Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1928
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über Kreispunkte und Netze von Krümmungslinien.

Von **Jos. E. Hofmann.**

Mit 6 Textfiguren.

Vorgelegt von W. v. Dyck in der Sitzung am 7. Juli 1928.

Seitdem Monge[1]) in einer berühmten Abhandlung die Krümmungslinien des Ellipsoids ermittelte, sind die Netze von Krümmungslinien und ihre singulären Stellen, die Kreispunkte, Gegenstand einer Fülle tiefgehender Einzeluntersuchungen geworden. Diese beziehen sich einerseits auf Flächenfamilien besonders einfacher Krümmungslinien, worunter die Zykliden eine hervorragende Stellung einnehmen; andererseits auf differentialgeometrische Untersuchungen im Zusammenhang mit dreifach orthogonalen Flächenscharen; schließlich auf die gestaltliche Diskussion der Krümmungslinien in der Umgebung isolierter Kreispunkte.

Recht wenig weiß man indes von Eigenschaften der Netze von Krümmungslinien im Großen. Blaschke[2]) hat jüngst wieder darauf hingewiesen, daß sich die Krümmungslinien einer Fläche ohne parabolische Kreispunkte durch Übergang zum sphärischen Bild und nachfolgende stereographische Projektion desselben eindeutig beziehen lassen auf orthogonale Kurvennetze in der Ebene. An diese Arbeit schließen die folgenden Untersuchungen an.

Es scheint zweckmäßig, von der Differentialgleichung eines passenden in der ganzen Ebene definierten Orthogonalnetzes auszugehen und jene Flächen zu bestimmen, welche dieses Ortho-

---

[1]) G. Monge, Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde. Journ. de l'École Polytechnique, II^{e} cah. (1796).

[2]) Blaschke, Nabelpunkte einer Eifläche. Math. Zeitschr. **24** (1926), S. 617—21.

gonalnetz zur „sphärischen Projektion“ haben können. Die Diskussion der Flächen selbst macht außerordentliche Mühe; ich sehe nicht, wie sich dieser Nachteil umgehen läßt. Dafür ist die Abbildung der Krümmungslinien auf das Orthogonalnetz in der Ebene sozusagen konform; die gestaltliche Diskussion der Krümmungslinien in der Umgebung eines Kreispunktes ist durchaus gleichwertig mit der gestaltlichen Untersuchung der Integralkurven unseres Orthogonalnetzes in der Umgebung des entsprechenden singulären Punktes. Dieser Umstand führt zu einer allgemeinen Klassifikation der regulären Kreispunkte mittels einer „kennzeichnenden“ Näherungsdifferential-Gleichung. Hieran schließt sich die Untersuchung der einfachsten „ausgezeichneten“ regulären Kreispunkte, wobei sich einige allgemeinere Sätze über „quadratische“ Netze ergeben, d. h. Netze, deren Differential-Gleichung die Veränderlichen u, v in der sphärischen Projektion nur quadratisch enthalten.

§ 1. Sphärische Projektion.

In der Umgebung eines nicht parabolischen Punktes $\mathfrak{P}_0$ mit der bestimmten Tangentialebene τ_0 läßt sich eine analytische Fläche darstellen als Hüllfläche ihrer ∞^2 Tangentialebenen

$$\tau(u, v) \equiv 2ux + 2vy + (u^2 + v^2 - 1)z - f(u, v) = 0.$$

Dabei sind x, y, z kartesische Raumkoordinaten und bestimmt aus

$$1) \qquad x = \tfrac{1}{2} f_u - u\,\frac{uf_u + vf_v - f}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \tfrac{1}{2} f_v - v\,\frac{uf_u + vf_v - f}{u^2 + v^2 + 1},$$

$$z = \frac{uf_u + vf_v - f}{u^2 + v^2 + 1}$$

(die Indizes bedeuten partielle Ableitungen); dem Flächenpunkt $\mathfrak{P}_0\,(x, y, z)$ entspricht in dieser „sphärischen Projektion“ der Punkt $P\,(u, v)$ in der u, v-Ebene; $f(u, v)$ ist in Umgebung von $P_0\,(u_0, v_0)$ in u, v analytisch. Die Differential-Gleichung der Krümmungslinien ist

$$2) \qquad (u^2 + v^2 + 1)\,(du\,df_v - dv\,df_u) = 0$$

oder nach Abspaltung des Faktors $u^2 + v^2 + 1$

$$(1) \qquad \underline{f_{uv}\,(du^2 - dv^2) = (f_{uu} - f_{vv})\,du\,dv.}$$

Aus 1) folgt unmittelbar

3) $$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\tfrac{1}{2} df_u - z\,du)^2 + (\tfrac{1}{2} df_v - z\,dv)^2;$$

ersetzen wir 2) durch

4) $$df_u = \varrho\,du, \quad df_v = \varrho\,dv,$$

wo ϱ Wurzel der Gleichung

5) $$\begin{vmatrix} f_{uu} - \varrho, & f_{uv} \\ f_{vu}, & f_{vv} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

so zeigt sich folgender wichtiger Zusammenhang: Jede Schar Integralkurven von (1) wird für sich sozusagen konform auf die Fläche übertragen; das Vergrößerungsverhältnis an der Stelle u, v ist $\frac{\varrho}{2} - z$. In den Punkten der Flächenkurven

6) $$\Phi(u, v) \equiv \begin{vmatrix} f_{uu} - 2z, & f_{uv} \\ f_{vu}, & f_{vv} - 2z \end{vmatrix} = 0$$

ist eines dieser Vergrößerungsverhältnisse gleich Null; dort ist also die „Konformität" der Abbildung zerstört. Wir müssen den Bereich $\mathfrak{B}$ unserer analytischen Fläche, den wir sphärisch projizieren wollen, einschränken durch die Forderung $\Phi(u, v) \neq 0$ in $\mathfrak{B}$. Die Vergrößerungsverhältnisse sind gleich nur in den Punkten $f_{uv} = 0$, $f_{uu} = f_{vv}$ der Fläche; das sind aber genau die Kreispunkte.

Daher ist die Diskussion der beiden Scharen Krümmungslinien in der Umgebung eines Kreispunktes gleichwertig mit der gestaltlichen Untersuchung der beiden Scharen Integralkurven von (1) in der Umgebung des entsprechenden singulären Punktes.

Wir wollen nun den Punkt $\mathfrak{P}_0$ zum Ursprung des x, y, z-Systems, τ_0 zur x, y-Ebene und P_0 zum Ursprung des u, v-Systems machen. Dann gilt

7) $$f(u, v) = \sum_{i+k \geq 2} a_{ik} \frac{u^i\, v^k}{i!\, k!}$$

(diese Potenzreihe konvergiert nach Wahl eines passenden w für $u^2 + v^2 < w$ absolut). Ist $\mathfrak{P}_0$ Kreispunkt, so folgt $a_{11} = 0$, $a_{20} = a_{02} = 4r \neq 0$ (wegen $\Phi(0, 0) \neq 0$) und r ist dabei der

Radius der die Fläche in $\mathfrak{P}_0$ zu mindestens 2. Ordnung berührenden Kugel. Wir haben also

$$f(u,v) = 2r(u^2+v^2) + \sum_{i+k\geq 3} a_{ik}\frac{u^i v^k}{i!\,k!}. \tag{2}$$

In den von Blaschke a. a. O. gegebenen Beispielen fehlt der Summand $2r(u^2+v^2)$; dies hat für die in sphärischer Projektion gezeichneten Bilder keine Bedeutung, erzwingt aber auf der Fläche bei $u=0$, $v=0$ einen Knoten. Und das war doch wohl nicht beabsichtigt.

§ 2. Klassifikation und Auflösen algebraisch regulärer Kreispunkte.

Wir kennzeichnen den Kreispunkt $\mathfrak{P}_0$ durch (1). Dabei verschwinden die Funktionen f_{uv} und $f_{uu}-f_{vv}$ für $u=0$, $v=0$ und lassen sich durch Potenzreihen nach u, v darstellen, die für $u^2+v^2<w$ absolut konvergieren. Besitzen f_{uv} und $f_{uu}-f_{vv}$ einen für $u=0$, $v=0$ verschwindenden gemeinsamen Teiler, so heiße $\mathfrak{P}_0$ irregulär, andernfalls regulär. Für reguläre Kreispunkte gibt es unter Umständen eine Zerlegung (analog zum Weierstraßschen Vorbereitungssatz)

$$\begin{aligned} f_{uv}(u,v) &\equiv P(u,v)\cdot E_1(u,v),\\ f_{uu}(u,v)-f_{vv}(u,v) &\equiv Q(u,v)\cdot E_2(u,v), \end{aligned} \tag{3}$$

worin $E_1(u,v)$, $E_2(u,v)$ zwei sich für $u=0$, $v=0$ auf 1 reduzierende und für $u^2+v^2<w$ reguläre (Einheits-)Funktionen sind, indes $P(u,v)$, $Q(u,v)$ für $u=0$, $v=0$ verschwindende, teilerfremde Polynome p^{ten} bzw. q^{ten} Grades in u,v sind. Alsdann heiße $\mathfrak{P}_0$ ein algebraisch regulärer Kreispunkt, andernfalls ein transzendent regulärer. Wir handeln im folgenden nur von algebraisch regulären Kreispunkten (unter Weglassung des Zusatzes „algebraisch") und bilden die Differential-Gleichung

$$P(u,v)\cdot(du^2-dv^2) = Q(u,v)\cdot du\,dv. \tag{3a}$$

Wir nennen sie die kennzeichnende Näherungsdifferential-Gleichung des regulären Kreispunktes $\mathfrak{P}_0$. Dieser reguläre Kreispunkt ist stets isoliert; durch Einführung von Polarkoordinaten zeigen wir, daß die Gestalt der Integralkurven von (1) mit der von (3a) qualitativ in hinreichend kleiner Um-

gebung von $u = 0$, $v = 0$ übereinstimmt, womit unsere obige Bezeichnung sich rechtfertigt.

Gibt es ein Polynom $\overline{\psi}(u, v)$ derart, daß $P(u, v) = \overline{\psi}_{uv}$, $Q(u, v) = \overline{\psi}_{uu} - \overline{\psi}_{vv}$ ist, so muß identisch in u, v gelten

$$P_{uu} - P_{vv} \equiv Q_{uv}.$$

Ist dies erfüllt, so gibt es sicher ein $\overline{\psi}(u, v)$ dieser Eigenschaft. Der Umstand ist bemerkenswert, daß ein solches Polynom $\overline{\psi}$ nicht zu existieren braucht; wohl aber muß es ein homogenes Polynom $\psi(u, v)$ geben derart, daß ψ_{uv} bzw. $\psi_{uu} - \psi_{vv}$ die Glieder niedrigster Ordnung in u, v aus $P(u, v)$, $Q(u, v)$ liefert; also muß $P_{uu} - P_{vv} \equiv Q_{uv}$ für die homogenen Glieder niedrigster Ordnung in u, v aus P, Q gelten. Sind P und Q homogene Polynome gleichen Grades $p = q$ in u, v, so heiße ein gemeiner Kreispunkt p^{ter} Ordnung; der Verlauf der Integralkurven in seiner Umgebung ist stets angebbar auf Grund eines von Dyck[1]) angegebenen Verfahrens. Ein regulärer nicht gemeiner Kreispunkt heiße ausgezeichnet; die Zahl $r = \frac{p + q + |p - q|}{2}$ werde als seine Ordnung bezeichnet!

Wir geben nunmehr ein Verfahren zur gestaltlichen Diskussion der Integralkurven von (3a), das als das Auflösen des regulären Kreispunktes bezeichnet werde! Der Punkt P_0 hat als gemeinsamer Punkt der algebraischen Kurven $P = 0$, $Q = 0$ eine gewisse Multiplizität, die seine Schnittzahl s heißen möge! Nach einem bekannten Satz aus der Theorie der algebraischen Kurven gibt es zwei Polynome $\overline{P}(u, v)$, $\overline{Q}(u, v)$ höchstens p^{ten} bzw. q^{ten} Grades in u, v von folgenden Eigenschaften:

a) Ist $\varepsilon \neq 0$ konstant, so gibt es ein $k > 0$ derart, daß $P + \varepsilon \overline{P}$, $Q + \varepsilon \overline{Q}$ für $|\varepsilon| < k$ teilerfremd sind;

b) die Kurven $P(u, v) + \varepsilon \overline{P}(u, v) = 0$, $Q(u, v) + \varepsilon \overline{Q}(u, v) = 0$ haben für $\varepsilon \neq 0$ in einem Bereich $u^2 + v^2 < w$ ($w > 0$, passend gewählt) genau s einfache Schnittpunkte, die sich mit $\varepsilon \to 0$ in P_0 vereinigen.

---

[1]) v. Dyck, Abhandlungen d. Bayer. Akad. d. Wissenschaften, math.-phys. Klasse, XXVI (1913).

Die Differential-Gleichung

$$(3\,b) \qquad (P + \varepsilon \bar{P})\,(du^2 - dv^2) = (Q + \varepsilon \bar{Q})\,du\,dv$$

enthält somit im Bereich $u^2 + v^2 < w$ genau s singuläre Punkte, die einfache Schnittpunkte von $P + \varepsilon \bar{P} = 0$, $Q + \varepsilon \bar{Q} = 0$ sind und in deren Umgebung also nach (3 a) Näherungsgleichungen der Form $(\alpha_1 u + \alpha_2 v)\,(du^2 - dv^2) = (\beta_1 u + \beta_2 v)\,du\,dv$ gelten. Wir werden in § 4 zeigen, wie die Integralkurven in deren Umgebung beschaffen sind. Der Übergang von (3 a) zu (3 b) ist der oben mit „Auflösen des regulären Kreispunktes" bezeichnete Vorgang.

Nun deuten wir ε in (3 b) als Parameter. Die Integralkurven von (3 b) kennen wir, sobald wir die angegebenen s Näherungsgleichungen aufgelöst haben. Lassen wir $\varepsilon \to 0$ gehen, so geht nicht nur (3 b) stetig in (3 a), sondern es gehen auch die Integralkurven von (3 b) stetig in die Integralkurven von (3 a) über. Kann man durch geeignete Auflösung den Grenzübergang gut überblicken, so liefert die angedeutete Methode ein bequemes Verfahren zur qualitativen Diskussion von (1) in der Umgebung eines Kreispunktes. Wir können die u, v-Ebene vor dem Grenzübergang in einzelne Teilbereiche zerschneiden, in deren jedem sich die Integralkurven aus den dort vorhandenen „Randsingularitäten" finden lassen. Mit $\varepsilon \to 0$ werden einige dieser Teilbereiche sehr schmal oder sehr klein. Diese Teilbereiche tilgen wir gleich von Anfang an und setzen die verbleibenden in richtiger Weise mit Integralkurven überdeckten Teilbereiche zum gesuchten Bild zusammen. Diese Methode ist im Grundgedanken mit einem von Frommer[1]) angegebenen Verfahren gleichwertig.

§ 3. Kennziffer.

Einer Untersuchung Hamburgers[2]) folgend, hat Blaschke a. a. O. zur Charakterisierung eines isolierten Kreispunktes den Begriff der Kennziffer eingeführt. Sei J eine einfach geschlossene Jordan-Kurve im Definitionsbereich vom $f(u, v)$ und treffe keinen Kreispunkt der Fläche! Dem Punkt $u + iv$ der u, v-Ebene weisen wir den Vektor $F(u, v) = f_{uu} - f_{vv} + 2i f_{uv}$ zu. Dann

[1]) Frommer, Math. Ann. 99 (1928), S. 222—272.
[2]) Hamburger, Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 50—66.

gilt, soferne das Integral einmal in positivem Sinne über J erstreckt wird

$$\int_J d \arc F = n\pi, \quad n \text{ ganz.} \tag{4}$$

Durch jeden Punkt von J geht eine Krümmungslinie der einen und eine der anderen Schar; das Integral mißt die Richtungsänderung der einen oder anderen Schar Krümmungslinien bei einmaligem Umgang um J. Ist in J kein Kreispunkt gelegen, so ist n (natürlich!) gleich Null; liegt in J genau ein (und zwar ein isolierter Kreispunkt), so heißt n nach Blaschke seine Kennziffer. Liegen in J λ Kreispunkte mit den Kennziffern $n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$, so gilt $\int_J d \arc F(u, v) = \pi \sum_1^\lambda{}^k n_k$. Nun setzen wir J aus N Bögen von Krümmungslinien zusammen: Je zwei aufeinanderfolgende von ihnen gehören zu verschiedenen Scharen und treffen sich in einer Ecke unter rechtem Winkel. Die Ecke heiße ausspringend, falls die in ihr sich schneidenden Bögen, über die Ecke hinaus fortgesetzt, in J nicht eindringen; andernfalls einspringend! Ist a die Zahl der ausspringenden, e die Zahl der einspringenden Ecken, so gilt die Formel Hamburgers:

$$n = 2 - \frac{a - e}{2}. \tag{4 a}$$

Sie liefert n sogleich, wenn das Kurvennetz gezeichnet vorliegt.

Zur Berechnung von n können wir auch auf die Methode der Auflösung zurückgreifen. Wir sehen zu, daß von den singulären Punkten, in die wir den Punkt aufgelöst haben, möglichst viele imaginär oder von höherer Ordnung, aber bekannter Kennziffer sind. Dabei nehmen wir an, daß die Näherungsgleichungen in den einzelnen auflösenden Punkten wirklich als kennzeichnende Gleichungen entsprechender Kreispunkte aufzufassen sind, was in jedem einzelnen Fall geprüft werden muß. Umschließt J genau jene Punkte nach der Auflösung, die mit $\varepsilon \to 0$ nach P_0 rücken, so ist $n = \sum_1^\lambda{}^k n_k$; dabei ist n die zu suchende Kennziffer, n_k sind die bekannten Kennziffern der auflösenden singulären Punkte.

§ 4. Gemeine Kreispunkte 1. Ordnung.

Wir führen als Hilfsgröße ein

$$S \equiv \begin{vmatrix} a_{21}, & a_{30} - a_{12} \\ a_{12}, & a_{21} - a_{03} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Ist $S \neq 0$, und setzen wir in Gleichung (1) aus (2) ein, so erhalten wir unter alleiniger Berücksichtigung der in u, v linearen Glieder für einen gemeinen Kreispunkt 1. Ordnung die kennzeichnende Differential-Gleichung

$$(a_{21}u + a_{12}v)(du^2 - dv^2) = [(a_{30} - a_{12})u + (a_{21} - a_{03})v]\, du\, dv. \tag{5a}$$

Auf (5a) läßt sich die Gleichung

$$(a_1 u + a_2 v)(du^2 - dv^2) = (\beta_1 u + \beta_2 v)\, du\, dv, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

mit $a_{30} = a_2 + \beta_1$, $a_{21} = a_1$, $a_{12} = a_2$, $a_{03} = a_1 - \beta_2$ zurückführen. Damit ist die Auflösung des regulären Kreispunktes aus § 2 reduziert auf die Behandlung von Näherungsgleichungen, die selbst zu gemeinen Kreispunkten 1. Ordnung als kennzeichnend gehören.

Die fünf Formen der gestaltlich verschiedenen Typen von (5a) finden sich zum erstenmal bei Finsterwalder[1]). Die Integration ist auf vielerlei Arten möglich; sie wird recht elegant durch Anwendung der Berührungstransformation

$$u = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad v = \xi \frac{d\eta}{d\xi} - \eta, \quad \frac{dv}{du} = \xi,$$

deren sich z. B. Markert[2]) in Anschluß an eine Note von Darboux[3]) bedient. Es gibt drei geradlinige Lösungen, bestimmt aus

$$1)\quad a_{21}u^3 - (a_{30} - 2a_{12})u^2 v + (a_{03} - 2a_{21})u v^2 - a_{12}v^3 = 0.$$

Sie führen zu 6 von P_0 ausgehenden Hauptstrahlen. Von ihnen stehen keine zwei aufeinander senkrecht. Sind umgekehrt drei (paarweise nicht zueinander orthogonale) Gerade durch P_0 gegeben, so gibt es genau eine Differential-Gleichung (5a), als

[1]) In Dycks Katalog math. Modelle, München (1892), S. 302/04.

[2]) Markert, Diss. Jena (1919), ungedruckt; dort sind auf eine von der hier angegebenen Methode verschiedenen einige der Differential-Gleichungen, der folgenden Paragraphen ebenfalls behandelt.

[3]) Darboux, Surfaces IV (1896), Note 7.

deren Hauptstrahlen sie gelten können. Die nicht geradlinigen Integralkurven liegen aus P_0 ähnlich. Wir sehen P_0 als Endpunkt jeder in ihm einmündenden Integralkurve an. Eine Integralkurve von (5a) ist entweder geradlinig oder wendepunktsfrei. Es gibt folgende fünf Typen:

1. Hauptfall: Die Integralkurven liegen zu P_0 konvex; $n = -1$.

I. *Drei reelle in ein Rechtwinkelfeld nicht einschließbare Hauptgerade,* $S > 0$.

Jede Integralkurve liegt im stumpfen Winkelfeld von zwei Hauptstrahlen, die sie zu Asymptoten hat. In P_0 münden außer den Hauptstrahlen keine anderen Integralkurven ein.

2. Hauptfall: Die Integralkurven liegen zu P_0 konkav; $n = 1$.

II. *Drei reell verschiedene in ein Rechtwinkelfeld einschließbare Hauptgerade,* $S < 0$.

Die zwei Hauptgeraden, in deren spitzem Winkelfeld die dritte liegt, sollen die „äußeren" heißen, die dritte die „innere"! Die Integralkurven laufen zu den äußeren Hauptstrahlen „parabolisch" (d. h. sie bleiben zu diesen von einer gewissen Stelle ab konkav und haben keine Asymptote); längs der inneren Hauptstrahlen münden unendlich viele Integralkurven in P_0 ein.

III. *Eine einfache, eine doppelt zählende Hauptgerade,* $S < 0$.

Die Integralkurven laufen zu den Hauptstrahlen parabolisch, längs der doppelt zählenden Hauptstrahlen münden im spitzen Winkelfeld der Hauptgeraden unendlich viele Integralkurven in P_0 ein.

IV. *Eine dreifach zählende Hauptgerade,* $S < 0$.

Die Integralkurven laufen zu den Hauptstrahlen parabolisch; diese sind die einzigen in P_0 einmündenden Integralkurven.

V. *Ein reeller, zwei konjugiert imaginäre Hauptstrahlen.*

Topologisch das gleiche Bild wie vorhin.

Wir wenden uns von hier zu einigen Kreispunkten höherer Ordnung, die z. T. schon von Gullstrand[1]) behandelt worden sind, aber auf ganz andere Weise.

[1]) Gullstrand, Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie, Nova acta Reg. Soc. scient. Upsal. ser. III, vol. XX, Upsala 1900.

Zur Kenntnis der Kreispunkte, Acta Math. 29, 1905.

§ 5. Ausgezeichnete Kreispunkte $\begin{cases} r=2 \\ s=2 \end{cases}$.

(A) Wir gehen zunächst aus von der Näherungsgleichung

(6) $$[a u^2 + 2\lambda v]\,(du^2 - dv^2) = 2\,[b u^2 + (1-\lambda^2) v]\,du\,dv,$$

setzen fest $T \equiv \begin{vmatrix} a & 2\lambda \\ b & 1-\lambda^2 \end{vmatrix} \neq 0$, und denken $T > 0$. (Dies wird ev. erst nach Spiegelung an der v-Achse erreicht). Dann lösen wir auf in

(6a) $$[a(u^2-\varepsilon) + 2\lambda v]\,(du^2 - dv^2) = 2\,[b(u^2-\varepsilon) + (1-\lambda^2) v]\,du\,dv.$$

Ist $\varepsilon < 0$, so hat (6a) im Endlichen keine singuläre Stelle; die durch Gleichung (6) definierten Kreispunkte haben die Kennziffer Null.

a) $\lambda \neq 0$, Fig. 1.

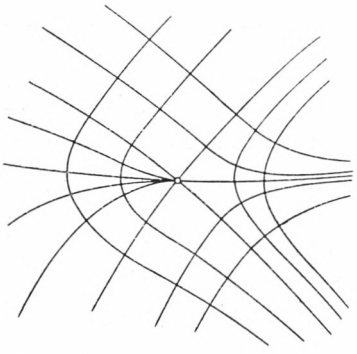

Fig. 1

Es sei $\varepsilon > 0$. In den Punkten $R^{\pm}(\pm|\sqrt{\varepsilon}|, 0)$ liegen zwei singuläre Punkte $\begin{cases} r=1 \\ s=1 \end{cases}$ mit den reell verschiedenen Hauptrichtungen

$$k_1 = \lambda + \frac{T\sqrt{\varepsilon}}{\lambda(1+\lambda^2)},$$

$$k_2 = -\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda T\sqrt{\varepsilon}}{1+\lambda^2},$$

$$k_3 = -\frac{a_1\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}.$$

Hier ist für R^+ $\sqrt{\varepsilon} = +|\sqrt{\varepsilon}|$ zu setzen, für R^- $\sqrt{\varepsilon} = -|\sqrt{\varepsilon}|$; ist S die in $R^{\pm}$ berechnete Größe wie in (5), so ist $S = 4T\sqrt{\varepsilon}$. In R^+ liegt ein Punkt vom Typ I, in R^- ein Punkt vom Typ II (§ 4). Mit $\varepsilon \to 0$ folgt Fig. 1.

b) $\lambda = 0$, Fig. 2 ($a > 0$).

Nun ist die v-Achse Integralkurve. Mit $\varepsilon = \delta^2 > 0$, $\delta > 0$ kommt hier

in $R^+(\delta, 0)$ $\quad k_1^+ = \infty, \quad k_{2,3}^+ = \pm\sqrt{\frac{a\delta}{2}}; \quad S^+ = 4T\delta,$

in $R^-(-\delta, 0)$ $\quad k_1^- = \infty, \quad k_{2,3}^- = \pm\sqrt{\frac{-a\delta}{2}}.$

In R^+ liegt ein Punkt vom Typ I, in R^- einer vom Typ V. Diese Auflösung ist Musterbeispiel für die Legung eines Schnittes: Er fülle den Streifen $|u| \leq \delta$ aus! In Richtung der positiven u-Achse münden zwei Integralkurven in $u = 0$, $v = 0$ ein, beginnend mit der Entwicklung der Zweige

$$v = \pm \frac{a}{3} |u|^{3/2}.$$

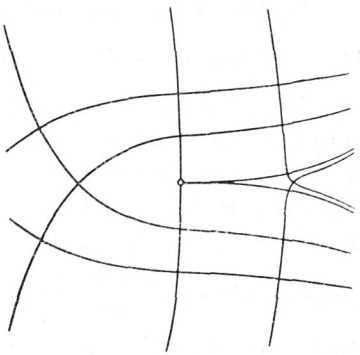

Fig. 2.

In (A) steckt mit $\lambda(\lambda^2 - 1) \neq 0$ folgender Fall: $P(u, v) = 0$, $Q(u, v) = 0$ sind zwei einander in $u = 0$, $v = 0$ berührende Parabeln (die gemeinsame Tangente ist durch Drehung zur u-Achse gemacht). Ist aber $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$, so ist eine dieser Parabeln in das Geradenpaar $u^2 = 0$ entartet.

(B) Der Typus $\begin{pmatrix} r = 2 \\ s = 2 \end{pmatrix}$ kann außerdem noch dadurch entstehen, daß eine der Kurven $P = 0$, $Q = 0$ eine Parabel durch $u = 0$, $v = 0$, die andere ein Geradenpaar durch $u = 0$, $v = 0$ vorstellt, worunter die Parabeltangente in $u = 0$, $v = 0$ nicht sein darf. Machen wir diese Parabeltangente zur u-Achse, so erhalten wir folgende zwei Möglichkeiten

$$\left.\begin{array}{ll} (6^*) & \underline{(au^2 + 2v)(du^2 - dv^2) = (b_0 u^2 + 2b_1 uv + b_2 v^2)\, du\, dv} \\ (6^{**}) & \underline{(b_0 u^2 + 2b_1 uv + b_2 v^2)(du^2 - dv^2) = (au^2 + 2v)\, du\, dv} \end{array}\right\} b_0 \neq 0.$$

Die gleichen Schlüsse wie oben zeigen, daß (6*) auf den in Fig. 1 dargestellten Typ (Hauptrichtungen sind in $u = 0$, $v = 0$: $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$) und (6**) auf den in Fig. 2 dargestellten Typ (Hauptrichtungen sind in $u = 0$, $v = 0$: $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = \infty$) führt. Auf (6), (6*) und (6**) läßt sich aber die Näherungsgleichung eines Punktes $\begin{pmatrix} r = 2 \\ s = 2 \end{pmatrix}$ stets zurückführen; somit ist erkannt: Jeder Kreispunkt $\begin{pmatrix} r = 2 \\ s = 2 \end{pmatrix}$ hat die Kennziffer Null und ist durch einen der Typen in Fig. 1 oder Fig. 2 dargestellt.

In (6) ist das merkwürdige Beispiel enthalten

1) $$2v(du^2 - dv^2) = k(u^2 - v^2)\,du\,dv, \qquad k < 0.$$

Hier sind $v = 0$, $u \pm v = 0$ selbst Integralkurven; die krummlinigen Integralkurven haben $u = |v|$ und die positive u-Achse zu Asymptoten und laufen zu $u = -|v|$ parabolisch. Längs der negativen u-Achse münden unendlich viel Integralkurven ein. Ort der Wendepunkte ist $u^2 - v^2 = ku(u^2 + v^2)$; die zugehörige Wenderichtung ist $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{2uv}{u^2 + v^2}$. Das Beispiel ist als sphärische Projektion eines Netzes Krümmungslinien aufzufassen und liefert unter den quadratischen Netzen das einzige mit geradlinigen Lösungen durch einen ausgezeichneten Kreispunkt (vgl. § 9).

§ 6. Ausgezeichnete Kreispunkte $\begin{pmatrix} r=2 \\ s=3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} r=2 \\ s=4 \end{pmatrix}$.

(A) Wir gehen zunächst aus von der Näherungsgleichung

(7) $$\underline{[auv + 2\lambda(cu^2 + 2v)](du^2 - dv^2) =} \\ \underline{= 2[buv + (1 - \lambda^2)(cu^2 + 2v)]\,du\,dv,}$$

setzen fest $c \neq 0$, $\bar{T} \equiv \begin{vmatrix} a & 2\lambda \\ b & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} \neq 0$ und denken $\bar{T} > 0$ (dies wird ev. erst nach Spiegelung an der v-Achse erreicht). Lösen wir auf in

(7 a) $$\underline{[av(u - \varepsilon) + 2\lambda(cu^2 + 2v)](du^2 - dv^2) =} \\ \underline{= 2[bv(u - \varepsilon) + (1 - \lambda^2)(cu^2 + 2v)]\,du\,dv,}$$

so liegt in $u = 0$, $v = 0$ ein Punkt $\begin{pmatrix} r=2 \\ s=2 \end{pmatrix}$, in $u = \varepsilon$, $v = -\dfrac{c\varepsilon^2}{2}$ ein Punkt $\begin{pmatrix} r=1 \\ s=1 \end{pmatrix}$; dieser letztere hat für $c\bar{T} > 0$ die Kennziffer $+1$, für $c\bar{T} < 0$ die Kennziffer -1. Die Kennziffer des Kreispunktes von (7) ist die des Kreispunktes $u = 0$, $v = 0$ aus (7a). Wir denken $\lambda \neq 0$ und sehen genau so wie oben: Ist $c\bar{T} < 0$, so ist das Bild der Integralkurven von (7) topologisch gleichwertig mit dem von Typ I; ist $c\bar{T} > 0$, so ist es gleichwertig mit dem von Typ II.

Ist $\lambda = 0$, so läßt sich (7) ersetzen durch

1) $$a\,u\,v\,(du^2 - dv^2) = 2\,(c\,u^2 + 2\,v)\,du\,dv;\quad a\,c \neq 0.$$

Dies wird durch reine Ähnlichkeitstransformation zu

(8) $$\underline{2\,u\,v\,(du^2 - dv^2) = (a\,u^2 + 2\,v)\,du\,dv;\quad a \neq 0.}$$

Ist $a < 0$, so lösen wir auf in

(8 a) $$\underline{2\,u\,v\,(du^2 - dv^2) = [a\,u^2 + 2\,(v - \varepsilon)]\,du\,dv}$$

und denken $\varepsilon > 0$. Nun liegt allein in $u = 0$, $v = \varepsilon$ ein singulärer Punkt $\begin{pmatrix} r = 1 \\ s = 1 \end{pmatrix}$; seine Hauptrichtungen sind $k_1 = \infty$, $k_{2,3} = \pm\,|\sqrt{\varepsilon}\,|$. Er ist also vom Typ I.

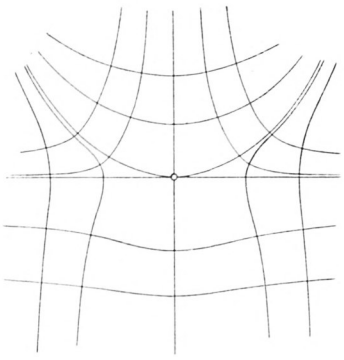

Fig. 3

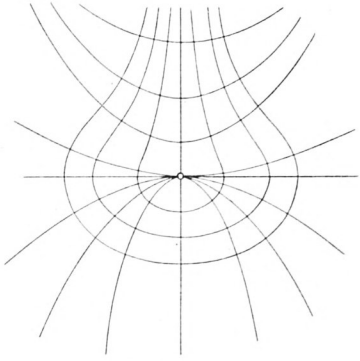

Fig. 4

Jetzt lassen wir den schmalen Bereich aus der u, v-Ebene weg, begrenzt von den Kurven

1) $v = 0$,

2) $v = \dfrac{|\varepsilon|^{3/2}}{u + |\varepsilon|^{1/2}}$ für $u \geq 0$,

3) $v = \dfrac{-|\varepsilon|^{3/2}}{u - |\varepsilon|^{1/2}}$ für $u \leq 0$.

Im Restbereich ist der Verlauf der Integralkurven von (7 a) sichergestellt. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt Fig. 3. Durch $u = 0$, $v = 0$ geht außer $v = 0$ noch eine weitere Integralkurve mit Horizontaltangente; ihre Entwicklung beginnt mit $v = u^2\,(1 - a)$.

Ist $\alpha > 0$, so lösen wir auf in

$$2uv(du^2 - dv^2) = (\alpha(u^2 - \varepsilon) + 2v)\,du\,dv \tag{8b}$$

und denken $\varepsilon > 0$. Wir haben drei singuläre Punkte, R_0 und $R^{\pm}$.

$$R_0\left(u = 0,\ v = \frac{\alpha\varepsilon}{2}\right) k_1 = \infty,\ k_{2,3} = \pm\left|\sqrt{\frac{\alpha\varepsilon}{2}}\right| \qquad \text{Typ I}$$

$$R^{+}(u = \sqrt{\varepsilon},\ v = 0)\ k_1 = 0,\ k_2 = (1-\alpha)\sqrt{\varepsilon},\ k_3 = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \text{Typ II.}$$

Dabei setzen wir für R^{+} $\sqrt{\varepsilon} = +|\sqrt{\varepsilon}|$, für R^{-} $\sqrt{\varepsilon} = -|\sqrt{\varepsilon}|$.

Denken wir etwa $\alpha > 1$ und nehmen aus der u, v-Ebene den Bereich um $u = 0$, $v = 0$ heraus, der begrenzt wird von den Kurven

1) $v = \dfrac{\alpha\varepsilon}{2}$,

2) $v = \dfrac{\alpha\varepsilon}{2}\left[1 - \dfrac{\alpha|\sqrt{\varepsilon}|}{2(1-\alpha)u - (2-3\alpha)|\sqrt{\varepsilon}|}\right]$ für $u \geq |\sqrt{\varepsilon}|$,

3) $v = \dfrac{\alpha\varepsilon}{2}\left[1 + \dfrac{\alpha|\sqrt{\varepsilon}|}{2(1-\alpha)u + (2-3\alpha)|\sqrt{\varepsilon}|}\right]$ für $u \leq -|\sqrt{\varepsilon}|$,

4) $v = 1 - \dfrac{u}{|\sqrt{\varepsilon}|}$ für $u \geq |\sqrt{\varepsilon}|$,

5) $v = 1 + \dfrac{u}{|\sqrt{\varepsilon}|}$ für $u \leq -|\sqrt{\varepsilon}|$,

so ist im Restbereich der Verlauf der Integralkurven von (8b) klar. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt Fig. 4. Sie ist topologisch nicht verschieden von den für $0 < \alpha \leq 1$ entstehenden Bildern, was ähnlich gezeigt wird.

In (A) steckt mit $\lambda(\lambda^2 - 1) \neq 0$ folgender Fall: $P(u, v) = 0$, $Q(u, v) = 0$ sind zwei einander in $u = 0$, $v = 0$ oskulierende Kegelschnitte (die gemeinsame Tangente ist durch Drehung zur u-Achse gemacht). Ist aber $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$, so ist eine dieser Kurven in das Geradenpaar $uv = 0$ entartet.

(B) Der Typ $\begin{pmatrix} r = 2 \\ s = 3 \end{pmatrix}$ kann außerdem noch dadurch entstehen, daß eine der Kurven $P = 0$, $Q = 0$ eine Parabel durch $u = 0$, $v = 0$, die andere ein nicht zusammenfallendes Geradenpaar durch

$u = 0$, $v = 0$ vorstellt, das die Parabeltangente in $u = 0$, $v = 0$ enthält. Machen wir diese Parabeltangente zur u-Achse, so haben wir folgende zwei Möglichkeiten

$$(7^*) \quad (au^2 + 2v)(du^2 - dv^2) = 2v(bu + cv)\,du\,dv \qquad ac \neq 0$$

(dies liefert in $u = 0$, $v = 0$ die Hauptrichtungen $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$ und führt zurück zu den Typen von Gleichung (7)) oder

$$(8^*) \quad v(bu + cv)(du^2 - dv^2) = 2(au^2 + 2v)\,du\,dv \qquad ac \neq 0$$

(dies führt zurück zu den Typen von Gleichung (8) und liefert die Hauptrichtungen $k_1 = \infty$, $k_2 = k_3 = 0$ in $u = 0$, $v = 0$).

Auf (7), (7*) oder (8*) läßt sich die Näherungsgleichung eines Kreispunktes $\begin{pmatrix} r = 2 \\ s = 3 \end{pmatrix}$ stets zurückführen; somit ist erkannt: Jeder Kreispunkt $\begin{pmatrix} r = 2 \\ s = 3 \end{pmatrix}$ hat die Kennziffer $+1$ oder -1 und ist dargestellt entweder durch Typ I oder durch Typ II oder durch die in Fig. 3, 4 gezeichneten Typen.

Entsprechend könnten wir nun zur Diskussion der ausgezeichneten Kreispunkte $\begin{pmatrix} r = 2 \\ s = 4 \end{pmatrix}$ übergehen, doch beschränken wir uns darauf, folgenden leicht zu beweisenden Satz anzuführen: Die ausgezeichneten Kreispunkte $\begin{pmatrix} r = 2 \\ s = 4 \end{pmatrix}$ haben die Kennziffer Null.

§ 7. Gemeine Kreispunkte 2. Ordnung.

Die kennzeichnende Näherungsgleichung eines gemeinen Kreispunktes 2. Ordnung ist

$$(9) \quad \begin{aligned} &(a_0 u^2 + 2a_1 uv + a_2 v^2)(du^2 - dv^2) = \\ &= (b_0 u^2 + 2b_1 uv + b_2 v^2)\,du\,dv; \end{aligned}$$

da P, Q teilerfremd sind, gilt

$$4 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0;$$

da ferner $P_{uu} - P_{vv} \equiv Q_{uv}$ ist, muß sein $a_0 - a_2 = b_1$. Gleichung (9) kann als homogene nach dem Verfahren Dycks[1]) integriert

[1]) Vgl. Anm. auf S. 165.

werden; recht geeignet wäre auch die in § 4 erwähnte Berührungstransformation, die auf elliptische Integrale führt. Es gibt geradlinige Lösungen durch $u = 0$, $v = 0$; sie werden dargestellt durch

$$1) \qquad \begin{aligned} &a_0 u^4 - (b_0 - 2a_1) u^3 v - 3(a_0 - a_2) u^2 v^2 - \\ &- (b_2 + 2a_1) u v^3 - a_2 v^4 = 0; \end{aligned}$$

mindestens eine von ihnen ist reell[1]). Daher läßt sich durch Drehung erreichen, daß in (9) das Geradenpaar mit der Gleichung $P = 0$ reell ist; z. B., daß es die v-Achse enthält. Nun können wir die Kennziffer des Punktes $u = 0$, $v = 0$ leicht feststellen:

a) Die Geradenpaare $P = 0$, $Q = 0$ trennen sich.

Dann ist auch das durch $Q = 0$ dargestellte Geradenpaar reell. Ersetzen wir zur Auflösung P durch $P + \varepsilon$, so hat die Hyperbel $P + \varepsilon = 0$ mit dem Geradenpaar $Q = 0$ zwei zu $u = 0$, $v = 0$ symmetrische Schnittpunkte gemein, die in der aufgelösten Gleichung zwei Kreispunkte 1. Ordnung gleichen Typs erzeugen. Der zu untersuchende Kreispunkt $u = 0$, $v = 0$ hat also die Kennziffer $+2$ oder -2.

b) Die Geradenpaare trennen sich nicht.

Dann kann das durch $Q = 0$ dargestellte Geradenpaar auch imaginär sein. Ersetzen wir P durch $P + \varepsilon$, so läßt sich das Zeichen von ε derart bestimmen, daß die Hyperbel $P + \varepsilon = 0$ das Geradenpaar $Q = 0$ nicht reell schneidet; der zu untersuchende Kreispunkt $u = 0$, $v = 0$ hat also die Kennziffer Null.

§ 8. Einiges über quadratische Netze.

„Quadratisch" heiße ein Netz (1), wenn $f(u, v)$ in u, v ein Polynom 4. Grades, also (1) in u, v vom 2. Grade ist und f_{uv}, $f_{uu} - f_{vv}$ teilerfremd sind. Kreispunkte des Netzes sind die gemeinsamen reellen Punkte der Kurven $f_{uv} \equiv P = 0$, $f_{uu} - f_{vv} \equiv Q = 0$ im Endlichen; außerdem gegebenenfalls noch der Punkt „Unendlich".

---

[1]) Ist 1) identisch erfüllt, so reduziert sich (9) auf

$$u v (du^2 - dv^2) = (u^2 - v^2) du\, dv$$

mit $v = cu$ und $u^2 + v^2 = c$ als Integralkurven ($n = +2$).

Sind $n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ die Kennziffern der Kreispunkte im Endlichen, so gilt nach Blaschke: $n_\infty = \sum_1^\lambda n_\varkappa$. $n_\infty = -4$ gehört zu einem Nichtkreispunkt in ∞. Wie in § 7 erkennen wir, daß sich das „Asymptotenpaar" von $P = 0$ durch Drehung stets reell machen läßt, daß also $P = 0$ ein reelles Geradenpaar, eine Parabel oder eine Hyperbel vorstellt. Im einfachsten Fall liegen vier reell verschiedene Kreispunkte $\begin{pmatrix} r = 1 \\ s = 1 \end{pmatrix}$ im Endlichen.

a) Die vier Kreispunkte liegen hyperbolisch.

Hat der im Dreieck der andern gelegene Kreispunkt die Kennziffer n_0, so hat jeder der drei andern die Kennziffer $-n_0$. Der Punkt ∞ hat die Kennziffer $n_\infty = -2n_0$.

b) Durch die vier Kreispunkte läßt sich eine Parabel legen.

Wir können die Kreispunkte in zwei, einander auf der (einen) durch sie möglichen Parabel trennende Paare anordnen: Die Punkte des einen Paares haben die Kennziffer $+1$, die des andern Paares die Kennziffer -1, der Punkt ∞ hat die Kennziffer Null.

Wir gewinnen hieraus alle andern möglichen quadratischen Netze, indem wir die Kreispunkte zusammenrücken, gegebenenfalls imaginär werden oder ins Unendliche wandern lassen. Die angedeutete Methode läßt sich auf höhere Netze ausdehnen; dann wird die Überlegung entsprechend komplizierter.

§ 9. Quadratische Netze mit sechs reellen geradlinigen Lösungen.

Wir sehen unmittelbar, daß eine geradlinige Lösung im quadratischen Netz durch genau zwei (reell verschiedene, zusammenfallende oder imaginäre) Kreispunkte hindurchgeht. Sind alle vier Kreispunkte reell verschieden, so kann es also höchstens sechs geradlinige Lösungen im quadratischen Netz geben. Wir wollen die zugehörigen Netze aufsuchen.

a) Die vier Kreispunkte bilden eine Raute.

Die Punkte seien $\begin{pmatrix} u = \pm a \\ v = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u = 0 \\ v = \pm b \end{pmatrix}$; $a > b > 0$! Die Differential-Gleichung heißt

(10a) $2uv(du^2 - dv^2) = \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - 1\right)(a^2 - b^2)\,du\,dv.$[1])

In $\begin{matrix} u = \pm a \\ v = 0 \end{matrix}$ liegen Punkte der Kennziffer $+1$, in $\begin{matrix} u = 0 \\ v = \pm b \end{matrix}$ Punkte der Kennziffer -1. Das Netz hat außerdem die Hyperbel $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ zur Integralkurve. Es läßt sich durch Quadraturen integrieren. Vgl. Fig. 5.

b) Der 4. Kreispunkt ist Höhenschnittpunkt des durch die 3 andern gebildeten Dreiecks.

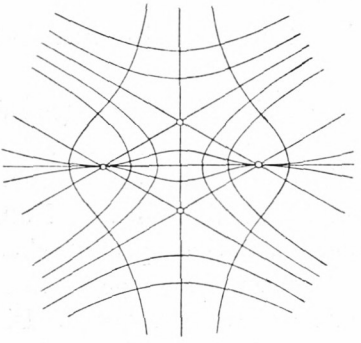

Fig. 5

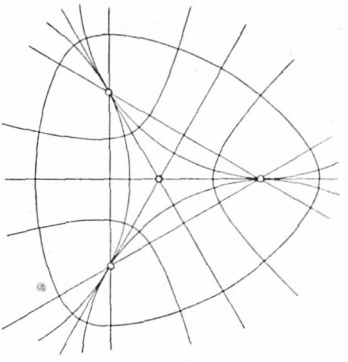

Fig. 6

Ein Punkt liegt genau im Dreieck der drei andern; wir nennen ihn P_3 und machen ihn zum Ursprung. Er hat sicher die Kennziffer -1; die andern Kreispunkte, nämlich P_0, P_1, P_2, haben die Kennziffer $+1$. Wir schreiben die Seiten des Dreiecks in Normalform an

1) $$g_i \equiv u\cos\alpha_i + v\sin\alpha_i - \frac{p}{\cos\vartheta_i} = 0;\quad i = 0, 1, 2;$$

$$\vartheta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_{i-1} \mp \frac{\pi}{2};\quad p \neq 0;$$ Indizes modulo 3 zu nehmen!

[1]) Die Überlegung gilt auch, wenn b^2 durch $-b^2$ ersetzt wird; dann sind die Seiten der Raute imaginär, die Diagonalen bleiben reell. Mit $-b^2 = a^2$ kommen speziell die konfokalen Kegelschnitte. Ähnliches gilt für (10b).

Die drei Höhen durch P_0, P_1, P_2 seien entsprechend bezeichnet mit h_i! Es gilt

2) $$h_i \equiv u \sin a_i - v \cos a_i = 0,$$

und zwischen den g_i und h_i besteht die Identität $\sum_0^2{}^i g_i h_i \sin 2\vartheta_i = 0$.

Die verlangte Differential-Gleichung des Netzes ist

(10 b) $$\underline{(g_1 h_1 \sin 2a_2 - g_2 h_2 \sin 2a_1)(du^2 - dv^2) =}$$
$$\underline{= 2(g_1 h_1 \cos 2a_2 - g_2 h_2 \cos 2a_1)\, du\, dv.}$$

Insbesondere folgt daraus ein dreifach symmetrischer Fall mit der Gleichung

3) $$(u + a)\, v\,(du^2 - dv^2) = (u^2 - v^2 - 2au)\, du\, dv.$$

Er liegt der Fig. 6 zu Grunde, bei der also das Dreieck $P_0 P_1 P_2$ gleichseitig ist; $a > 0$ zu denken!

Einige weitere merkwürdige Ergebnisse treten auf, wenn man dem quadratischen Netz einen nicht zerfallenden Kegelschnitt als Integralkurve aufzwingt; es sei nur der folgende Satz erwähnt: Ist ein Mittelpunktskegelschnitt Integralkurve eines Quadratnetzes, so sind auch seine Achsen Integralkurven und das Netz läßt sich durch Quadraturen integrieren.