) = F(x, Y_a) + F_1(x, Y_a)\, x^a Z_a + \frac{1}{2} F_2(x, Y_a)\, x^{2a} Z_a^2 + \cdots,$$

daß $F(x, Y)$ für jedes $a \geqq 1$ den Faktor x^a hat, mithin (identisch in x) gleich Null sein muß.

Nun soll zunächst gezeigt werden, daß jedes einzelne c_ν eine endliche algebraische Größe über $\mathfrak{A}$ ist.

Für c_0 ist dies aus $F(0, c_0) = 0$ oder $\Phi_0(c_0) = 0$ (vgl. § 1, Typus (4)) klar. Angenommen, es sei für $c_0, c_1, \cdots, c_{a-1}$ bewiesen. Wie oben erfüllt dann Z_a die Gleichung (18). In dieser sind nicht alle Koeffizienten der Potenzen von z identisch in x gleich Null; denn das würde heißen:

$$F(x, Y_a + x^a z) = 0 \quad \text{(identisch in } x \text{ und } z);$$

und hieraus würde folgen

$$F(x, y) = 0 \quad \text{(identisch in } x \text{ und } y),$$

was gegen die Voraussetzung ist.

Wird nun in der Gleichung (18) die höchstmögliche Potenz von x wegdividiert (ohne daß negative Exponenten von x hereinkommen) und sodann $x = 0$ gesetzt, so bleibt eine algebraische Gleichung für c_a mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0, \cdots, c_{a-1})$ übrig, woraus folgt, daß c_a eine endliche algebraische Größe über $\mathfrak{A}$ ist.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun leicht, den Beweis für die Endlichkeit des Koeffizientenkörpers zu führen.

Wegen $F_1(x, Y) \neq 0$ gibt es nach dem Hilfssatz mindestens ein $a \geqq 1$ derart, daß $F_1(x, Y_a)$ nicht den Faktor x^a hat. Es sei

$\omega \geqq 1$ das kleinste derartige a. Es ist also (mit den vorhin eingeführten Bezeichnungen Y_a und Z_a)

$$F_1(x, Y_\omega) = d_1 x^\beta + \cdots \quad (d_1 \neq 0,\ 0 \leqq \beta < \omega).$$

Mittels $y = Y_\omega + x^\omega z$ folgt, daß die Gleichung

$$F(x, Y_\omega) + F_1(x, Y_\omega)\, x^\omega z + \frac{1}{2} F_2(x, Y_\omega)\, x^{2\omega} z^2 + \cdots = 0$$

durch die Potenzreihe

$$Z_\omega = c_\omega + c_{\omega+1} x + \cdots,$$

für z eingesetzt, formal erfüllt wird. Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$x^{-(\beta+\omega)} F(x, Y_\omega) + x^{-\beta} F_1(x, Y_\omega) z + \frac{1}{2} F_2(x, Y_\omega) x^{\omega-\beta} z^2 + \cdots = 0,$$

so enthält die linke Seite keine negativen Exponenten von x; denn für

$$x^{-\beta} F_1(x, Y_\omega) = d_1 + \cdots$$

und das Darauffolgende ist dies klar; für das erste Glied folgt es aus der Identität

$$x^{-(\beta+\omega)} F(x, Y_\omega) = -x^{-\beta} F_1(x, Y_\omega)\, Z_\omega - \cdots,$$

deren rechte Seite keine negativen Exponenten von x enthält.

Die Potenzreihe Z_ω genügt also einer Gleichung der Form

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} B_\sigma(x)\, z^\sigma = 0 \quad \text{mit} \quad B_\sigma(x) = \sum_{\varrho=h_\sigma}^{\infty} b_{\varrho\sigma} x^\varrho \quad (h_\sigma \geqq 0),$$

die genau vom Typus (5) des § 1 ist; denn aus

$$B_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma!} F_\sigma(x, Y_\omega)\, x^{(\sigma-1)\omega-\beta}$$

ist zu sehen, daß die Anfangsexponenten h_σ der $B_\sigma(x)$ gegen $+\infty$ wachsen. Die Koeffizienten $b_{\varrho\sigma}$ gehören dem Körper $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0, \ldots, c_{\omega-1}) = \mathfrak{B}$ an; dieser Körper $\mathfrak{B}$ ist nach dem vorhin Bewiesenen ein endlicher algebraischer Körper über $\mathfrak{A}$.

Diese Gleichung in z läßt sich auch in der Form des Typus (4) schreiben:

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \Psi_\varrho(z) = 0,$$

und zwar ist $\Psi_0(z) = d_0 + d_1 z \quad (d_1 \neq 0)$.

$x = 0$ liefert $\Psi_0(c_\omega) = 0$; c_ω gehört also dem Körper $\mathfrak{B}$ an; wegen

$$\Psi_0'(c_\omega) = d_1 \neq 0$$

folgt genau wie am Anfang des Beweises von Satz I (S. 8), daß alle c_ν $(\nu > \omega)$ ebenfalls dem Körper $\mathfrak{B}$ angehören.

Der Kern dieses Beweises ist also die Transformation in einen analogen Sachverhalt, bei welchem das dem Polynom $\Phi_0(y)$ entsprechende neue Polynom $\Psi_0(z)$ linear ausfällt.

Es ist klar, daß dieser Beweis, im Gegensatz zu dem Beweis des Satzes I, keinen Aufschluß über den Grad des Körpers $\mathfrak{B}$ geben kann.