

00078419

Berechnung von Mischfarben.

Von

E. Lommel.

(Mit 2 Tafeln.)

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss. II. Cl. XVII. Bd. III. Abth.



München 1891.

Verlag der k. Akademie
in Commission bei G. Franz.

0078410

Bis in die neueste Zeit hat man, um den Farbenton einer Mischung beliebig gegebener einfacher Farben zu berechnen, sich der Newton'schen Regel bedient. Diese Regel besteht bekanntlich in Folgendem. Der Umfang eines Kreises vom Radius 1 wird in sieben Theile getheilt, welche den Zahlen $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$ proportional sind, und in dieser Reihenfolge den sieben Hauptfarben Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett des prismatischen Spectrums entsprechen, mit allen ihren Uebergängen vom Roth bis zum Violett. Man sucht sodann für jeden dieser sieben Kreisbogen den Schwerpunkt, und denkt sich in demselben das Gewicht des zugehörigen Bogens angebracht. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller Bogen oder des ganzen Kreisumfangs ist der Mittelpunkt des Kreises, und diesem Punkt entspricht als Mischfarbe aller Spectralfarben das reine Weiss. Sind die einfachen Farben in anderen Verhältnissen gemischt als im weissem Sonnenlicht, so hat man die Gewichte in den einzelnen Schwerpunkten mit den zugehörigen Verhältnisszahlen zu multipliciren. Sucht man jetzt den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, so wird er im allgemeinen nicht in das Centrum des Kreises fallen, sondern excentrisch in einer Entfernung r vom Mittelpunkte liegen. Die Mischung hat alsdann den Farbenton, welchen der Radius, der durch diesen Schwerpunkt geht, auf dem Kreisumfang angibt, und die gesuchte Mischfarbe ist aequivalent der Mischung aus einer Menge r der entsprechenden homogenen Spectralfarbe und aus einer Menge $1 - r$ von Weiss. Die Zahl r gibt sonach den Sättigungsgrad der Mischfarbe an.

Wenn nun auch die Eintheilung des Newton'schen Farbenkreises aus einer nicht haltbaren Vergleichung der Farbenreihe des Spectrums mit der musikalischen (phrygischen) Tonleiter entsprungen ist, so gibt dieses Verfahren doch gute Resultate, und war lange Zeit das einzige Hilfsmittel, um Mischfarben durch Rechnung zu bestimmen. Biot¹⁾, Fresnel²⁾, Abria³⁾, Jamin⁴⁾ u. A. haben dasselbe mit Erfolg hiezu angewendet. Jedenfalls sind die Voraussetzungen, auf welchen das Newton'sche Verfahren beruht, nämlich dass jede Mischfarbe als eine Mischung einer gesättigten Farbe mit Weiss angesehen, und dass diese Farbe durch eine Schwerpunktsconstruction gefunden werden könne, theoretisch nicht anfechtbar, wie Grassmann⁵⁾ gezeigt hat, und die aus diesen Voraussetzungen gezogenen Folgerungen stehen mit den Thatsachen im Einklange.

In neuerer Zeit hat Maxwell⁶⁾ im Anschluss an die Young'sche Vorstellung von nur drei physiologischen Grundempfindungen, vermöge welcher jede einfache oder zusammengesetzte Farbe durch eine lineare Function dreier Grundfarben ausgedrückt werden kann, durch Versuche die Coefficienten bestimmt, mit welchen man die Quantitäten der Grundfarben multipliciren muss, um die verschiedenen einfachen Farben zu erhalten. In der Farbentafel nehmen die von Maxwell gewählten drei Grundfarben, nämlich Roth von der Wellenlänge 630 Milliontel-Millimeter, Grün 528 und Blau 457 die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ein, und der Ort einer jeden Farbe wird gefunden als Schwerpunkt dreier in den Eckpunkten des Farbendreiecks angebrachter Gewichte, deren Grösse proportional ist den relativen Mengen der drei Grundfarben, welche nöthig sind, um diese Farbe hervorzubringen. Der Ort des reinen Weiss ist der Schwerpunkt, der sich ergibt, wenn man die Ecken des Dreiecks mit Gewichten im Verhältniss von 3,973 — 6,520 — 6,460 belastet.

1) Biot, *Traité de Physique*, t. IV, p. 68. 1816.

2) Fresnel, namentlich in seinem *Mémoire sur le calcul des teintes des lames cristallisées*, *Oeuvres*, t. I. p. 609.

3) Abria, *Sur la diffraction de la lumière*, *Journal de Math. de Liouville*, IV, p. 248. 1838.

4) Jamin, *Mémoire sur la couleur des métaux*, *Ann. de Chim. et de Physique*, 3. série, t. XXII, p. 322. 1848.

5) Grassmann, *Pogg. Ann.* Bd. LXXXIX. p. 69.

6) Maxwell; *Phil. Trans. L. R. S.* p. 57. 1860.

Auf Grund der Maxwell'schen Daten hat in neuester Zeit Lord Rayleigh¹⁾ die Farben dünner Blättchen berechnet. Es geschah diess mit Hilfe umfangreicher Zahlentabellen, und da eine grosse Anzahl von Punkten bestimmt werden muss, so nahmen die Rechnungen eine grosse Ausdehnung an.

Bei diesen Methoden ist das Resultat der Rechnung, welches den Ort der Mischfarbe in der Farbentafel angibt, ein rein numerisches. Weder das eine noch das andere Verfahren ist fähig, einen analytischen Ausdruck zu liefern, der z. B. für die Farben dünner Blättchen oder diejenigen der Beugungsfransen das Gesetz der Farbenfolge als Function der Dicke des Blättchens oder des Beugungswinkels angäbe.

Das mir öfters fühlbar gewordene Bedürfniss, die Reihe der mannigfaltigen Mischfarben, welche die mit weissem Lichte hervorgebrachten Interferenzerscheinungen zeigen, in eine übersichtliche Formel zusammengefasst zu sehen, gab Veranlassung zu vorliegender Arbeit. Die Aufgabe, die wir uns stellen, ist hienach die folgende: Wenn für irgend eine Lichterscheinung der Intensitätsausdruck für jede homogene Farbe als Function der Wellenlänge gegeben ist, aus diesem Ausdruck Formeln herzuleiten, welche bei Anwendung einer weissen Lichtquelle die Wellenlänge des Farbentons der Mischfarbe, deren Sättigungsverhältniss und Helligkeit darstellen, als Functionen derjenigen Veränderlichen, die in jedem Falle die Verschiedenheit der Farbenmischung bedingen.

Als Begrenzung der Farbentafel behalten wir die Newton'sche Kreislinie bei, und denken uns längs ihres Umfangs das „ideale Spectrum“ Listing's²⁾ aufgetragen, in welchem die Farben nach den Differenzen ihrer Schwingungszahlen angeordnet sind. Auch von Bezold³⁾ ist in seiner Abhandlung: „Ueber das Gesetz der Farbenmischung und die physiologischen Grundfarben“ zu dieser Eintheilung der Farbentafel gelangt, welche bei grosser Einfachheit eine gute Uebereinstimmung mit den Beobachtungen darbietet.

1) Lord Rayleigh, On the Colours of Thin Plates, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XXXIII. Part I. p. 157. 1886.

2) Listing, Pogg. Ann. Bd. CXXXI, p. 564.

3) v. Bezold, Pogg. Ann. Bd. CL. p. 241. 1873.

Bezeichnet man nun mit φ die von irgend einem Anfangspunkte gezählte Bogenlänge dieses Farbenkreises, so besteht zwischen der Wellenlänge λ und der ihr anzuweisenden Stelle auf dem Kreisumfang die Beziehung

$$\frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{2\pi} \varphi,$$

wo a und b noch zu bestimmende Constante sind.

Sind auf diese Weise die homogenen Farben des Spectrums, mit den Intensitätsverhältnissen, mit welchen sie für jede Schwingungszahl im Sonnenlicht vertreten sind, längs des Kreisumfanges aufgetragen, so betrachten wir diesen als ringsum gleichmässig belastet. Alsdann fällt der Schwerpunkt sämtlicher Farben in den Mittelpunkt des Kreises, welcher sonach den Ort des Weiss darstellt; auf jedem Radius des Kreises herrscht die Farbe, welche dem Punkte des Umfanges zugehört, nach welchem der Radius gezogen ist, und zwar um so gesättigter, je mehr man sich auf dem Radius vom Mittelpunkt nach aussen gehend dem Umfange nähert.

Nehmen wir die Intensität des Weiss im Mittelpunkt als Einheit der Lichtstärke an, so ist, wenn auch der Radius des Kreises gleich 1 gesetzt wird, die Lichtstärke für die Einheit der Bogenlänge $1/2\pi$, und $d\varphi/2\pi$ für ein Bogenelement $d\varphi$.

Gemäss dieser Annahmen über Vertheilung und Intensität der Farben müssen je zwei homogene Farben, welche an den Endpunkten eines Durchmessers liegen, zu einander complementär sein, da ihr Schwerpunkt in den Mittelpunkt des Kreises fällt.

Kennt man daher aus der Erfahrung die Wellenlängen zweier complementärer homogener Farben, so ist hiedurch die Constante b in obigem Ausdruck bestimmt.

Bezeichnen wir nämlich mit λ_1 und λ_2 die Wellenlängen zweier complementärer einfacher Farben, so muss

$$\frac{1}{\lambda_1} = a + \frac{b}{2\pi} \varphi,$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = a + \frac{b}{2\pi} (\varphi + \pi),$$

und sonach

$$\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{b}{2}$$

sein. Bei der angenommenen Maasseinheit für die Lichtmengen verschiedenfarbigen Lichtes, nach welcher solche Mengen, welche gemischt Weiss geben, als gleich angesehen werden, würde also für complementäre homogene Farbenpaare das einfache Gesetz gelten, dass die Differenz ihrer Schwingungszahlen constant ist.

Zur numerischen Bestimmung der Constanten b wählen wir zwei complementäre einfache Farben, welche unserem Auge beim Betrachten des Spectrums nahezu gleich hell erscheinen, und zwar wählen wir aus den Beobachtungen von Helmholtz¹⁾ das Roth $\lambda_2 = 656,2$ und das Blaugrün $\lambda_1 = 492,1$, und finden hieraus:

$$b = 0,00101636, \quad \log b = 7,0070490 - 10.$$

Die Constante a , von deren Wahl die Lage des Anfangspunktes der Bogenzählung auf dem Kreisumfange abhängt, wird in der Folge ebenfalls aus Beobachtungsdaten bestimmt werden.

Bei der angenommenen Farbenvertheilung müssen ferner je drei, vier, fünf u. s. f. einfache Farben, welche in den Eckpunkten eines dem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Drei-, Vier-, Fünfecks u. s. f. liegen, zusammen Weiss geben. —

Ist nun irgend ein Intensitätsausdruck, z. B. für eine Interferenzerscheinung, als Function $f(1/\lambda)$ der Wellenlänge oder der Schwingungszahl gegeben, so hat man, um die drei Merkmale Farbenton, Sättigung und Lichtstärke der Mischfarbe zu finden, die Mittelkraft und deren Angriffspunkt für die rings am Kreisumfang angreifenden parallelen Kräfte

$$\frac{1}{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right) \cdot d\varphi$$

zu bestimmen. Die Mittelkraft M oder die Lichtstärke der Mischung ergibt sich, wenn man vorstehenden Ausdruck über den ganzen Kreisumfang (von 0 bis 2π) integrirt:

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right) \cdot d\varphi,$$

und die Coordinaten x und y ihres Angriffspunktes (Schwerpunktes) ergeben sich aus den Formeln:

1) Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, p. 277. Leipzig, 1867.

$$Mx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right) \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$My = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right) \sin \varphi \, d\varphi.$$

Der Winkel φ des Radius, auf welchem dieser Punkt liegt, mit dem Anfangsradius, oder das Azimut des Farbentons der Mischung wird alsdann bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{\int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right) \sin \varphi \, d\varphi}{\int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right) \cos \varphi \, d\varphi},$$

wodurch vermöge der Beziehung

$$\frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{2\pi} \varphi$$

auch sofort die Wellenlänge dieses Farbentons bekannt ist. Die Strecke r endlich, um welche der Schwerpunkt von dem Centrum des Kreises absteht, oder das Sättigungsverhältniss wird gegeben durch:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{y}{\sin \varphi}.$$

Als nächstliegendes Beispiel mögen die Farben dünner Krystallblättchen dienen. Der Intensitätsausdruck ist in diesem Falle bei gekreuzten Polarisationssebenen, wenn von der Dispersion abgesehen wird:

$$\sin^2 \frac{2\pi d}{\lambda}$$

und bei parallelen Polarisationssebenen:

$$\cos^2 \frac{2\pi d}{\lambda}$$

wenn unter d die Dicke der Luftschicht verstanden wird, welche der durch den Krystall hervorgebrachten Verzögerung entspricht. Dieselben Ausdrücke gelten übrigens angenähert auch für die Farben dünner

isotroper Blättchen resp. im reflectirten und im durchgelassenen Licht, also für die Newton'schen Farbenringe.

Im ersteren Falle hat man:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \left[\pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi \right) \right] \cdot d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos 2\pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi \right) \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\pi d(a+b) - \sin 2\pi da}{2\pi bd} \right), \end{aligned}$$

oder:

$$M = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \pi d(2a+b) \cdot \frac{\sin \pi bd}{\pi bd} \right).$$

Es ist ferner:

$$\begin{aligned} Mx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi \right) \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos \varphi - \cos 2\pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi \right) \cdot \cos \varphi \right) d\varphi \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cos(2\pi da - (1-bd)\varphi) + \cos(2\pi da + (1+bd)\varphi) \right] d\varphi \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\sin(2\pi d(a+b) - 2\pi) - \sin 2\pi da}{1-bd} - \frac{\sin(2\pi d(a+b) + 2\pi) - \sin 2\pi da}{1+bd} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} (\sin 2\pi d(a+b) - \sin 2\pi da) \left(\frac{1}{1-bd} - \frac{1}{1+bd} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cos \pi d(2a+b) \sin \pi bd \cdot \frac{bd}{1-b^2d^2}. \end{aligned}$$

Berechnet man in ähnlicher Weise My , so hat man schliesslich:

$$M_x = \frac{1}{2\pi} \cos \pi d (2a + b) \sin \pi b d \cdot \frac{bd}{1 - b^2 d^2},$$

$$M_y = -\frac{1}{2\pi} \sin \pi d (2a + b) \sin \pi b d \cdot \frac{1}{1 - b^2 d^2}.$$

Das Azimut φ der Mischfarbe wird demnach gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{tg} \pi d (2a + b)}{bd}.$$

Für die complementäre Erscheinung bei parallelen Polarisations-ebenen hat man, wenn man die analogen Grössen mit Accenten bezeichnet, augenscheinlich:

$$\begin{aligned} M' &= 1 - M, & M' x' &= -M x, & M' y' &= -M y, \\ \operatorname{tg} \varphi' &= \operatorname{tg} \varphi, & \sin \varphi' &= -\sin \varphi, & \cos \varphi' &= -\cos \varphi. \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen und insbesondere durch die einfache Formel:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{tg} \pi d (2a + b)}{bd}$$

ist nun das Gesetz der Farbenfolge ausgedrückt.

Fasst man zunächst den Fall gekreuzter Polarisations-ebenen in's Auge, so erkennt man, dass das Azimut φ der Mischfarbe von einem Grenzwerthe φ_0 für $d = 0$, der durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\pi \cdot \frac{2a + b}{b}$$

bestimmt wird, und in den vierten Quadranten des Farbkreises fällt (da, wie wir später zeigen werden, $\cos \varphi_0$ positiv, $\sin \varphi_0$ negativ ist), bei wachsendem d abnimmt, und Null wird, wenn

$$\pi d (2a + b) = 2\pi$$

geworden ist. Von hier an kehren die Farbentöne, abgesehen von Sättigung und Lichtstärke, in derselben Ordnung wieder und durchlaufen die ganze Farbenskala jedesmal, wenn $\pi d (2a + b)$ um 2π wächst, und jede solche Farbenreihe oder „Ordnung“ endigt mit dem nämlichen dem Azimute Null zugehörigen Farbenton. Bezeichnen wir den Werth von d , welcher der vorstehenden Gleichung genügt, mit 2δ , so tritt dieser Farbenton, mit welchem jede Farbenordnung schliesst und die folgende

beginnt, ein für $d = 2\delta, 4\delta, 6\delta \dots$, und der complementäre im Azimute $\varphi = \pi$ wiederholt sich jedesmal, wenn $d = \delta, 3\delta, 5\delta \dots$ wird. Ebenso wiederholt sich die dem Azimut $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ entsprechende Farbe bei $d = \frac{1}{2}\delta, \frac{5}{2}\delta, \frac{9}{2}\delta \dots$, und die zugehörige Ergänzungsfarbe im Azimute $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, wenn $d = \frac{3}{2}\delta, \frac{7}{2}\delta, \frac{11}{2}\delta \dots$ wird.

Die Grösse 2δ ist hienach diejenige Dicke der Luftschicht, mit welcher die Reihe der Farben erster Ordnung endigt und diejenige zweiter Ordnung beginnt. Diese Luftdicke ist aber aus der Erfahrung bekannt; sie beträgt 550,6 Milliontel Millimeter, und ist gleich der Wellenlänge derjenigen Stelle im Spectrum, welche unserem Auge am hellsten erscheint.

Hiedurch ist aber die bisher unbestimmt gelassene Constante a ebenfalls gegeben, denn nach obiger Gleichung muss

$$2a + b = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{275,3} = 0,0036324$$

und demnach, da $b = 0,00101636$ bereits gefunden ist,

$$a = 0,0013080$$

sein.

Nachdem nun in der Gleichung

$$\frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{2\pi} \varphi$$

die beiden Constanten

$$a = 0,0013080$$

$$b = 0,0010164$$

bekannt sind, ist es leicht, die Stellen anzugeben, welche die Fraunhofer'schen Linien auf dem Umfang des Farbenkreises einnehmen, indem man zu jeder Wellenlänge λ das zugehörige Azimut φ berechnet. Man findet so:

	λ	φ
A	760,4	2° 31'
a	718,3	29 49
B	686,7	52 30
C	656,2	76 28
D	589,6	137 28

	λ	φ
<i>E</i>	526,9	208 57
<i>b</i>	518,3	220 40
<i>F</i>	486,1	265 24
<i>G</i>	430,7	359° 3
<i>H</i>	396,8	360° + 69 20

Aus derselben Gleichung ergeben sich für die Hauptazimute

$$\varphi = 0; \frac{1}{2}\pi; \pi; \frac{3}{2}\pi; 2\pi$$

der Reihe nach die Wellenlängen

$$\lambda = 764,5; 640,2; 550,6; 483,0; 430,2.$$

Die Farbenreihe des Kreises beginnt, wie man sieht, bei $\varphi = 0$ mit dem äussersten Roth und endigt bei $\varphi = 360^\circ$ mit dem Anfang des Violett, und das Violett selbst legt sich, aus dem vierten in den ersten oder fünften Quadranten hinübergreifend, über den Anfang des Roth. Dieses Verhalten deutet darauf hin, dass in diesem den beiden Endfarben des Spectrums gemeinsamen Gebiete die purpurnen Farbentöne Platz zu finden haben, welche zu den gegenüberliegenden grünen complementär sind. Ergibt sich bei Berechnung eines Farbungemisches ein in diese Region fallendes Azimut, so ist die Mischfarbe als Purpur zu bezeichnen.

Will man den Farbenkreis in Sektoren theilen, welche den Farbeindrücken auf unser Auge entsprechen, so dürfte die folgende Eintheilung die passendste sein, welche mit der von v. Bezold¹⁾ gewählten sowohl in der Benennung der Farben als auch in der Breite der zugehörigen Sektoren übereinstimmt.

	φ	λ
Purpurviolett	0° — 20°	765—733 ; 430—420
Purpur	20 — 38	733—707 ; 420—411
Carmin	38 — 58	707—679 ; 411—402
Hochroth	58 — 80	679—652
Orange	80 — 108	652—620
Gelb	108 — 140	620—587
Gelbgrün	140 — 180	587—551

1) v. Bezold l. c.

	φ	λ
Grün	180—238	551—505
Blaugrün	238—278	505—478
Cyanblau	278—310	478—458
Ultramarin	310—338	448—442
Blauviolett	338—360	442—430

Den Purpurtönen (Purpurviolett, Purpur, Carmin), welchen in unserem Farbenkreis je zwei Wellenlängen (Roth und Violett) entsprechen, liegt das complementäre Grün diametral gegenüber. Statt der Newton'schen Bezeichnung „Indigo“ ist die Benennung „Ultramarin“ gewählt, nach dem Farbstoff, welcher den in dieser Region herrschenden Farbenton am richtigsten wiedergibt. Selbstverständlich können die angenommenen Farbengrenzen nicht als absolut feste angesehen werden, da die Farben allmählig in einander übergehen, und unser Urtheil namentlich an den Grenzen unsicher ist und ausserdem noch von der Helligkeit beeinflusst wird. Für eine bestimmte mittlere Helligkeit aber dürfte die Eintheilung angenähert richtig sein.

Führen wir in unsere Formeln die Grösse δ ein, d. i. die halbe Wellenlänge der hellsten Stelle des Spectrums, so lauten dieselben (für gekreuzte Polarisations Ebenen):

$$M = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi d}{\delta} \cdot \frac{\sin \pi b d}{\pi b d} \right),$$

$$Mx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{b d}{1 - b^2 d^2} \cdot \cos \frac{\pi d}{\delta} \sin \pi b d,$$

$$My = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 - b^2 d^2} \cdot \sin \frac{\pi d}{\delta} \sin \pi b d.$$

Die Coordinaten x und y entsprechen den Punkten einer Curve, die in ihrem Verlaufe auf der Farbentafel die Farbenfolge versinnlicht, indem ihr Radiusvector:

$$r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \pi b d}{1 - b^2 d^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - (1 - b^2 d^2) \cos^2 \frac{\pi d}{\delta}}}{1 - \cos \frac{\pi d}{\delta} \cdot \frac{\sin \pi b d}{b d}},$$

welcher vermöge der Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\operatorname{tg} \pi d \delta^{-1}}{b d},$$

als Function des Polarwinkels φ anzusehen ist, bei wachsender Dicke (d) der Luftschicht in rückläufiger Bewegung den Umkreis durchläuft, durch seine Richtung den Farbenton, durch seine Länge den Sättigungsgrad der Mischfarbe angibt, und für $d = 2\delta, 4\delta, 6\delta \dots$ im Azimute $\varphi = 0$ jedesmal die Grenze einer Farbenordnung überschreitet.

Für $d = \frac{2n+1}{2}\delta$ ist stets $M = \frac{1}{2}$ und $x = 0$, das Azimut φ sonach $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ je nachdem y positiv oder negativ ist. Da in diesem Falle wegen $M' = M$ auch $y' = -y$ und $r' = r$ ist, so sind hier die complementären Farbtöne bei gleicher Lichtstärke auch von gleicher Sättigung.

Wird die Dicke d oder der Gangunterschied unendlich klein, so verschwindet zwar die Lichtstärke M und wird Null für $d = 0$; die Farbe aber nähert sich einer bestimmten Grenze, und erreicht dieselbe, wie oben bereits erwähnt wurde, in dem Azimut

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{\pi}{bd},$$

indem die Coordinaten und der Radiusvector für $d = 0$ die Grenzwerte:

$$x_0 = \frac{6b^2\delta^2}{\pi^2(b^2\delta^2 + 3)}, \quad y_0 = -\frac{6b\delta}{\pi(b^2\delta^2 + 3)}, \quad r_0 = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{6b\delta}{b^2\delta^2 + 3} \sqrt{\pi^2 + b^2\delta^2}$$

annehmen. Von diesem Punkte, welcher, da x_0 positiv, y_0 negativ ist, im vierten Quadranten liegt, geht die Farbencurve aus.

Für die von uns angenommenen Werthe der Constanten b und δ ergibt sich:

$$x_0 = 0,015462 \quad y_0 = -0,173599, \quad r_0 = 0,174286,$$

$$\varphi_0 = 360^\circ - 84^\circ 54' 37''$$

und als Wellenlänge der Grenzfarbe:

$$\lambda_0 = 479,7 \text{ (Cyanblau)}$$

statt welcher jedoch, da die Lichtstärke $M = 0$ ist, Schwarz gesehen wird.

Bei der complementären Erscheinung nähert sich mit verschwindendem d das Azimut dem von dem vorigen um 180° verschiedenen Grenzwert:

$$\varphi'_0 = 180^\circ - 84^\circ 54' 37''$$

und der Farbenton dem complementären Orange von der Wellenlänge

$$\lambda'_0 = 634,4,$$

welche Farbe jedoch ebenfalls nicht gesehen wird. Denn da jetzt $x' = 0$, $y' = 0$ und $M' = 1$ ist, so wird die Mischfarbe bei voller Lichtstärke reines Weiss, und die complementäre Farbencurve beginnt im Mittelpunkt des Kreises.

Wenn $\pi b d = 2\pi, 3\pi, 4\pi \dots$ oder $d = 2/b, 3/b, 4/b \dots$ wird, so verschwinden x und y gleichzeitig, und die Lichtstärken M und M' werden gleich $\frac{1}{2}$; die Curve geht alsdann in beiden Fällen durch den Mittelpunkt des Kreises oder durch Weiss.

Ist $b d = 1$ oder $d = 1/b$, so wird zwar ebenfalls $M = M' = \frac{1}{2}$, dagegen hat man jetzt, weil für $b d = 1$

$$\frac{\sin \pi b d}{1 - b^2 d^2} = \frac{\pi}{2}$$

ist:

$$x = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{b\delta}, \quad y = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b\delta}, \quad r = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{b\delta} = \operatorname{tg} \varphi',$$

$$x' = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{b\delta}, \quad y' = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b\delta}, \quad r' = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 4\pi - \frac{\pi}{b\delta}, \quad \varphi' = 5\pi - \frac{\pi}{b\delta},$$

$$\lambda = \frac{2}{3b}, \quad \lambda' = \frac{1}{2b},$$

und numerisch, da

$$\frac{\pi}{b\delta} = 11,22780 = 4\pi - 76^\circ 41' 40''$$

ist:

$$\varphi = 76^\circ 41' 40'', \quad \lambda = 656 \text{ (Hochroth bei } C)$$

und für die complementäre Erscheinung:

$$\varphi' = 256^\circ 41' 40'' \quad \lambda' = 492 \text{ (Blaugrün).}$$

Mit unbegrenzt wachsender Dicke nähert sich die Lichtstärke dem Werthe $\frac{1}{2}$, mit immer kleiner werdenden Schwankungen ober- und unterhalb dieses Werthes, und der Farbenton nähert sich dem Weiss, da ersichtlich sowohl x als y mit zunehmendem d gegen Null rücken.

Die Geschwindigkeit, mit welcher bei gleichmässigem Anwachsen der Dicke d des Blättchens der Farbenton sich ändert, wird ausgedrückt durch den Differentialquotienten:

$$\frac{\delta \varphi}{\delta d} = -b \cdot \frac{\pi d \delta^{-1} - \frac{1}{2} \sin 2\pi d \delta^{-1}}{\sin^2 \pi d \delta^{-1} + b^2 d^2 \cos^2 \pi d \delta^{-1}}.$$

Hieraus ergibt sich in den Hauptazimuten $\varphi = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

$$\text{für } d = (n+1)\delta: \quad \frac{\delta \varphi}{\delta d} = -\frac{\pi}{(n+1)b\delta^2},$$

$$\text{für } d = \frac{2n+1}{2}\delta: \quad \frac{\delta \varphi}{\delta d} = -\frac{2n+1}{2}b\pi$$

und in Zahlen:

d	$\frac{\delta \varphi}{\delta d}$	d	$\frac{\delta \varphi}{\delta d}$
$\frac{1}{2}\delta$	-0,001597	δ	-0,040784
$\frac{3}{2}\delta$	0,004790	2δ	0,020392
$\frac{5}{2}\delta$	0,007983	3δ	0,013595
$\frac{7}{2}\delta$	0,011176	4δ	0,010196
$\frac{9}{2}\delta$	0,014369		

Man ersieht aus dieser kleinen Tabelle, dass in den niedrigeren Farbenordnungen der Farbenwechsel in den Azimuten $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ weit rascher erfolgt als in den zwischen liegenden Azimuten $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$, bei gleicher Zunahme von d ; d. h. das Purpurviolett und das hiezu complementäre Gelbgrün sind, in den niedrigeren Ordnungen, „empfindliche Farben“ oder „Uebergangsfarben,“ welche bei geringer Aenderung des Gangunterschiedes sich am raschesten ändern. Die Maxima der Empfindlichkeit oder der Geschwindigkeit $\delta\varphi/\delta d$ fallen übrigens nicht genau mit den Hauptazimuten $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ zusammen: es tritt ein solches z. B. nicht genau bei $d = 2\delta$, sondern wenig davon abweichend bei $d = 2\delta - \frac{1}{15}\delta$ oder bei $\varphi = 7^\circ 12'$ im Purpurviolett ein, und beträgt daselbst:

$$\frac{\delta \varphi}{\delta d} = -0,020625.$$

Um unsere Theorie mit den Beobachtungen zu vergleichen, berechnen wir die Farbenskala, welche von Billet¹⁾ nach Beobachtungen von Brücke²⁾ zusammengestellt worden ist.

1) Billet, *Traité d'Optique physique*, T. I, p. 490. 1858.

2) Brücke, *Pogg. Ann.* Bd. LXXXIV.

Die Rechnung nimmt dabei folgenden Gang. Aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\operatorname{tg} \pi d \delta^{-1}}{b d}$$

bestimmt sich sofort für jede gegebene Luftdicke d das Azimut φ , welches auf dem Farbenkreise (falls man nur noch die leicht ersichtlichen Vorzeichen von x und y berücksichtigt) die zugehörige Mischfarbe unmittelbar angibt. Will man daher bloß den Farbenton der Mischung finden, so genügt diese einzige Gleichung, welche eine fast mühelose Rechnung gestattet. Hiemit ist das anmuthige Farbenspiel der Seifenblasen in die knappe Formel eines einfachen Gesetzes gefasst.

Die der Mischfarbe zugehörige Wellenlänge ergibt sich alsdann aus der Gleichung:

$$\frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{2\pi} \varphi.$$

Setzt man nun, behufs bequemer logarithmischer Rechnung,

$$\cos \frac{\pi d}{\delta} \cdot \frac{\sin \pi b d}{\pi b d} = \cos \psi,$$

so ist die Lichtstärke:

$$M = \sin^2 \frac{1}{2} \psi$$

und der Sättigungsgrad r bestimmt sich mittels der Gleichung:

$$Mr = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 d^2}{1 - b^2 d^2} \cdot \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}.$$

Hiedurch sind aber auch die entsprechenden Grössen für die complementäre Erscheinung sofort gegeben; denn man hat:

$$\varphi' = \varphi \pm \pi, \quad \frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda} \pm \frac{b}{2},$$

$$M' = 1 - M = \cos^2 \frac{1}{2} \psi,$$

$$M'r' = Mr \text{ oder } r' = r \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \psi.$$

Die bei der Rechnung zu benutzenden Constanten sind, wie oben bereits angegeben:

$$a = 0,0013080, \quad b = 0,0010164, \quad \delta = 275,3.$$

Die Ergebnisse der Rechnung sind in der am Schlusse folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Ueberschriften „Anfang schwarz“ und

„Anfang weiss“ entsprechen resp. der Erscheinung bei gekreuzten und bei parallelen Polarisations Ebenen, oder den Farbenringen mit schwarzer und mit weisser Mitte. Die Columne d enthält die gemessenen Werthe der Luftdicke oder des Gangunterschiedes, wobei noch die Vielfachen der Grösse δ , die in der Anordnung der Farbenreihe eine so wichtige Rolle spielt, angegeben sind, die Columnen „Farbe beobachtet“ enthalten die zugehörigen von Brücke¹⁾ beobachteten Farbentöne. Unter φ steht, für die erste Erscheinung, das berechnete Azimut der Mischfarbe; das Azimut φ' für die complementäre Erscheinung ist nicht angegeben, da es sich von φ stets um π unterscheidet und somit durch die Angabe von φ bereits bestimmt ist. Die Columnen λ und λ' enthalten die berechneten Wellenlängen der Mischfarben. Die Lichtstärken M und M' und die Sättigungsverhältnisse r und r' sind in Procenten angegeben, d. i. auf 100 als Einheit bezogen. Die Rubriken „Farbe berechnet“ benennen die Farben nach ihrer Lage auf unserem Farbenkreise, ohne Rücksicht auf Lichtstärke und Sättigung, welche beiden Umstände noch mitberücksichtigt werden müssen, wenn der wirklich wahrgenommene Farbenton beurtheilt werden soll. So ist z. B. für $d=0$ der Lichteindruck in Wirklichkeit nicht Grünblau (die oben berechnete Grenzfarbe), sondern Schwarz, weil die Lichtstärke $M=0$ ist, und für die complementäre Erscheinung nicht Orange, sondern Weiss, weil die Sättigung $r=0$ ist. Ebenso ist für $d=234$ die Mischfarbe ihrem Orte in der Farbentafel nach Grün, jedoch von geringer Sättigung ($r=6\%$) und grosser Lichtstärke ($M=91\%$). Die hiezu complementäre Farbe ist nach ihrer Lage im Farbenkreise Hochroth, jedoch von geringer Lichtstärke ($M'=9,5\%$) und hohem Sättigungsgrad ($r'=61\%$). Die Rechnung stimmt sonach auch hier mit der Erfahrung vollkommen überein, denn das schwach gesättigte lichtstarke Grün ist in der That „Grünlichweiss“, und das stark gesättigte lichtschwache Roth ist „Braun,“ wie die Beobachtung fordert. Berücksichtigt man in dieser Weise zu jeder berechneten Farbe die zu-

1) Von den Farbenbenennungen Billet's habe ich nur eine abgeändert, beziehungsweise nach Brücke's Beobachtungen richtig gestellt. In der Farbenreihe mit weissem Anfang ist nämlich bei $d=259$ in der Billet'schen Tabelle „Rouge clair“ oder „Hellroth“ angegeben. Brücke hat aber an dieser Stelle nur dunkelrothe Farbentöne beobachtet. Dass letztere Angabe richtig ist, zeigt ein Blick in den Polarisationsapparat auf eine keilförmige Gypsplatte. Auch das darauffolgende „Carminroth“ ist sehr dunkel.

gehörige Intensität und Sättigung, so ergibt sich eine sehr befriedigende Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung. Insbesondere stimmen auch die von Brücke beobachteten Maxima der Lichtstärke mit den Maximis unseres Ausdruckes M genau überein. Derselbe findet nämlich die hellste Stelle in der ersten Farbenordnung (Anfang Schwarz) bei dem Uebergang des Weiss zum blassen Strohgelb, und die hellste Stelle der zweiten Ordnung beim Uebergang des Hellgrün zum Gelblichgrün.

Auf der Tafel I sind die beiden Farbencurven mit den Radienvektoren r und r' nach den Daten dieser Tabelle in den Farbkreis eingezeichnet; diejenige für gekreuzte Polarisations Ebenen ist ausgezogen, die complementäre für parallele Polarisations Ebenen punktirt. Am Rande des Farbkreises sind die Bezeichnungen der Farbensectoren nach von Bezold und die Lagen der Fraunhofer'schen Linien angegeben. Die Azimute der zu einander complementären Grenzfarben Orange und Grünlich-Blau werden durch den punktirten Durchmesser angezeigt.

Auf diesem Durchmesser liegt, nahe der Grenze zwischen Blaugrün und Cyanblau, der oben bestimmte Punkt, von welchem die erstere Curve ausgeht, wenn der Gangunterschied von Null an zunimmt. Sie nähert sich von hier aus fast geradlinig dem Weiss, und geht auf der grünen Seite sehr nahe daran vorüber; das Weiss erster Ordnung erscheint in der That sehr schwach grünlich. Die Curve geht sodann mit rasch wachsender Sättigung durch Gelb, Orange und Roth und erreicht im Carmin den höchsten Sättigungsgrad, worauf sie rasch durch Purpur und die erste Uebergangsfarbe hindurch das Ende der ersten Farbenordnung erreicht. In der zweiten Ordnung geht die Curve bald durch ein stark gesättigtes Blau, im Grün jedoch wird die Farbe wieder schlechter, das Grün zweiter Ordnung ist matt; dafür aber übertrifft das Gelb zweiter Ordnung dasjenige der ersten an Reinheit, wogegen die rothen Farbtöne hier hinter denjenigen der ersten Ordnung an Tiefe der Sättigung zurückbleiben. Die Curve gelangt sodann durch die zweite Uebergangsfarbe hindurch zum Ende der zweiten Farbenordnung. Das Blau der dritten Ordnung ist viel matter als dasjenige zweiter, die Farbe bessert sich schon im Blaugrün, und erreicht ihre höchste Reinheit im Grün, welches dem Grün zweiter Ordnung an Schönheit weit überlegen ist. Dagegen ist das Gelb dritter Ordnung nicht so rein wie dasjenige erster und

zweiter Ordnung; die Sättigung nimmt noch ab im Roth, wird aber im Purpur gegen Ende der Ordnung wieder etwas vollkommener. In der vierten Ordnung nähert sich die Curve, nachdem sie mit abnehmender Färbung Blau und Grün durchlaufen, rasch dem Weiss.

Die Curve gibt nur den Sättigungsgrad der Mischfarben an, nicht aber ihre Lichtstärke, auf welche doch, wie oben bereits gezeigt wurde, bei Beurtheilung des Farbentons ebenfalls Rücksicht zu nehmen ist. Man könnte sich, um das Diagramm nach dieser Richtung zu vervollständigen, die Intensität als dritte Coordinate in dem zugehörigen Curvenpunkte auf der Ebene der Farbentafel senkrecht errichtet denken, und dieselbe etwa durch Schattenconstruction in derselben Zeichnung ersichtlich machen, welche hiedurch freilich sehr verwickelt würde. Man kann aber auch die Lichtstärke M als zum Polarwinkel φ gehörigen Radiusvector auffassen, und den Gang der Intensität wie jenen der Sättigung durch eine in dem Farbenkreise verlaufende Curve veranschaulichen, wie dies auf Taf. II geschehen ist, wo die ausgezogene Curve für die Lichtstärke bei gekreuzten, die punktirte bei parallelen Schwingungsebenen gilt.

Unter Mitberücksichtigung der Intensität ergibt sich z. B., dass das Roth erster Ordnung, obwohl gesättigter als das Roth der zweiten Ordnung, dennoch wegen seiner geringen Lichtstärke im Vergleich mit letzterem ziemlich unscheinbar sein muss. Blau und Gelb der zweiten Ordnung und Grün der dritten Ordnung vereinigen einen beträchtlichen Sättigungsgrad mit grosser Lichtstärke, und erscheinen daher als reine und glänzende Farben.

Die mit Weiss im Mittelpunkt des Kreises beginnende Farbencurve der complementären Erscheinung geht zuerst mit geringer Sättigung und grosser Lichtstärke durch die Grenzfarbe Orange rasch in Roth über; auch hier zeigt sich das Roth erster Ordnung gesättigter als dasjenige zweiter, und übertrifft hierin sogar noch das Roth der ersten Ordnung im vorigen Fall, bleibt jedoch wegen sehr geringer Lichtstärke an Glanz hinter dem Roth zweiter Ordnung zurück, welches bei etwas geringerer Reinheit hinreichende Intensität besitzt. Das Blau zweiter Ordnung ist stark gesättigt, aber viel dunkler als das schöne Blau der dritten Ordnung, und das Grün letzterer Ordnung wetteifert an Lichtstärke und Reinheit mit dem Grün gleicher Ordnung im vorigen Fall. Durch Rein-

heit zeichnen sich noch aus das Gelb und Orange der zweiten, und das Grün der vierten Ordnung, welches der entsprechenden Farbe der vorigen Reihe überlegen ist. Im Ganzen zeigt übrigens diese Farbenfolge einen ähnlichen Verlauf wie die vorige.

Bemerkenswerth sind noch die Durchschnittspunkte einer jeden der beiden Farbencurven, welche zeigen, dass man denselben Farbenton von gleicher Sättigung bei zwei verschiedenen Gangunterschieden erhalten kann. Bei der ersteren Curve gehört der erste Durchschnittspunkt, nahe der Grenze zwischen Roth und Orange, der ersten und zweiten Farbenordnung an; ein Blick auf die Tafel II ergibt, dass diese Farbe in der zweiten Ordnung heller ist. Die zweite und dritte Ordnung zeigen zwei solche Durchschnittspunkte, den einen im Blau, den anderen im Gelbgrün, mit geringem Unterschied in der Helligkeit. Bei der zweiten Farbencurve liegt ein den beiden ersten Ordnungen gemeinsamer Punkt im Roth, mit grösserer Lichtstärke in der zweiten Ordnung. In der zweiten und dritten Ordnung finden sich zwei Durchschnittspunkte, im Blau, dunkler in der zweiten, hell in der dritten, und im Gelb, hell in der zweiten, dunkler in der dritten Ordnung; ferner gibt es noch zwei der zweiten und der vierten Ordnung gemeinschaftliche Punkte im Blaugrün und Gelbgrün, beide mit grösserer Lichtstärke in der zweiten Ordnung.

Derselbe Gang der Rechnung und Discussion findet Anwendung auf jede Lichterscheinung, für welche der Intensitätsausdruck als Function der Wellenlänge gegeben ist; nur werden die Integrationen nicht immer so einfach auszuführen sein, wie in dem mitgetheilten Beispiel der Farben dünner Blättchen. Für die Beugungerscheinung eines engen Spaltes z. B. hat man:

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\sin^2 \pi \beta \sin \chi \lambda^{-1}}{(\pi \beta \sin \chi \lambda^{-1})^2},$$

wenn β die Breite des Spaltes, χ den Beugungswinkel, folglich $\beta \sin \chi = d$ den Gangunterschied der Randstrahlen bezeichnet.

Die Integrale:

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right)}{\left(\pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right)\right)^2} d\varphi,$$

$$M_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right)}{\left(\pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right)\right)^2} \cos \varphi d\varphi,$$

$$M_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right)}{\left(\pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right)\right)^2} \sin \varphi d\varphi$$

führen alsdann auf die transcendenten Functionen Integralsinus und Integralcosinus, und lassen sich mit Hilfe von Tabellen dieser Functionen leicht berechnen. Ohne für jetzt auf diese Rechnungen ausführlich einzugehen, beschränken wir uns darauf, die Mischfarbe zu ermitteln für den Fall, dass πd sehr klein ist. Entwickelt man den Intensitätsausdruck in eine convergente nach Potenzen von d fortschreitende Reihe und bleibt bei der zweiten Potenz von d stehen, so wird:

$$\frac{\sin^2 \pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right)}{\left(\pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right)\right)^2} = 1 - \frac{\pi^2 d^2}{3} \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right)^2 = 1 - \frac{\pi^2 d^2}{3} \left(a^2 + \frac{ab}{\pi} \varphi + \frac{b^2}{4\pi^2} \varphi^2\right).$$

Da nun

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi &= 0, & \int_0^{2\pi} \varphi \cos \varphi d\varphi &= 0, & \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos \varphi d\varphi &= 4\pi, \\ \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi &= 0, & \int_0^{2\pi} \varphi \sin \varphi d\varphi &= -2\pi, & \int_0^{2\pi} \varphi^2 \sin \varphi d\varphi &= -4\pi^2 \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich:

$$M = 1 - \frac{\pi^2 d^2}{3} \left(a^2 + ab + \frac{1}{3} b^2\right) = 1 - \frac{\pi^2 d^2}{36 \delta^2} (b^2 \delta^2 + 3),$$

$$M_x = -\frac{1}{6} b^2 d^2,$$

$$M_y = \frac{1}{6} \pi b d^2 (2a + b) = \frac{\pi b d^2}{6 \delta}.$$

Demnach nähert sich das Azimut der Mischfarbe mit verschwindendem Gangunterschied, d. h. wenn entweder der Beugungswinkel oder die Breite des Spaltes immer kleiner wird, einem Grenzwerte φ_0 , welcher durch dieselbe Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{\pi}{b\delta}$$

bestimmt wird, welche wir bei den Farben dünner Blättchen bereits gefunden haben. Da x unmittelbar vor dem Verschwinden von d negativ, y positiv ist, so ist diese Grenzfarbe das oben schon erwähnte Orange $\lambda = 634$. Für $d = 0$ selbst wird sowohl x als y und somit auch die Sättigung Null, und $M = 1$; es herrscht also in der Mitte der Erscheinung reines Weiss mit voller Lichtstärke, welches nach beiden Seiten hin in das Grenz-Orange übergeht.

Es leuchtet übrigens ein, dass dieselbe Grenzfarbe jedesmal auftreten muss, wenn der Intensitätsausdruck sich in eine Reihe von der Form

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - A\frac{d^2}{\lambda^2} + B\frac{d^4}{\lambda^4} - \dots$$

entwickeln lässt, wo A , B u. s. f. positive Constante sind. Denn man hat alsdann:

$$M = 1 - Ad^2\left(a^2 + ab + \frac{1}{3}b^2\right) = 1 - \frac{Ad^2}{12\delta^2}(b^2\delta^2 + 3),$$

$$Mx = -\frac{Ab^2d^2}{2\pi^2},$$

$$My = \frac{Abd^2}{2\pi}(2a + b) = \frac{Abd^2}{2\pi\delta}.$$

Nimmt dagegen der Intensitätsausdruck, in eine Reihe nach steigenden Potenzen des Gangunterschiedes entwickelt, die Form

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = A\frac{d^2}{\lambda^2} - B\frac{d^4}{\lambda^4} + \dots$$

an, so findet man:

$$M = \frac{Ad^2}{12\delta^2}(b^2\delta^2 + 3),$$

$$Mx = \frac{Ab^2d^2}{2\pi^2},$$

$$My = -\frac{Abd^2}{2\pi\delta};$$

in allen diesen Fällen also erlischt die Lichtstärke M mit verschwindendem Gangunterschied, die Coordinaten x und y aber und mit ihnen die Sättigung r convergiren gegen dieselben oben bereits gefundenen Grenzen:

$$x_0 = \frac{6b^2\delta^2}{\pi^2(b^2\delta^2+3)}, \quad y_0 = -\frac{6b\delta}{\pi(b^2\delta^2+3)}, \quad r_0 = \frac{6b\delta}{\pi^2(b^2\delta^2+3)}\sqrt{\pi^2+b^2\delta^2},$$

und die Grenzfarbe ist jetzt, da x_0 positiv und y_0 negativ ist, das zu jenem Orange complementäre Cyanblau $\lambda = 480$.

Die beiden complementären Grenzfarben bilden demnach eine Erscheinung von grosser Allgemeinheit, welche unter den verschiedensten Umständen immer in derselben Weise auftritt.

Insbesondere dürften auch die Farben trüber Mittel, das Blau im auffallenden, das Orange im durchfallenden Licht, die „Grundphänomene“ der Goethe'schen Farbenlehre, unseren beiden Grenzfarben entsprechen.

Nach der Theorie von Clausius¹⁾ wäre das Blau des Himmels nichts anderes als die Grenzfarbe Cyanblau mit der Wellenlänge 480, und nach meiner²⁾ Theorie der Abendröthe, welche dieselbe als Beugungserscheinung erklärt, entspricht die Grenzfarbe Orange mit der Wellenlänge 634 der Farbe des Abendroths.

1) Clausius, Die Lichterscheinungen der Atmosphäre (Grunert, Beiträge zur meteorologischen Optik), Leipzig, 1850.

2) Lommel, Grunert's Archiv, Bd. 36, 1861. Pogg. Ann. Bd. 131. 1867.

Die Farben dünner Blättchen.

Anfang schwarz.

Anfang weiss.

d	Farbe beobachtet	Farbe berechnet	φ	λ	r	M	M'	r'	λ'	Farbe berechnet	Farbe beobachtet	
0	Schwarz	Grünlichblau	$2\pi - 84^{\circ} 55'$	480	17,4	0	100	0	634	Orange	Weiss	
40	Eisengrau	Grünlichblau	$2\pi - 85$	16	480	17,1	5,2	94,8	0,9	635	Orange	Weiss
97	Lavendelgrau	Grünlichblau	$2\pi - 87$	11	481	15,7	28,0	72,0	6,1	637	Orange	Gelblichweiss
158	Blaugrau	Grünlichblau	$\pi + 87$	50	484	12,6	61,0	39,0	19,7	643	Orange	Bräunlichweiss
218	Hellgrau	Blaugrün	$\pi + 73$	52	494	7,9	86,6	13,4	50,6	659	Orangeroth	Gelbbraun
234	Grünlichweiss	Blaugrün	$\pi + 64$	59	500	6,3	90,5	9,5	60,6	671	Roth	Braun
259	Fast rein weiss	Grün	$\pi + 35$	34	522	4,3	93,7	6,3	63,8	710	Carmin	Dunkelroth
267	Gelblichweiss	Grün-Gelbgrün	$\pi + 19$	18	535	3,9	94,0	6,0	61,3	734	Purpur	Carminroth
δ 275	Strohgelb, blass	Gelbgrün	π		551	4,0	93,8	6,2	60,1	765	Purpurviolett	Braunr., fast schw.
281	Strohgelb	Grüngelb	$\pi - 12$	51	562	4,2	93,5	6,5	60,6	437	Blauviolett	Dunkelviolett
306	Hellgelb	Gelb	$\pi - 49$	36	597	7,3	89,8	10,2	64,8	458	Ultramarin	Indigo
332	Glänzendgelb	Gelb	$\pi - 65$	56	618	12,5	82,8	17,2	60,2	468	Cyanblau	Blau
430	Orangegelb	Orange	85	5	646	44,1	43,1	56,9	33,4	486	Grünblau	Grünlichblau
505	Röthlichorange	Carmin	48	9	693	62,5	23,1	76,9	18,7	512	Grün-Blaugrün	Bläulichgrün
536	Warmes Roth	Purpur	17	9	737	58,6	21,5	78,5	16,1	536	Grün	Blassgrün
2δ 551	Dunkleres Roth	Purpurviolett	0		765	57,8	22,1	77,9	16,3	551	Gelbgrün	Gelblichgrün
565	Purpur	Blauviolett	$2\pi - 16$	6	439	58,2	23,4	76,6	17,8	565	Gelbgrün	Hellgrün
575	Violett	Blauviolett	2π	26	444	59,0	24,7	75,3	19,4	574	Gelbgrün	Grünlichgelb
589	Indigo	Ultramarin	$2\pi - 38$	3	451	60,1	27,1	72,9	22,3	585	Gelbgrün-Gelb	Lebhaft gelb
664	Himmelblau	Cyanblau	$2\pi - 79$	9	476	54,9	44,5	55,5	44,0	628	Orange	Orange
728	Grünlichblau	Blaugrün	$\pi + 70$	10	496	43,1	56,9	43,1	56,8	664	Hochroth	Bräunlichorange
747	Grün	Grün	$\pi + 58$	57	504	40,0	58,9	41,1	57,4	678	Hochroth-Carm.	Hellcarminroth
3δ 826	Hellgrün	Gelbgrün	π		551	37,0	59,2	40,8	53,5	765	Purpurviolett	Purpur
843	Gelblichgrün	Gelbgrün	$\pi - 12$	59	562	38,8	57,9	42,1	53,4	437	Blauv.-Purpurv.	Violett purpur
866	Grünlichgelb	Gelbgrün	$\pi - 29$	14	577	42,0	56,0	44,0	53,4	446	Ultram.-Blauv.	Violett
910	Reines Gelb	Gelb	$\pi - 57$	4	604	48,0	52,3	47,4	52,7	462	Cyanbl.-Ultram.	Indigo
948	Orange	Orange	$\pi - 80$	12	629	50,4	50,3	49,7	51,1	477	Cyanblau	Dunkelblau
998	Lebh. röthlichor.	Hochroth	67	11	668	49,5	50,3	49,7	50,0	499	Blaugr.-Cyanbl.	Grünlichblau
4δ 1101	Dunkel violett.	Purpurviolett	0		765	46,7	55,2	44,8	57,6	551	Gelbgrün	Grün
1128	Hell bläulichv.	Blauviolett	$2\pi - 15$	24	438	45,6	55,9	44,1	57,8	564	Gelbgrün	Gelblichgrün
1151	Indigo	Ultramarin	$2\pi - 28$	38	446	44,2	55,8	44,2	55,9	576	Gelbgrün-Gelb	Unreines Gelb
1258	Grünlichblau	Blaugrün	$\pi + 74$	9	494	41,4	47,9	52,1	38,0	659	Hochroth	Fleischfarbe
1334	Meergrün	Grün	$\pi + 21$	14	533	54,0	40,7	59,3	37,0	731	Purpur	Roth
5δ 1376	Glänzendes Grün	Gelbgrün	π		551	56,4	39,2	60,8	36,3	765	Purpurviolett	Violett
1426	Grünlichgelb	Gelbgrün	$\pi - 23$	37	572	46,7	40,8	59,2	32,2	443	Ultramarin	Graublau
1495	Fleischfarbe	Orange	$\pi - 71$	21	619	26,2	47,7	52,3	23,9	471	Cyanbl.-Blaugr.	Meergrün
1534	Carminroth	Hochroth	70	14	664	21,7	52,3	47,7	23,7	496	Blaugrün	Schön Grün
1621	Matt Purpur	Purpurviolett	12	33	744	22,6	58,1	41,9	31,4	540	Grün	Matt Meergrün
6δ 1652	Violettgrau	Purpurviolett	0		765	21,4	58,0	42,0	29,6	551	Gelbgrün	Gelblichgrün
1682	Blaugrau	Blauviolett	$2\pi - 11$	52	437	18,9	56,9	43,1	25,0	561	Gelbgrün	Grünlichgelb
1711	Hell Grünlichbl.	Ultramarin	$2\pi - 24$	44	443	15,6	55,2	44,8	19,2	573	Gelbgrün-Gelb	Gelbgrau
1744	Bläulichgrün	Ultram.-Cyanbl.	$2\pi - 44$	40	455	11,4	52,9	47,1	12,8	592	Gelb	Malvenroth
1811	Schön Hellgrün	Blaugr.-Grün	$\pi + 65$	12	500	7,0	49,0	51,0	6,7	670	Hochroth	Carminroth
7δ 1927	Hell Graugrün	Gelbgrün	π		551	3,0	48,9	51,1	2,8	765	Purpurviolett	Grauroth



