Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft III
November-Dezembersitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über den Hauptsatz der Polarentheorie der Kegelschnitte.

Von **Friedrich Schur** in Breslau.

Mit 1 Figur.

Vorgetragen in der Sitzung am 5. Nov. 1927.

Der Hauptsatz der Polarentheorie der Kegelschnitte, daß nämlich: diejenigen Punkte, welche von einem festen Punkte durch mit diesem in gerader Linie liegende Punktepaare des Kegelschnittes harmonisch getrennt sind, in einer Geraden, der Polaren des festen Punktes liegen, wird, wenn ich von den analytischen Beweisen absehe, in allen mir bekannten Lehrbüchern erstens aus der projektiven Erzeugung des Kegelschnittes und zweitens mit Benutzung seiner Tangenten bewiesen. Nun handelt es sich hier aber um sechs Punkte, für die einerseits der Desargues'sche und andererseits der Pascal'sche Satz gilt, sodaß der obige Satz sich unmittelbar aus diesen beiden Sätzen allein beweisen lassen muß. Das ist in der Tat leicht zu sehen.

Sind nämlich A der Pol und B_1, C_1; B_2, C_2; B_3, C_3 (s. Fig.) die drei Paare von Punkten, die mit A in je einer Geraden liegen, und sind endlich:

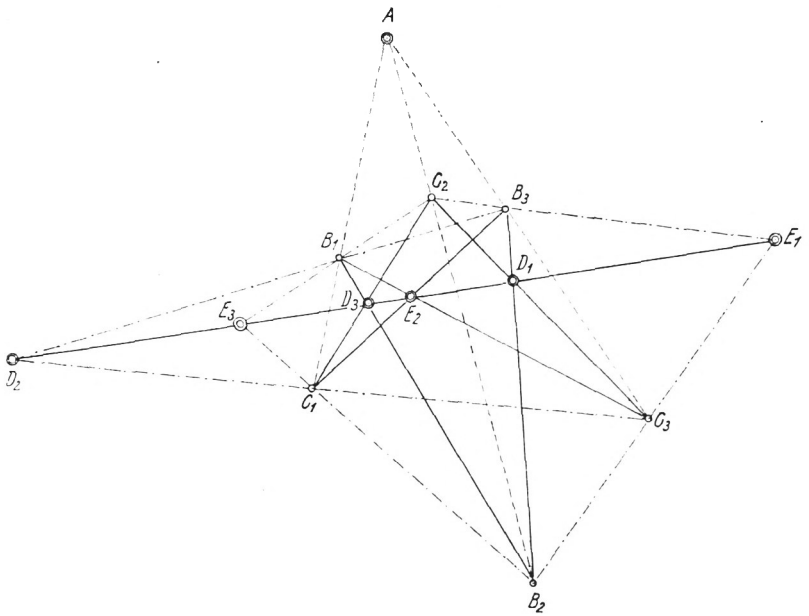
$$D_i = (B_k B_l, C_k C_l) \text{ und } E_i = (B_k C_l, B_l C_k),$$

wo i, k, l irgend drei von einander verschiedene der Indices 1, 2, 3 sind, die von A verschiedenen Diagonalpunkte der vollständigen Vierecke $B_k B_l C_k C_l$, so lehrt der Satz von Desargues, daß in jedem Falle in je einer Geraden liegen die Punkte:

$$D_1, D_2, D_3 \text{ und } D_i, E_l, E_k,$$

daß diese 6 Diagonalpunkte also die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden. Denn es sind die Punkte D_1, D_2, D_3; D_1, E_2, E_3; D_2, E_3, E_1; D_3, E_1, E_2 die Schnittpunkte entsprechender Seiten der Paare von perspektiven Dreiecken:

$B_1 B_2 B_3$ und $C_1 C_2 C_3$; $B_2 B_3 C_1$ und $C_2 C_3 B_1$: $B_3 B_1 C_2$ und $C_3 C_1 B_2$; $B_1 B_2 C_3$ und $C_1 C_2 B_3$



Nehmen wir nun aber an, daß die 6 Punkte $B_1 B_2 B_3 C_1 C_2 C_3$ auf auf einem Kegelschnitte liegen, also die Ecken eines Pascal'schen Sechsecks sind, so liegen auch die Punkte: $D_3 = (B_1 B_2, C_1 C_2)$, $D_1 = (B_2 B_3, C_2 C_3)$, $E_2 = (B_3 C_1, C_3 B_1)$ in einer Geraden. Auf dieser Geraden liegt aber nach dem Obigen auch D_2, also auch E_1 und E_3. Sie schneidet daher als gemeinsame Diagonale der vollständigen Vierecke $B_k B_l C_k C_l$ deren durch A laufende Seiten in den durch deren Ecken von A harmonisch getrennten Punkten, sodaß der obige Hauptsatz der Polarentheorie bewiesen ist.