

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen  
Abteilung

der

**Bayerischen Akademie der Wissenschaften**

zu München

---

1928. Heft III

November-Dezembersitzung

---

München 1928

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



## Untersuchung ebener Spannungszustände mit Hilfe der Doppelbrechung.

Von Ludwig Föppl, München.

Mit 8 Textfiguren.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 10. November 1928.

### Einleitung.

Bekanntlich lassen sich ebene Spannungszustände in Konstruktionsteilen mittels Modellkörpern aus durchsichtigen Materialien, wie Glas, die entsprechend belastet sind, untersuchen, indem man dabei die experimentelle Tatsache verwendet, daß ein senkrecht zur Ebene des Modellkörpers durchfallender, vorher eben polarisierter Lichtstrahl in zwei Komponenten zerlegt wird, die in den Richtungen der jeweiligen Hauptspannungen schwingen und infolge ihrer verschiedenen, den Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  proportionalen Durchtrittsgeschwindigkeiten beim Austritt aus dem Modellkörper eine gewisse Phasenverschiebung aufweisen. Diese Phasenverschiebung  $\gamma$  ergibt sich für die meisten Materialien zu

$$(1) \quad \gamma = C \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot d,$$

worin  $C$  eine Materialkonstante und  $d$  die Scheibendicke bedeutet. Mit Hilfe eines Kompensators, durch den man den Lichtstrahl hindurchgehen läßt, kann man den Gangunterschied  $\gamma$  für jede Stelle des ebenen Spannungszustandes messen und, da auch die Materialkonstante  $C$  leicht festzustellen ist, erhält man nach Gleichung (1) für das ganze Feld die Differenz der Hauptspannungen. Diese wiederum hängt bekanntlich<sup>1)</sup> mit der dort herrschenden maximalen Schubspannung  $\tau_{\max}$  durch die Beziehung zusammen:

<sup>1)</sup> S. z. B. A. Föppl, „Vorlesungen über Technische Mechanik“, Bd. III.

$$(2) \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

sodaß damit an jeder Stelle des Feldes die maximale Schubspannung  $\tau_{\max}$  bekannt ist.

Für manche Untersuchungen genügt diese Feststellung; z. B. dann, wenn man für die Anstrengung eines Körpers die Mohr'sche Hypothese zu Grunde legt, nach der gerade  $\tau_{\max}$  ein Maß für die Bruchgefahr an jeder Stelle gibt. Abgesehen davon, daß diese Annahme nach neueren Versuchen nicht mehr stichhaltig ist, ist die Kenntnis des vollständigen Spannungszustandes erwünscht, um sich ein Bild des „Kraftflusses“ machen zu können, der sich im Innern beanspruchter Körper ausbildet.

Würde man außer der Differenz der beiden Hauptspannungen auch ihre Summe  $\sigma_1 + \sigma_2$  angeben können, so wären  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  einzeln bekannt, wenn auch noch nicht ihre Richtung an jeder Stelle. Dieses Verfahren haben Mesnager<sup>1)</sup> und Coker<sup>2)</sup> eingeschlagen, indem sie die Dickenänderung  $\Delta d$ , die die Scheibe infolge der Belastung in ihrer Ebene erfährt, gemessen haben. Sie beträgt

$$(3) \quad \Delta d = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{mE} d$$

Da die Poisson'sche Konstante  $\frac{1}{m}$  und der Elastizitätsmodul  $E$  bekannt sind, ergibt die Messung der Dickenänderung  $\Delta d$  an jeder Stelle die Summe  $\sigma_1 + \sigma_2$  der beiden Hauptspannungen. Der Nachteil dieses Verfahrens ist eine zu geringe Genauigkeit, die darin begründet ist, daß die Dickenänderung  $\Delta d$  außerordentlich gering ist. Die Größenordnung von  $\frac{\Delta d}{d}$  beträgt nur  $\frac{1}{10000}$ .

Die Richtung der beiden Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  läßt sich verhältnismäßig leicht angeben, da das orthogonale Netz der Hauptspannungstrajektorien, das in jedem Punkt des ebenen

1) Mesnager, „Etude des efforts intérieurs dans les solides“, Annales des Ponts et Chaussées, 1913, p. 154.

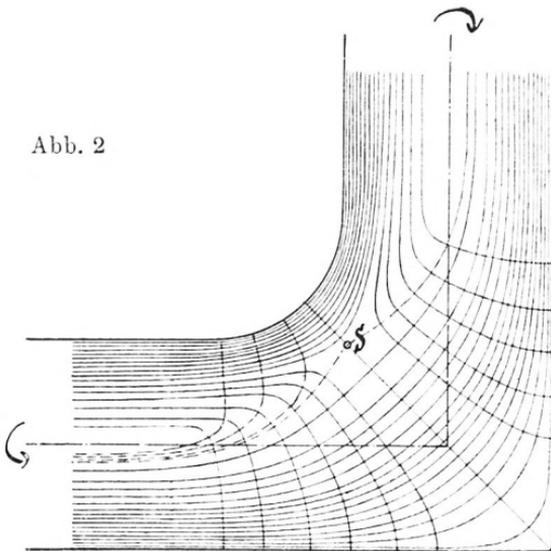
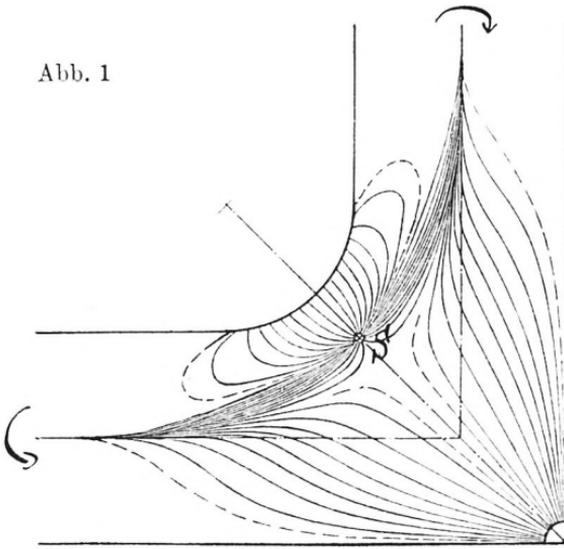
2) Von Coker sind zahlreiche Arbeiten über die photoelastische Methode erschienen; s. zusammenfassenden Bericht von Wächtler, „Über die Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zum Studium der Spannungsverteilung in beanspruchten Körpern“, Physikalische Zeitschrift, 1928.

Spannungszustandes die Richtung der Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bestimmt, mit Hilfe der optischen Methode einfach gewonnen wird. Es geschieht dies in folgender Weise: Man läßt den Lichtstrahl vor dem Modellkörper durch ein Nikol'sches Prisma (Polarisator) gehen, sodaß er in einer bestimmten Ebene polarisiert wird. Nach dem Durchgang durch den Versuchskörper geht er durch ein zweites Nikol'sches Prisma (Analysator), das gegen das erste um  $90^\circ$  gedreht ist. Diejenigen Stellen des Versuchskörpers, bei denen die beiden Hauptspannungen parallel zu den Polarisations Ebenen der beiden Nikol'schen Prismen verlaufen, werden auf dem hinter dem zweiten Prisma aufgestellten Beobachtungsschirm dunkel erscheinen. Ihr geometrischer Ort ergibt eine Linie, die man als Isokline bezeichnet, da die Spannungstrajektorien diese Linie unter der gleichen, der jeweiligen Schwingungsrichtung von Polarisator und Analysator parallelen Richtung schneiden. Durch Drehen des Versuchskörpers erhält man andere Isoklinien, die man in die Figur einzeichnet. Indem man den Versuchskörper jedesmal um denselben Winkel dreht, erhält man das Isoklinenfeld, das man der Spannungsuntersuchung zu Grunde legt. Abb. 1 zeigt das System der Isoklinien, das in einem rechteckigen Doppelschenkel auftritt, der an beiden Schenkeln gleich großen entgegengesetzt gerichteten Biegemomenten, die in der Ebene des Schenkels wirken, unterworfen ist. Die innere Kontur des Schenkels besteht aus zwei Geraden, die aufeinander senkrecht stehen und in einen Viertelkreis vom Radius  $r$  einmünden. Aufeinanderfolgende Isoklinien entsprechen jeweils einer Drehung des Versuchskörpers um  $5^\circ$ <sup>1)</sup>. Es sei hier besonders auf den singulären Punkt  $S$  hingewiesen, durch den eine ganze Schar von Isoklinien läuft. Es sind demnach in diesem Punkte alle Richtungen für die Hauptspannung möglich.

Aus dem Isoklinenfeld kann man die Spannungstrajektorien, die wir auch Hauptnormalspannungslinien nennen wollen, finden.

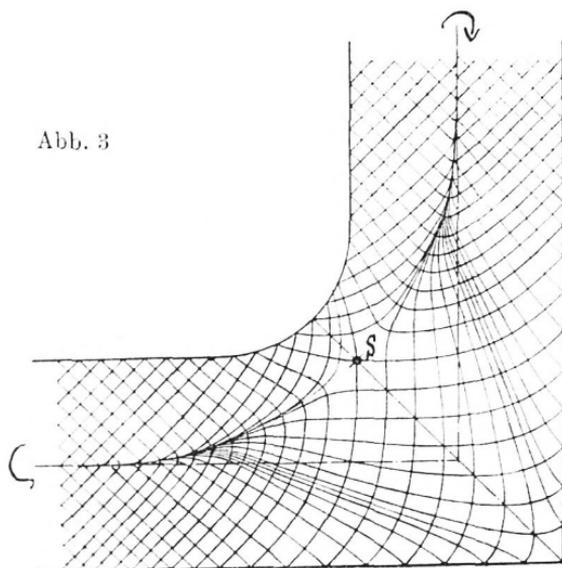
<sup>1)</sup> Die Aufnahmen stammen von meinem Doktoranden, Herrn Dipl.-Ing. Cardinal von Widdern, der sie mit Hilfe eines nach neuen Gesichtspunkten konstruierten optischen Apparates für Spannungsmessungen, der vor einiger Zeit im Mechanisch-Technischen Laboratorium der Technischen Hochschule München aufgestellt worden ist, gewonnen hat. Herr von Widdern wird in seiner Dissertation über den Apparat und die Messungen, die er daran angestellt hat, demnächst berichten.

Es entspricht diese Überlegung einer graphischen Integration, die sich mit großer Genauigkeit durchführen läßt. Das Resultat dieser



Integration für das spezielle Beispiel zeigt Abb. 2. Der Abstand der Trajektorien jeder Schar ist so gewählt, daß der Kraftfluß in den geraden Schenkeln zwischen zwei aufeinanderfolgenden Trajektorien der gleiche ist.

Überall unter  $45^\circ$  gegen die Spannungstrajektorien verlaufen die Hauptschubspannungslinien, die an jeder Stelle die aufeinander senkrecht stehenden Richtungen der maximalen Schubspannungen angeben. Dieses orthogonale Netz von Linien kann ebenso wie die Hauptnormalspannungslinien aus dem Isoklinenfeld direkt gewonnen werden. Es ist für unser spezielles Beispiel in Abb. 3 wiedergegeben.



Das Feld der Hauptnormalspannungslinien, oder, was auf dasselbe hinausläuft, das Feld der Hauptschubspannungslinien bestimmt die Spannungsverteilung bis auf einen Proportionalitätsfaktor vollständig. Es sind Verfahren ausgearbeitet worden, mit Hilfe der Spannungstrajektorien und der Kenntnis der Hauptschubspannung  $\tau_{\max}$ , die, wie wir oben gesehen haben, verhältnismäßig leicht an jeder Stelle gemessen werden kann, das ganze Spannungsbild zu bestimmen, ohne daß dazu die schwierige und ungenaue Messung der Dickenänderung erforderlich wäre.

Dieses Verfahren, dessen Anfänge schon auf Maxwell<sup>1)</sup> zurückgehen, soll hier auf neuem Wege abgeleitet und zugleich auf den Fall erweitert werden, daß nicht die Hauptnormalspannungslinien, sondern die Hauptschubspannungslinien der Berechnung zu

<sup>1)</sup> Maxwell, „Scientific Papers“.

Grunde gelegt werden. Je nach dem besonderen Beispiel wird sich der eine oder andere Weg besser eignen.

Schließlich wird der Spannungszustand in der Nähe der singulären Linie, die durch die Bedingung  $\sigma_1 = \sigma_2$  oder  $\tau_{\max} = 0$  charakterisiert ist, nach den Methoden der Elastizitätstheorie untersucht. Diese Untersuchung gibt wertvolle Anhaltspunkte für die Messungen, die gerade in der Nähe einer solchen singulären Linie wegen des geringen optischen Effektes unsicher sind.

### § 1. Der ebene Spannungszustand, bezogen auf das Netz der Hauptnormalspannungslinien.

Wir denken uns in die Ebene des Spannungszustandes ein rechtwinkeliges Koordinatensystem  $y, z$  gelegt (s. Abb. 4) und betrachten einen bestimmten Punkt der Ebene, der durch den Schnitt der beiden Hauptnormalspannungslinien 1

und 2 bestimmt ist. Die Neigungswinkel, die die Tangenten an die beiden Spannungstrajektorien in diesem Punkte mit der  $y$ -

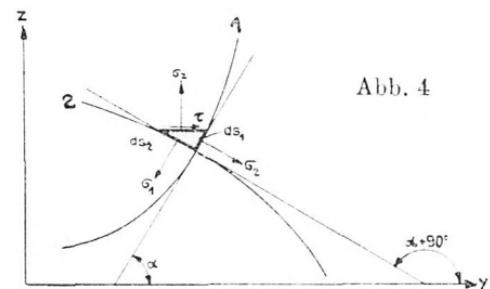


Abb. 4

Achse einschliessen, sind mit  $\alpha$  bzw.  $\alpha + 90^\circ$  bezeichnet. Für das kleine, in Abb. 4 durch Schraffur hervorgehobene Element der Ebene des Spannungszustandes liest man die folgenden Gleichgewichtsbedingungen ab:

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma_x = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \\ \tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

oder nach Einführung des doppelten Winkels  $2\alpha$

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases} \text{ und dementsprechend } \begin{cases} \sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Die halbe Summe der beiden Hauptspannungen stellt als Invariante eine reine Ortsfunktion dar, die mit  $p(y, z)$  bezeichnet werden soll:

$$(6) \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = p(y, z)$$

Auch die halbe Differenz der beiden Hauptspannungen ist eine Ortsfunktion und zwar gibt sie nach Gleichung (2) die maximale Schubspannung an jeder Stelle. Wir werden dafür die Bezeichnung  $q(y, z)$  wählen:

$$(7) \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{\max} = q(y, z)$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir die Gleichung (5) umschreiben in:

$$(8) \quad \begin{cases} \sigma_y = p + q \cdot \cos 2\alpha \\ \sigma_z = p - q \cdot \cos 2\alpha \\ \tau = q \cdot \sin 2\alpha \end{cases}$$

Zwischen den Spannungen  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  und  $\tau$  bestehen die bekannten Gleichgewichtsbedingungen für den ebenen Spannungszustand:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke gemäß Gleichungen (8) folgt daraus:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} - 2q \sin 2\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} + 2q \cos 2\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial y} \cos 2\alpha + \frac{\partial q}{\partial z} \sin 2\alpha &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} + 2q \sin 2\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z} + 2q \cos 2\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} \cos 2\alpha + \frac{\partial q}{\partial y} \sin 2\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Will man diese Gleichungen auf das orthogonale Netz der Spannungstrajektorien beziehen, deren Längenelemente wir mit  $ds_1$  bzw.  $ds_2$  bezeichnen wollen (s. Abb. 4), so muß man in den letzten Gleichungen  $ds_1$  statt  $dy$  und  $ds_2$  statt  $dz$  sowie  $\alpha = 0$  setzen und erhält damit:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial(p+q)}{\partial s_1} + 2q \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} = 0 \\ \frac{\partial(p-q)}{\partial s_2} + 2q \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = 0 \end{cases}$$

Darin bedeuten  $\frac{\partial \alpha}{\partial s_1}$  und  $\frac{\partial \alpha}{\partial s_2}$  die Krümmungen der beiden Spannungstrajektorien an der betreffenden Stelle, wofür wir unter Einführung der Krümmungsradien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  setzen können:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = \frac{1}{\varrho_1}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

Beachtet man die Bedeutung von  $p$  und  $q$  gemäß Gleichung (6) und (7), so kann man an Stelle der Gleichung (11) schreiben:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varrho_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varrho_1} \end{cases}$$

Diese Gleichungen, die schon von Maxwell und anderen auf anderen Wegen abgeleitet worden sind, können dazu dienen, mit Hilfe des auf Grund des optischen Verfahrens gefundenen Netzes der Spannungstrajektorien die Verteilung der Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  zu finden.

Bevor wir diese Methode angeben, seien noch einige allgemeine Erörterungen an die Gleichungen (12) angeschlossen. Zunächst sieht man, daß sich die Gleichungen (12) nicht ändern, wenn man alle Spannungen im selben Verhältnis verkleinert oder vergrößert; d. h. das Netz der Spannungstrajektorien ist von der Größe der Spannungen und damit der Beanspruchung nicht abhängig, sondern hängt nur von der Art der Beanspruchung ab. Infolgedessen kann man aus dem gegebenen Netz der Spannungstrajektorien allein den Spannungszustand nur bis auf einen Proportionalitätsfaktor, der anderweitig bestimmt werden muß, angeben. — Ferner beachte man, daß die Gleichungen (12) aus reinen Gleichgewichtsbedingungen ohne Eingehen auf die Formänderung gewonnen worden sind und doch die Spannungsverteilung bis auf jenen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmen. Wenn wir die Belastung soweit steigern, daß in gewissen Gebieten des Probekörpers Fließen ein-

tritt, in denen dann nicht mehr das Hooke'sche Gesetz zwischen Spannungen und Dehnungen besteht, so behalten trotzdem die Gleichungen (12) auch in diesen Gebieten ihre Gültigkeit. Da aber in den Fließgebieten sicher eine andere Spannungsverteilung herrscht als vor Eintreten des Fließens, so kann sich der Übergang von der rein elastischen Beanspruchung zur plastischen nur durch Änderungen der Krümmungsradien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  der Spannungslinien, d. h. durch Umlagerung der Spannungslinien und damit auch der durch direkte Beobachtung gewonnenen Isoklinen bemerkbar machen. Es scheint mir dies ein möglicher Weg, auch die plastischen ebenen Spannungs- und Formänderungszustände mit Hilfe des optischen Verfahrens in Angriff zu nehmen, was meines Wissens bisher noch nicht geschehen ist. Freilich wird man für diese Untersuchungen keine Glaskörper benützen können, da Glas zu spröde ist, um es im kalten Zustande plastisch deformieren zu können.

Wir kehren zu den Gleichungen (12) zurück. Zunächst lassen sich diese Gleichungen für den Rand integrieren; z. B. fällt für den durch äußere Kräfte nicht beanspruchten Rand unseres Winkels (s. Abb. 2) die eine Spannungstrajektorie mit dem Rande zusammen. Da  $\sigma_1 - \sigma_2$  an jeder Stelle auf optischem Wege leicht gefunden werden kann, so erfordert die Integration der Gleichung nur noch die Größe des Krümmungsradius  $\varrho_2$  der auf dem Rande senkrecht stehenden Trajektorien längs des Randes. Um diesen Krümmungsradius mit genügender Genauigkeit zu erhalten, benützt man neben dem Feld der Hauptnormalspannungslinien (s. Abb. 2) das der Isoklinen (s. Abb. 1). Zweckmäßig werden beide auf durchsichtiges Papier gezeichnet, damit man sie übereinander gelegt gleichzeitig ablesen kann. Gehen wir von einem Randpunkt aus, in dem sowohl eine Spannungstrajektorie senkrecht zum Rande als auch eine Isokline, im allgemeinen unter beliebigem Winkel, ausläuft, so kann man den Krümmungsradius  $\varrho_2$  der Spannungstrajektorie aus dem Verhältnis  $\frac{\Delta s_2}{\Delta \varphi}$  erhalten, wenn mit  $\Delta s_2$  der längs der Spannungstrajektorie gemessene Abstand des Schnittpunktes mit der nächstfolgenden Isokline unseres Isoklinennetzes bezeichnet wird und  $\Delta \varphi$  den Winkelsprung bedeutet, mit dem die aufeinanderfolgenden Isoklinen des Netzes (bei uns ist  $\Delta \varphi = 5^\circ$  bzw.  $2,5^\circ$ ) gezeichnet worden sind.

Wie man ohne weiteres sieht, kann man dasselbe Verfahren auch für eine Spannungslinie im Innern anwenden, so daß man auf diese Weise längs einer Spannungstrajektorie fortschreitend die Spannungsänderung bestimmen kann. Aus Gleichungen (12) folgt, daß beim Fortschreiten längs der einen Spannungstrajektorie I um  $\Delta s_1$  der Spannungssprung von  $\sigma_1$  sich berechnet zu

$$(13) \quad \Delta \sigma_1 = -(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \frac{\Delta s_1}{\varrho_2} = -(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} \cdot \Delta \varphi,$$

worin  $\Delta s_2$  den auf der zweiten Trajektorie gemessenen Weg bis zur nächsten Isokline bedeutet, die dem Winkelsprung  $\Delta \varphi$  entspricht. Führt man den Winkel  $\psi$  ein, den die erste Trajektorie mit der Isokline an der betreffenden Stelle bildet (s. Abb. 5), so kann man setzen

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = -\cot \psi$$

wie aus Abb. 5 hervorgeht.

Damit schreibt sich Gleichung (13) folgendermaßen:

$$(14) \quad \Delta \sigma_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) \cot \psi \cdot \Delta \varphi$$

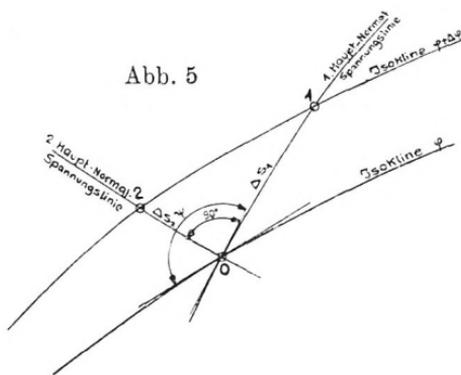


Abb. 5

Auf diese Weise läßt sich das rechtwinkelige Netz der Spannungstrajektorien schrittweise berechnen, wobei sich immer wieder Kontrollen bieten.

Freilich versagt dieses Rechenverfahren an einzelnen Stellen; es wird immer dann ungenau, wenn  $\psi$  sehr klein bzw. nahezu  $180^\circ$

ist. Deshalb ist es zweckmäßig, daß man mit Hilfe des Netzes der Hauptschubspannungslinien eine zweite Möglichkeit besitzt, den ebenen Spannungszustand zu berechnen. Dieses neue Verfahren wird im nächsten § besprochen.

Besondere Schwierigkeiten bereiten den Messungen ferner die Stellen, in denen die beiden Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  einander gleich sind. Diese Stellen, an denen keine Schubspannung herrscht, sodaß auch  $\tau_{\max} = 0$  ist, werden singuläre Stellen genannt.

Tritt dieser besondere Spannungszustand längs einer Linie auf, so wird diese als singuläre Linie bezeichnet. Die singuläre Linie entspricht bei der gewöhnlichen Balkenbiegung der neutralen Faser und stellt eine deutliche Unterteilung des ebenen Spannungszustandes dar. In § 3 wird der Spannungszustand in der Umgebung einer solchen singulären Linie auf Grund der strengen Elastizitätstheorie abgeleitet. Die dort gewonnenen Resultate lassen sich zur Ergänzung und Kontrolle der Messungen gut verwerten.

**§ 2. Der ebene Spannungszustand bezogen auf das Netz der Hauptschubspannungslinien.**

Das orthogonale Netz der Hauptschubspannungslinien, das uns in jedem Punkt des ebenen Spannungszustandes die beiden Richtungen der maximalen Schubspannungen  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$  an-  
gibt, ist bekanntlich überall unter  $45^\circ$  gegen die Normalspannungstrajektorien gerichtet. Wir können deshalb die Entwicklungen des vorigen § übernehmen, wenn wir in den Gleichungen (10) den Neigungswinkel  $\beta$  der einen Hauptschubspannungslinie gegen die  $y$ -Achse einführen, der mit dem Winkel  $\alpha$  durch die Beziehung

$$(15) \quad \beta = \alpha + 45^\circ$$

verknüpft ist. Damit gehen die Gleichungen (10) über in

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y} + 2q \cos 2\beta \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y} + 2q \sin 2\beta \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z} + \sin 2\beta \cdot \frac{\partial q}{\partial y} - \cos 2\beta \cdot \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} - 2q \cos 2\beta \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z} + 2q \sin 2\beta \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y} - \sin 2\beta \cdot \frac{\partial q}{\partial z} - \cos 2\beta \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Um diese Gleichungen auf das Netz der Hauptschubspannungslinien zu beziehen, für die wir die Längenelemente mit  $dt_1$  bzw.  $dt_2$  bezeichnen wollen, setzen wir in den letzten Gleichungen  $dt_1$  statt  $dy$ ;  $dt_2$  statt  $dz$  und  $\beta = 0$  ein und erhalten damit:

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t_1} + 2q \frac{\partial \beta}{\partial t_1} - \frac{\partial q}{\partial t_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t_2} - 2q \frac{\partial \beta}{\partial t_2} - \frac{\partial q}{\partial t_1} = 0. \end{cases}$$



von den auf der rechten Seite von Gleichung (20) stehenden Größen ab, die von vorneherein bekannt sind, bzw. wie der Winkel  $\chi$  aus der Zeichnung entnommen werden können. Dabei bedeutet  $(\Delta q)_2$  den Sprung, den  $q$  beim Übergang von der Stelle 0 zur Stelle 2 längs der zweiten Hauptspannungslinie erleidet (s. Abb. 6). Bestimmt man auf diese Weise für die verschiedenen Punkte der Ebene die Werte von  $p$ , so folgen daraus sofort die Werte der Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , da ja  $q$  überall durch Messung gegeben ist.

Dieselbe Kritik, die wir im vorigen § an Gleichung (14) geübt haben, gilt auch für unsere Gleichung (20). Der Winkel  $\chi$  darf nicht zu nahe an  $0^\circ$  bzw.  $180^\circ$  liegen, damit die Rechnungen brauchbar bleiben. Man sieht daraus, daß wegen der Beziehung (19), die zwischen den Winkeln  $\psi$  und  $\chi$  besteht, in den Gebieten, wo Gleichung (14) versagt, gerade Gleichung (20) gut brauchbar ist und umgekehrt, sodaß es in gewissen Gebieten zweckmäßig ist, statt des Netzes der Hauptnormalspannungslinien das der Hauptschubspannungslinien und damit Gleichung (20) für die Berechnung zu Grunde zu legen.

### § 3. Der ebene Spannungszustand in der Nachbarschaft einer singulären Linie.

Bei dem auf reine Biegung beanspruchten Winkel tritt eine singuläre Linie auf, deren Punkte der Bedingung unterworfen sind, daß die beiden Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  einander gleich sind. Aus dem Mohr'schen Spannungskreis folgt daraus, daß dann die Spannungen in jedem Schnitt durch diese Punkte den gleichen Wert haben und daß in keinem dieser Schnitte Schubspannungen auftreten können. In den verlängerten Schenkeln unseres Winkels fällt die singuläre Linie mit der Mittellinie zusammen, während sie in dem gebogenen Teile deutlich nur an der singulären Stelle  $S$  gefunden werden konnte. Wie man auf optischem Wege mit Hilfe von zirkularpolarisiertem Lichte die singulären Stellen und Linien auf sehr einfachem Wege von vorneherein finden kann, soll hier nicht näher erörtert werden.

Um den Spannungszustand in der unmittelbaren Umgebung der singulären Linie aus der Elastizitätstheorie abzuleiten, denken wir uns in einem Punkte 0 der singulären Linie, dessen Umge-

bung wir untersuchen wollen, in Richtung der Tangente und Normalen zur singulären Linie ein rechtwinkeliges Achsenkreuz  $y, z$  gelegt (s. Abb. 7). Wir denken uns die Umgebung des Punktes 0 so stark vergrößert,

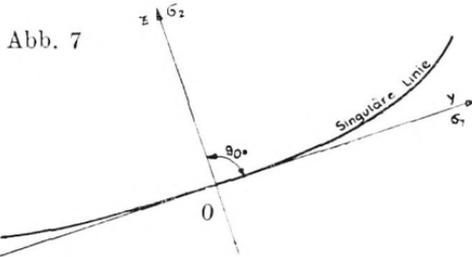


Abb. 7

daß die singuläre Linie ein Stück weit genau genug mit der  $y$ -Achse zusammenfällt. Bei dieser ersten Annäherung wird demnach die Krümmung der singulären Linie vernachlässigt.

Mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion  $F(y, z)$  lassen sich bekanntlich die Spannungskomponenten ausdrücken durch

$$(21) \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}; \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}.$$

Dabei muß  $F$  eine biharmonische Funktion sein, d. h. der Differentialgleichung

$$(22) \quad \Delta \Delta F = 0$$

genügen. Wir wollen diese Darstellung des Spannungszustandes für die Umgebung des Punktes 0 wählen.

Aus dem Mohr'schen Spannungskreis leitet man die Beziehung für den Winkel  $\delta$  ab, den eine Normalspannungstrajektorie an irgend einer Stelle mit der positiven  $y$ -Achse einschließt:

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2\tau}{\sigma_z - \sigma_y}$$

oder wegen Gleichung (21)

$$(23) \quad \operatorname{tg} 2\delta = \frac{2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}}{\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}.$$

Die Bedingungen längs der singulären  $y$ -Achse lassen sich folgendermaßen durch die Spannungsfunktion ausdrücken:

$$(24a) \quad \left( \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)_{z=0} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_{z=0}$$

und

$$(24b) \quad \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right)_{z=0} = 0$$

Wegen dieser beiden Beziehungen nimmt  $\operatorname{tg} 2\delta$  nach Gleichung (23) den unbestimmten Wert  $\frac{0}{0}$  längs der singulären Linie an. Wir werden für diesen Quotienten aus unseren Entwicklungen einen ganz bestimmten Wert erhalten.

Setzen wir die Singularitätsbedingung (24a) in die Differentialgleichung (22) ein, so zerfällt sie für alle Punkte der  $y$ -Achse in die folgenden drei Gleichungen:

$$(25a) \quad \left( \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right)_{z=0} = 0,$$

$$(25b) \quad \left( \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} \right)_{z=0} = 0,$$

$$(25c) \quad \left( \frac{\partial^4 F}{\partial y^2 \partial z^2} \right)_{z=0} = 0.$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die Funktion  $F(y, z)$ , die den Bedingungen (24) und (25) längs der  $y$ -Achse genügt und außerdem eine Lösung der Differentialgleichung (22) ist, zu bestimmen.

Wegen Gleichung (25a) machen wir den Ansatz:

$$(26) \quad F = a(z) \cdot y^3 + \beta(z) \cdot y^2 + \gamma(z) \cdot y + \delta(z).$$

Da wir uns die Aufgabe stellen wollen, den Spannungszustand in der Umgebung der singulären Linie nur in erster Annäherung anzugeben, so genügt es, die Spannungen als lineare Funktionen von  $z$  und  $y$  zu erhalten. Infolgedessen braucht man in dem Ansatz für  $F$  nur Glieder bis zur dritten Potenz in  $y$  und  $z$  zu berücksichtigen. Dementsprechend setzen wir

$$(27) \quad \begin{aligned} a &= a_1 \\ \beta &= b_1 + c_1 z \\ \gamma &= d_1 + e_1 z + f_1 z^2 \\ \delta &= g_1 + h_1 z + k_1 z^2 + l_1 z^3 \end{aligned}$$

mit konstanten Werten  $a_1$  bis  $l_1$ .

Zunächst ist durch den für  $F$  gewählten Ansatz erreicht, daß die Differentialgleichung (22) überall befriedigt ist. Aus den

Grenzbedingungen (24) und (25) längs der singulären Linie  $y = 0$  folgt für die Beiwerte  $a_1$  bis  $l_1$ :

$$(28) \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ e_1 = 0 \\ k_1 = b_1 \\ f_1 = 3a_1. \end{cases}$$

Läßt man schließlich noch die in  $y$  und  $z$  linearen Glieder von  $F$  weg, da sie für die Spannungen unwesentlich sind, so ergibt sich für die Spannungsfunktion in der Umgebung der singulären Linie in erster Annäherung

$$(29) \quad F = ay^3 + bz^3 + 3ayz^2 + c(y^2 + z^2).$$

Daraus folgen die Spannungen:

$$(30) \quad \begin{aligned} \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 6bz + 6ay + 2c \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6ay + 2c \\ \tau &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = -6az. \end{aligned}$$

Die Bedeutung der drei Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $c$  ergibt sich aus folgenden Überlegungen. Zunächst ist offenbar  $2c$  die Größe der Hauptspannungen im Nullpunkt  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Ferner folgt aus den letzten Gleichungen:

$$(31) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} \right) = 6a \\ \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial z} \right) = 6b; \quad \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) = 0. \end{cases}$$

Der Wert von  $\tau$  nach Gleichung (30) entspricht den Gleichgewichtsbedingungen am Element, die durch die Gleichungen (9) ausgedrückt sind. Es diene diese Feststellung nur als Kontrolle für den gefundenen Spannungszustand. Die Konstanten  $a$  und  $b$  sind also durch die Differentialquotienten der Spannungen  $\sigma_{yy}$  und  $\sigma_z$  an der betrachteten Stelle der singulären Linie bestimmt.

Um den Winkel  $\delta$ , unter dem die Normalspannungstrajektorie die singuläre Linie schneidet, zu bestimmen, bildet man nach Gleichung (23):

$$\operatorname{tg} 2\delta = + \frac{12 a z}{6 b z}.$$

In beliebiger Nähe der singulären Linie darf man darin Zähler und Nenner durch  $z$  dividieren und erhält dann

$$(32) \quad \operatorname{tg} 2\delta = \frac{2 a}{b}.$$

Der Winkel  $\delta$  der Spannungstrajektorien gegen die singuläre Linie hängt demnach von den Werten  $a$  und  $b$  ab, wie sie durch die Gleichung (31) definiert sind. Wir wollen hier zwei Sonderfälle unterscheiden. Erstens nehmen wir an, daß  $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} = 0$ ,

während  $\frac{\partial \sigma_y}{\partial z} \neq 0$ . Dann folgt aus Gleichung (32)  $\delta = 0^\circ$ , bzw.

$\delta = 90^\circ$ , d. h. von den beiden Hauptnormalspannungslinien fällt die eine in die singuläre Linie, während die andere senkrecht darauf steht. Dieser Fall trifft für die beiden geradlinigen Äste unseres Winkels zu, in denen die singuläre Linie mit der Mittel-

linie zusammenfällt. Der zweite Sonderfall entspricht  $\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial z}\right) = 0$ ,

während gleichzeitig  $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} \neq 0$  ist, In diesem Falle folgt

aus Gleichung (32)  $\delta = 45^\circ$  bzw.  $\delta = 135^\circ$ , d. h. die Hauptnormalspannungslinien schneiden die singulären Linien unter  $45^\circ$ , während die Hauptschubspannungslinien die singuläre Linie berühren bzw. auf ihr senkrecht stehen.

Die gefundenen Resultate längs einer singulären Linie sollen noch an Hand eines Beispieles, das man rechnerisch vollkommen beherrscht, diskutiert werden.

Es handelt sich um einen auf reine Biegung durch das Moment  $M$  beanspruchten Kreisring (s. Abb. 8).

Der Spannungszustand im Kreisring ist bekannt<sup>1)</sup>.

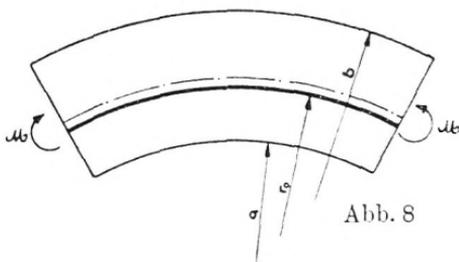


Abb. 8

<sup>1)</sup> S. A. u. L. Föppl, „Drang und Zwang“, Bd. I, 2. Aufl., S. 305. S. auch Th. Wyss, „Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern und ihre praktischen Anwendungen“, Springer 1926, S. 124.

Die Hauptspannungen sind aus Symmetriegründen radial bzw. tangential gerichtet und betragen an irgend einer Stelle im Abstand  $r$  vom Nullpunkt:

$$(33) \quad \begin{cases} \sigma_r = 4M \cdot \frac{b^2 \lg \frac{r}{b} - a^2 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \lg \frac{b}{a}}{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 (\lg \frac{b}{a})^2}; \\ \sigma_t = 4M \cdot \frac{b^2 - a^2 + b^2 \lg \frac{r}{b} - a^2 \lg \frac{r}{a} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \lg \frac{b}{a}}{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 (\lg \frac{b}{a})^2}. \end{cases}$$

Es tritt hier eine singuläre Linie auf, die man aus der Bedingung  $\sigma_r = \sigma_t$  als Kreis von Radius  $r_0$  erhält, wobei sich  $r_0$  zu

$$(34) \quad r_0 = ab \sqrt{\frac{2 \lg \frac{b}{a}}{b^2 - a^2}}$$

berechnet. Durch einfache Ausrechnung findet man

$$(35) \quad \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \right)_{r=r_0} = 0$$

Es entspricht diese Beziehung der dritten Gleichung (31). Die in Gleichung (31) mit  $6b$  bezeichnete Konstante ergibt sich in unserem Beispiel aus

$$(36) \quad \left( \frac{\partial \sigma_t}{\partial r} \right)_{r=r_0} = M \cdot \frac{8a^3 b^2}{(b^2 - a^2)(a^2 b^2 - r_0^4)}.$$

Daß die in Gleichung (31) mit  $6a$  bezeichnete Konstante in unserem Beispiel null wird, folgt aus der Achsensymmetrie unseres Beispiels.

Allgemein lassen sich die obigen Entwicklungen für die Umgebung der singulären Linie auf den Fall, daß die betrachtete Stelle mit einem Symmetriepunkt zusammenfällt, anwenden, indem man  $a = 0$  setzt. Die Spannungsfunktion geht in diesem Falle über in

$$(37) \quad F = bz^3 + c(y^2 + z^2).$$

Bei dem auf reine Biegung behandelten Winkel haben die Messungen für den Symmetriepunkt  $S$  gute Übereinstimmung mit dem durch die letzte Spannungsfunktion charakterisierten Span-

nungszustand ergeben. Insbesondere ergab sich für den Symmetrieschnitt des Winkels an der singulären Stelle  $S$  ein Maximum für  $\sigma_z$ , sodaß die Bedingung  $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$  an dieser Stelle erfüllt ist. Zu beiden Seiten des singulären Punktes  $S$  ergaben die Messungen zwar einen sehr geringen Wert für  $\tau_{\max}$ , der aber deutlich von null verschieden war, trotzdem durch sorgfältige Belastung des Winkels der Fall reiner Biegung möglichst genau verwirklicht worden ist. Es tritt also dort keine singuläre Linie auf, sondern nur in den beiden Schenkeln des Winkels als Mittellinie und der isolierte singuläre Punkt  $S$ . Der Vergleich dieses Resultates mit dem auf reine Biegung beanspruchten Kreisringsektor zeigt, daß sich der Einfluß der geänderten Berandung auch im Innern des Körpers noch ganz wesentlich bemerkbar macht. Zugleich ist durch dieses Resultat die ältere Ansicht widerlegt, daß in einem auf reine Biegung beanspruchten Winkel stets eine singuläre Linie durchlaufen müßte. Über die genaue Spannungsverteilung in derartigen auf reine Biegung beanspruchten Winkeln mit verschiedenen inneren Abrundungsradien siehe die schon erwähnte, demnächst erscheinende Dissertation von C. v. Widdern.

---