Beweis,

dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \sum_{p=o}^{p=\infty} (a_p \cos. px + b_p \sin. px)$$

die Werthe

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)\,,\; a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \cos. p\alpha\,,\; b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \sin. p\alpha$$

haben, jedesmal wenn diese Integrale endlich und bestimmt sind.

Von

Paul du Bois-Reymond.

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W. II. Cl. XII. Bd. I. Abth.

München 1874.

Verlag der k. Akademie,

in Commission bei G. Franz.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

3A

Beweis,

dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos. px + b_p \sin. px)$$

die Werthe

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \ , \quad a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos. p\alpha \ , \quad b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin. p\alpha$$

haben, jedesmal, wenn diese Integrale endlich und bestimmt sind.

Von

Paul du Bois-Reymond.

I. Einleitung.

1. Der Begriff der gleichmässigen Convergenz.

Bekanntlich kann eine Reihe, deren Glied Function einer Veränderlichen x ist, für jeden besonderen Werth dieser Veränderlichen convergent sein, aber mit der Eigenthümlichkeit, dass die Convergenz bei Annäherung an einzelne Punkte des Intervalls sich ins Unbegrenzte verschlechtert, ohne dass, wie gesagt, für jene Punkte selbst berechnet, die Reihe sich divergent zeigte.

Wenn dieses von Herrn Seidel entdeckte Verhalten [1]) auf den ersten Blick den Eindruck einer etwas fernliegenden Ausnahme machen

1) Abhandlung der math. phys. Kl. d. Münchener Akademie, 1848. Herr Seidel weist dies Verhalten zunächst nach in Punkten, wo die durch die Reihe dargestellte Function eine sprungweise Werthänderung erleidet, und wo die Convergenz, wie er zeigt, stets unendlich

mag, so hat es sich in Wahrheit doch als ein ungemein wichtiges und folgenreiches erwiesen: denn es entspringt daraus sogleich der Begriff von der gleichmässigen oder nicht gleichmässigen Convergenz der Reihen. Unter der gleichmässigen Convergenz einer Reihe in einem Intervall $a \leq x \leq b$ ist verstanden, dass es eine endliche Gliederzahl N der Reihe gibt, die für jeden dem Intervall angehörigen Werth x einen Rest lässt, der kleiner ist als ein beliebig klein vorgeschriebener Werth.

Man kann wohl sagen, dass namentlich durch Betonung der Folgen dieses Begriffs Herr Weierstrass[2]) in den Theil der Lehre von den Reihen, der sich mit der Abhängigkeit ihrer Summe von den Argumenten ihrer Glieder beschäftigt, nicht minder tief und nachhaltig eingegriffen hat, als seiner Zeit Lejeune-Dirichlet in die Theorie der numerischen Reihen, indem er die Analysten auf den Unterschied zwischen der bedingten und unbedingten Convergenz aufmerksam machte.

2. Die Hauptsätze der Theorie der trigonometrischen Reihen durch Einführung jenes Begriffs in Frage gestellt.

Die überraschendste Folgerung, welche mit dem Begriff der gleichmässigen Convergenz zusammenhängt, ist die, dass eine Reihe, gliedweise integrirt, zuverlässig nur dann das Integral ihrer Summe liefert, wenn sie nicht in jedem kleinsten Intervall des Arguments einen Seidel'schen Punkt enthält, mit anderen Worten, wenn sie mit Ausnahme durch endliche Intervalle getrennter Punkte gleichmässig convergent ist.

---

langsam werden muss. Ich will ein Beispiel dafür angeben, dass dasselbe Verhalten bei einer durchweg stetigen Function eintreten kann. Die Reihe, deren $p$tes Glied, Summe bis zum $n$ten Gliede, Rest resp sind:

$$\frac{xp}{1+xp} - \frac{x(p-1)}{1+x(p-1)} = \frac{x}{x^2p^2+xp(2-x)+1-x}, \quad \frac{nx}{1+nx}, \quad \frac{1}{1+nx},$$

ist von mir schon früher angeführt worden (Antrittsprogr. pag. 25), um an ihr die unendliche Verschlechterung der Convergenz zu zeigen. Ihre Summe ist 1, ausgenommen für $x = o$, wo sie Null ist. Schreiben wir darin x^2 statt x und ziehen die ursprüngliche Reihe ab, so ist die Differenz für jeden Werth von x Null, und der Rest $\frac{1}{1+nx^2} - \frac{1}{1+nx}$ giebt $= \varepsilon$ gesetzt:

$$nx(1-x) = \varepsilon(1+nx)(1+nx^2)$$

wird hierin $x = o$, so muss n unendlich werden.

2) Eine gedruckte Mittheilung aus der Feder des Herrn Weierstrass existirt darüber wohl nicht, siehe aber: H. Heine, Borchardt's Journ. Bd. 71, pag. 353.

Ob dies der Fall sei, pflegt an der Reihe selbst nur sehr schwer sich feststellen zu lassen. So wurde denn zuerst die Theorie der trigonometrischen Reihen, bei welchen die gliedweise Integration eine grosse Rolle spielte und die für die directe Untersuchung der Art ihrer Convergenz fast unzugänglich zu sein scheinen, durch den neuen Begriff ins Herz getroffen, und zwar dergestalt, dass wir mit einem Schlage hinsichtlich der wichtigsten Sätze dieser Theorie wieder nicht allein hinter Dirichlet, sondern geradezu auf den Standpunkt vor Fourier zurückversetzt uns sahen.

3. Anführung der in Rede stehenden Hauptsätze.

Es handelt sich wesentlich um die Sätze:

I. Wenn eine trigonometrische Entwickelung von der Form

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos. px + b_p \sin. px)$$

gegeben ist, so giebt es keine zweite derselben Form, aber mit anderen Coefficienten a_p, b_p, welche in dem Intervall $(-\pi \ldots + \pi)$ die nämliche Function f(x) darstellte.

II. Die Coefficienten der Entwickelung lassen sich durch die Summe der Reihe ausdrücken wie folgt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \;,\; a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos. p\alpha \;,\; b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin. p\alpha \,,$$

jedesmal, wenn diese Ausdrücke einen Sinn haben.

Beide Sätze wurden durch gliedweise Integration der Reihe f(x) bewiesen und beiden war nun plötzlich der Boden entzogen.

4. Geschichtliches über die weitere Entwickelung der Lehre von den trigonometrischen Reihen. Der erste Hauptsatz wieder hergestellt.

Herr Heine suchte in einer Abhandlung[3]), in welcher er zuerst weitere mathematische Kreise über diese Lage der Dinge unterrichtete, den ersten Satz zu retten, was indessen kurz nachher in umfassenderem

3) Borchardt's Journ. Bd. 71, pag. 353.

Masse Herrn Cantor in Halle a. d. S. gelang, der jenen Satz von der „Eindeutigkeit der trigonometrischen Entwickelung" nicht allein in seinem früheren Umfange wieder herstellte, sondern ihm eine Allgemeinheit gab, an die man vor den angeführten Ereignissen nicht gedacht hatte[4]).

5. Fortsetzung.

Herr Cantor führt seinen Beweis mit Hülfe zweier Riemann'scher Sätze, die sich auf die Beziehung der Reihe

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2},$$

die durch zweimalige Integration jedes Gliedes der Reihe $f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + \ldots$ entsteht, zu dieser Reihe $f(x)$ beziehen[5]).

Der erste Satz besagt, dass so oft $f(x)$ endlich und bestimmt ist, der

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0} \frac{F(x+\varepsilon) - a F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

gleich $f(x)$ ist, und der zweite, dass falls nur a_p und b_p für $p = \infty$ verschwinden, der Limes des Verhältnisses

$$\frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

Null ist.

Den ersten Satz benutzt Herr Cantor um zu zeigen, dass die Differenz $\Phi(x)$ zweier Functionen $F(x)$, die denselben

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0} \frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

ergeben, nur eine lineäre Function von x sein kann, woraus sich leicht die Identität der Coefficienten a_p und b_p in beiden Entwickelungen $F(x)$ ergiebt.

Den Beweis dafür, dass die Differenz der Functionen $F(x)$ lineär von x abhängt, oder dass aus

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0} \frac{\Phi(x+\varepsilon) - 2\Phi(x) + \Phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0$$

---

4) Borchardt's Journ. Bd. 72, pag. 130, 139 und Bd. 73, pag. 294; ferner Ann. v. Clebsch u. Neumann Bd. 4, pag. 139, Bd. 5, pag. 123.

5) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Art. 8.

folgt $\Phi(x) = c + c_1 x$, verdanken wir, wie er mittheilt, Herrn Schwarz, und es ist zu bemerken, dass dieser Beweis, wenn gleich er einen Gedanken eines früheren Beweises benützt, doch Neues enthält, und namentlich Ungenauigkeiten des früheren Beweises vermeidet.[6]

Der zweite Riemann'sche Satz dient nach einem von Herrn Heine ersonnenen Verfahren[7] dazu, um zu zeigen, dass wenn die Differenz der Functionen F(x) in zwei durch einen Divergenzpunkt der Reihe f(x) getrennten Intervallen von x zwei linearen Functionen gleich ist, diese linearen Functionen dieselben sind.

6. Ueber den zweiten Hauptsatz. Der Verfasser kündigt an, dass er auch diesen wiederherzustellen vermag.

In Bezug auf den ersten Hauptsatz der Theorie der trigonometrischen Reihen können wir also die Untersuchung für geschlossen ansehen. Ueber den zweiten Satz, dass unter gewissen nothwendigen Bedingungen für f(x) die Coefficienten die von Fourier entdeckte Form haben, scheint seit der Heine'schen Abhandlung, die übrigens auf diese Frage nicht eingeht, keine Veröffentlichung erfolgt zu sein, so dass hier noch nichts geklärt ist.

Es ist mir schon seit längerer Zeit bekannt, dass auch der zweite Satz sich wiederherstellen lässt, wenn man f(x) der Bedingung unterwirft, stetig zu sein, ausgenommen in gesonderten Punkten.

Diese Bedingung für f(x) ist aber viel einschränkender, als die der Integrirbarkeit schlechthin, welche genügt, damit die Fourier'schen Coefficienten nicht sinnlos seien. Und die Aufgabe, welche hier unsere mathematische Wissbegierde am meisten reizt, ist doch die, festzustellen ob die Coefficienten der Reihe f(x) die Fourier'sche Form haben jedesmal, wenn f(x) eine Integration zulässt, oder zu ermitteln, wo hier die Grenze liegt.

---

6) Cours de calcul differentiel et intégral par J. A. Serret, pag. 17. Eine Function, die aufhört Null zu sein, braucht deshalb nicht sogleich ins Wachsen oder Abnehmen zu gerathen, sondern sie kann, wie $x \sin. \frac{1}{x}$ bei $x = o$ mit unendlich kleinen Schwankungen anfangen.

7) Borchardt's Journ. Bd. 71, pag. 359.

Nun, ich glaube jetzt auch diese Aufgabe erledigen zu können, und zwar auf die allgemeinste Weise. Etwas tieferes Eingehen in die Natur der durch Reihen dargestellten integrirbaren Functionen und eine den veränderten Bedingungen angemessene Erweiterung des Apparats von Lehrsätzen, dessen Herr Cantor sich bedient hat, führen schliesslich verhältnissmässig leicht zum Ziele.

Ich muss meiner Analyse einige Bemerkungen über allgemeine Eigenschaften der hier auftretenden Functionen voranschicken.

II. Vorbereitende Betrachtungen allgemeiner Natur.

7. Werthevorrath und mittlerer Werth.

Alle Werthe, welche man aus einer Operation f(x) ziehen kann, sei es indem man entweder für x eine Zahl x_1 einsetzt und dann $f(x_1)$ berechnet, oder indem man für x eine Folge $x_1 + \varepsilon', x_1 + \varepsilon'', \ldots$ dem x_1 sich unbegrenzt nähernder Zahlen einführt, dazu die Werthe $f(x_1 + \varepsilon')$, $f(x_1 + \varepsilon''), \ldots$ berechnet und nachsieht, welcher Grenze sie sich nähern: den Inbegriff aller solcher Werthe werde ich Werthevorrath von f(x) für den Punkt $x = x_1$ nennen. Unter Werthevorrath von f(x) für ein Intervall von x soll dann der Inbegriff der Werthevorräthe von f(x) für die einzelnen Punkte des Intervalls verstanden werden.

Mittlerer Werth eines Werthevorraths wird ein Werth genannt, von dem nichts weiter bekannt oder doch zu wissen nöthig ist, als dass er nicht grösser als der grösste und nicht kleiner als der kleinste Werth des Werthevorraths ist.

Die Functionen, mit denen wir es hier zu thun haben, sind Summen unendlicher Reihen, die zwar nicht durchweg convergent, aber — vor der Hand wenigstens — durchweg endlich sein müssen, woran sich einige für das Folgende nützliche Bemerkungen knüpfen.

8. Ueber divergente Reihen mit unbestimmter aber nicht unendlicher Summe.

Wenn eine Reihe

$$U_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

für $n = \infty$ nicht unendlich wird, aber auch keiner bestimmten Grenze sich nähert, so schwankt U_n von unendlich grossen Werthen von n an bei fernerem Wachsthum von n zwischen zwei der Reihe eigenthümlichen festen Grössen hin und her, die ich schon früher[8]) unter dem Namen Unbestimmtheitsgrenzen besprochen habe. Nennen wir sie A und B, wo $B > A$, so kann U_n entweder erst im Unendlichen B erreichen, oder U_n kann im Endlichen unbegrenzt oft B erreichen und auch übersteigen. In Bezug auf A gilt Entsprechendes. Diese Grössen A und B sind einer völlig präcisen mathematischen Definition fähig, wobei es ausreicht B zu betrachten.

Zunächst muss es für jedes n eine kleinste Grösse B_n geben, die U_{n+m}, wenn m von o bis ∞ wächst, nicht mehr übersteigt, da sonst U_n entweder nur wachsend, oder bald zunehmend bald abnehmend über jede Grenze hinaus wachsen müsste, gegen die Voraussetzung, dass U_n nicht unendlich werden könne. Diese Grösse B_n nimmt bei wachsendem n nicht zu, weil sie die kleinste Grösse ist die U_n nicht mehr übersteigt. Wenn sie also nicht constant ist, so kann sie nur abnehmen, während n zunimmt. Dann muss sie sich aber, da sie auch nicht $-\infty$ werden darf, einer endlichen bestimmten Grenze nähern. Diese Grenze $\text{Lim}_{n=\infty} B_n$ nennen wir B.

9. Fortsetzung.

Nachdem hierdurch die Existenz der festen Grössen A und B ausser Zweifel gesetzt ist, hebe ich folgende ihrer Eigenschaften hervor.

1. Entweder nimmt bei wachsendem n die Summe U_n unbegrenzt oft den Werth B an, oder dies findet für irgend

---

8) Antrittsprogramm, pag. 3.

ein n im Endlichen zum letztenmal statt, so dass von da ab stets $U_n < B$ und erst für $n = \infty$ $U_n = B$ wird.

Im ersteren Falle wird U_n entweder unbegrenzt oft B gerade erreichen und nie übersteigen, wenigstens von hinreichend grossem n an, oder U_n wird B unbegrenzt oft übersteigen. Dann muss aber, wie aus der Definition von B folgt, der bei solchem Uebersteigen eintretende positive Werth von $U_n - B$ mit $\frac{1}{n}$ verschwinden.

Im zweiten Falle, wo erst im Unendlichen U_n gleich B wird, nimmt aber U_n unbegrenzt oft Werthe an, die sich von B um Grössen unterscheiden, die mit $\frac{1}{n}$ Null werden. Dies lässt sich noch etwas schärfer ausdrücken: Wenn, unter N irgend eine hinreichend grosse Zahl verstanden, für $n \leqq N$ der kleinste Werth von $B - U_n$ mit δ bezeichnet wird, so wird für $n > N$ unbegrenzt oft $B - \delta < U_n < B$, da man sonst annehmen müsste, dass bei wachsendem n fortdauernd $U_n \leqq B - \delta$ bleibt, und für $n = \infty$ plötzlich um δ springt, was ungereimt wäre.

Kurzum es wird, wie oben bemerkt, von sehr grossen Werthen von n an $U_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n$ zwischen den Grössen A und B hin und her schwanken, und, falls $\operatorname{Lim}_{n=\infty} u_n = o$ ist, für unendliche Werthe von n nur um unendlich kleine Werthe zunehmen, also gleichsam stetig zwischen A und B sich hin- und herbewegen.

Weiter folgern wir noch:

2. Man nennt die Reihe $U = u_1 + u_2 + \ldots = \operatorname{Lim}_{n=\infty} U_n$ convergent, wenn $A = B$. Falls nicht $A = B$, so kann man dem Limes von U_n die Form:

$$\operatorname{Lim} U_n = \Sigma + j\Delta$$

ertheilen, wo $\Sigma = \frac{A+B}{2}$, $\Delta = \frac{B-A}{2}$ und j eine zwischen den Grenzen -1 und $+1$ (beide incl.) völlig willkürliche Grösse vorstellt.

3. Denken wir uns die Summen U_n und U_N gebildet, und n sowohl wie $N > n$ so gross, dass diese Summen bis auf einen unendlich kleinen Fehler sich auf die Form $\Sigma + j\Delta$ bringen lassen. Alsdann hat man:

$$U_N - U_n = (j_N - j_n)\,\Delta = j\,(B - A)$$

wo j zwischen -1 und $+1$. Bezeichnen wir also mit r_n den

Rest $u_n + u_{n+1} + \ldots u_N$, wo N unermesslich viel grösser als n gedacht ist, so ist $j(B - A)$ sein mathematischer Ausdruck.

4. Es giebt bei jeder Reihe mit unbestimmter aber unendlicher Summe und im Unendlichen verschwindendem Gliede stets erstens zwei Klassen von ganzen Zahlen N_A und N_B von der Eigenschaft dass:

$$\operatorname{Lim} \sum_1^{N_A} u_p = A\,,\ \operatorname{Lim} \sum_1^{N_B} u_p = B,$$

zweitens, unter C irgend einen Werth zwischen A und B verstanden, auch stets eine Zahlenklasse N_C der Art, dass:

$$\operatorname{Lim} \sum_1^{N_C} u_p = C$$

Wir werden namentlich von den Sätzen 2 und 3 Gebrauch machen.

10. Form der durch Reihen dargestellten Functionen.

Da nun nach Satz 2 des vorigen Artikels die Summe der Reihe aus den Unbestimmtheitsgrenzen A und B zusammengesetzt ist, so sind diese, wenn das Glied der Reihe von x abhängt, ebenfalls Functionen von x, die wir mit $U(x)$, $O(x)$ bezeichnen wollen. Bezeichnen wir noch die Summe der Reihe mit $f(x)$, so ist dann:

$$f(x) = \frac{U(x) + O(x)}{2} + j\,\frac{O(x) - U(x)}{2} = \varphi(x) + j\,\psi(x),$$

wo j irgend eine zwischen -1 und $+1$ enthaltene Zahl vorstellt, und dies ist die im Folgenden zu Grunde zu legende Form einer Function. Auf $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind dann die Begriffe Werthevorrath, und mittlerer Werth eines solchen, wie sie im Art. 7 aufgestellt wurden, ohne Weiteres zu übertragen.

Dies vorangeschickt, müssen wir uns zunächst darüber klar werden, was aus der vorausgesetzten Integrirbarkeit für Functionen der Form $f(x) = \varphi(x) + j\,\psi(x)$ folgt.

II. Ueber die Bedingung der Integrirbarkeit der durch Reihen dargestellten Functionen.

Eine Function ist im Intervall $a \leqq x \leqq b$ integrirbar, d. h. die Summe $(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})$, wo $a < x_1 < x_2 < \ldots < b$, nähert sich für $n = \infty$ einer einzigen endlichen Grenze, wenn für $n = \infty$ zugleich mit den sämmtlichen Differenzen $\delta_p = x_p - x_{p-1}$ (deren Summe $\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_n = b - a$ sei) die Summe:

$$\delta_1 \sigma_1 + \delta_2 \sigma_2 + \ldots \delta_n \sigma_n$$

verschwindet, unter σ_p die grösste (positiv genommene) Werthdifferenz innerhalb des Werthevorraths von $f(x)$ für das Intervall $a + \delta_1 + \ldots \delta_{p-1} \leqq x \leqq a + \delta_1 + \ldots \delta_p$ verstanden.[9]) Nun sei die integrirbare Function $f(x)$ von der Form $\varphi(x) + j\,\psi(x)$, wo $\psi(x)$ positiv und j eine zwischen -1 und $+1$ willkürliche Grösse vorstellt, so behaupte ich, dass, durch $\psi(x_p)$ den grössten Werth von $\psi(x)$ im Intervall $a + \delta_1 + \ldots \delta_{p-1} \leqq x \leqq a + \delta_1 + \ldots \delta_p$ bezeichnet, die Summe

$$\delta_1\,\psi(x_1) + \delta_2\,\psi(x_2) + \ldots \delta_n\,\psi(x_n)$$

bei Abnahme der δ die Null zur Grenze hat.

In der That, es muss jedenfalls verschwinden:

$$\mathrm{Lim}\, \Sigma \delta_p \Big\{ \varphi(x_p) + j_1\,\psi(x_p) - [\varphi(x_p) + j_2\,\psi(x_p)] \Big\} = \mathrm{Lim}\, \Sigma \delta_p (j_1 - j_2)\,\psi(x_p)$$

wo j_1, j_2 beliebige dem Intervall $-1 \ldots +1$ angehörige Grössen vorstellen. Denn die Differenz in der Klammer $\{\}$ ist eine Differenz von Werthen der Function $f(x)$ im Intervall $(a + \delta_1 + \ldots \delta_{p-1}) \ldots (a + \delta_1 + \delta_p)$. Setzt man daher $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = -\frac{1}{2}$, so folgt die Richtigkeit des Behaupteten.

---

9) Es bedarf dies des Beweises, den ich in einem Aufsatz: Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen etc. Borchardt's Journal, Bd. 79, p. 23 liefere.

In der Bedingung des Textes können, ohne dass sie an Allgemeinheit einbüsst, die Intervalle $\delta_1, \ldots$ einander gleich angenommen werden. Diese und andere Veränderungen des Wortlauts der Bedingung der Integrirbarkeit umfasst ein Satz, den ich als Nachtrag zum eben erwähnten Aufsatz in demselben Bande des Borchardt'schen Journals p. 259 unter dem Titel: „Ueber eine veränderte Form der Bedingung für die Integrirbarkeit der Funktionen" veröffentliche.

Es mag späterer Anwendung wegen noch folgende Bemerkung hier Platz finden. Bilden wir die Summe:

$$\sum_{p=1}^{p=m} \delta_p\, \sigma(x + \delta_1 + \delta_p),$$

wo $\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_m = a$, und $\sigma(x + \delta_1 + \ldots \delta_p)$ die grösste Werthdifferenz von $f(x)$ im Interaall $(x + \delta_1 + \ldots \delta_{p-1}) \ldots (x + \delta_1 + \ldots \delta_p)$ bedeutet, und nehmen $f(x)$ im Intervall $A \ldots B$ integrirbar an, wo $B - A > a$, so giebt es stets eine solche Grösse δ' des grössten unter den δ, dass die vorstehende Summe für jeden Werth von x des Intervalls $A \ldots B - a$ kleiner als eine beliebig klein vorgeschriebene Grösse ist. Der Beweis dafür ergiebt sich aus der Ueberlegung, dass vorstehende Summe stets als ein Theil der Summe $\delta_1 \sigma_1 + \delta_2 \sigma_2 + \ldots \delta_n \sigma_n$ angesehen werden kann, wo $\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_n = B - A$.

12. Ueber partielle Integration.

Es sei $\varphi(x)$ stetig und der Differenzialquotient $\varphi'(x)$ sei integrirbar, ferner sei $f(x)$ integrirbar, so soll gezeigt werden, dass:

$$\int_a^b d\,\alpha\, \varphi(\alpha)\, f(\alpha) = \varphi(b)\int_a^b d\,\alpha\, f(\alpha) - \int_a^b d\,\alpha\, \varphi'(\alpha) \int_a^\alpha d\,\beta\, f(\beta).$$

Diese Formel gilt zunächst falls $\varphi(x)$ stetig ist, und auch $\varphi'(x)$ und $f(x)$ bis auf eine endliche Anzahl sprungweiser Werthänderungen stetig sind. (Jede sprungweise Werthänderung von $\varphi(x)$, z. B. für $x = c$, fügt an der rechten Seite ein Glied:

$$-\{\varphi(c + o) - \varphi(c - o)\}\int_a^c d\,\alpha\, f(\alpha)$$

hinzu).

Nehmen wir nun von $\varphi'(x)$ und $f(x)$ lediglich die Integrirbarkeit an. Ein einfaches Verfahren Sätze der Integralrechnung, die für Functionen mit einer endlichen Anzahl von Sprüngen gelten, auszudehnen auf Functionen, von denen nur die Integrirbarkeit vorausgesetzt ist, lautet, auf vorliegenden Fall angewandt, so: Wir zerlegen das Interwall $b - a$ in die Theile $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$, bezeichnen mit $f_1(x)$ eine Function, die innerhalb eines jeden Intervalls Δ_p constant und gleich dem kleinsten Werthe von f(x) in diesem Intervall ist, und setzen $f(x) = f_1(x) + \Delta f(x)$. Alsdann ist $\Delta f(x)$ positiv und ausserdem ist

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty} \int_a^b \Delta f(x)\, dx = o.$$

Denn zerlegt man das Integral in die Theile von a bis $a + \Delta_1$, $a + \Delta_1$ bis $a + \Delta_1 + \Delta_2$, ... so kann man es schreiben:

$$\Delta_1 . \Delta f(x_1) + \Delta_2 . \Delta f(x_2) + \ldots$$

wo z. B. $\Delta f(x_1)$ nicht grösser als die grösste Werthdifferenz der Function f im Intervall Δ_1 ist.

Nun ist, weil $f_1(x)$ nur eine endliche Anzahl Sprünge erfährt:

$$\int_a^b d\,\alpha\, \varphi(\alpha)\, f_1(\alpha) - \varphi(b) \int_a^b d\,\alpha\, f_1(\alpha) + \int_a^b d\,\alpha\, \varphi'(\alpha) \int_a^\alpha d\,\beta\, f_1(\beta) = o$$

ausserdem verschwindet die Grösse:

$$\int_a^b d\,\alpha\, \varphi(\alpha)\, \Delta f(\alpha) - \varphi(b) \int_a^b d\,\alpha\, \Delta f(\alpha) + \int_a^b d\,\alpha\, \varphi'(\alpha) \int_a^\alpha d\,\beta\, \Delta f(\beta)$$

wenn n unendlich wird, was vom letzten Glied am schnellsten mit dem zweiten Mittelwerthsatz nachgewiesen wird, da $\int_a^\alpha d\,\beta\, \Delta f(\beta)$, weil $\Delta f(\beta)$ positiv ist, mit α wächst. Addirt man nun die vorstehenden Aggregate, so etc.

Um zu zeigen, dass auch $\varphi'(x)$ nur integrirbar zu sein braucht, setze man $\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(\alpha)\, d\,\alpha$,[10]) worauf man $\varphi'(x) = \varphi'_1(x) + \Delta \varphi'(x)$ macht, und wie vorher verfährt.

Weiter werde f(x) für $x = c$ ($a \leqq c \leqq b$) unendlich, doch so, dass

$$\operatorname{Lim}_{\varepsilon=o} \int^{c-\varepsilon} d\,\alpha\, f(\alpha) \text{ und } \operatorname{Lim}_{\varepsilon=o} \int_{c+\varepsilon} d\,\alpha\, f(\alpha)$$

10) Auch wenn, wie hier $\varphi(x)$ stetig vorausgesetzt wird, so bedarf diese Formel des Beweises, der im Anhang zu dieser Abhandlung nachgeliefert wird.

endliche und bestimmte Grössen seien. Alsdann führen wir in der zu beweisenden Formel statt f(x) eine Function $f_1(x)$ ein, die, übrigens gleich f(x), nur im Intervall $c - \varepsilon \ldots c + \varepsilon_1$, gleich Null sei. Für diese ist dann wieder:

$$\int_a^b d\,\alpha\,\varphi(\alpha)\,f_1(\alpha) - \varphi(b)\int_a^b d\,\alpha\,f_1(\alpha) + \int_a^b d\,\alpha\,\varphi'(\alpha)\int_a^\alpha d\,\beta\,f_1(\beta) = 0.$$

Lässt man hierin ε und ε_1 gleich Null werden, so wird aus den beiden ersten Integralen, das was man mit

$$\int_a^b d\,\alpha\,\varphi(\alpha)\,f(\alpha),\ \int_a^b d\,\alpha\,f(\alpha)$$

zu bezeichnen pflegt.

Das dritte Integral: $\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0,\, \varepsilon_1 = 0}\int_a^b d\,\alpha\,\varphi'(\alpha)\int_a^\alpha d\,\beta\,f_1(\beta)$ bedarf aber einer näheren Betrachtung, weil man feststellen muss, ob man die Integration nach β über den Unendlichkeitspunkt c hinweg vollziehen darf, bevor man nach α integrirt, d. h. ob es mit

$$\int_a^b d\,\alpha\,\varphi'(\alpha)\ \mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0,\, \varepsilon_1 = 0}\int_a^\alpha d\,\beta\,f_1(\beta)$$

identisch ist. Wir müssen uns zunächst darüber klar werden, was dieser letztere Ausdruck bedeutet. Wir schreiben:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0,\, \varepsilon_1 = 0}\int_a^\alpha d\,\beta\,f_1(\beta) = \int_a^\alpha d\,\beta\,f(\beta) = \lambda(\alpha)$$

$$\int_a^\alpha d\,\beta\,f_1(\beta) = \lambda_1(\alpha).$$

Was die Grösse $\lambda(\alpha)$ betrifft, so ist ihre Bedeutung klar für $\alpha < c$. Für $\alpha = c$ ist

$$\lambda(c) = \mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0}\int_a^{c-\varepsilon} d\,\beta\,f(\beta)$$

und für $\alpha > c$ hat man vor dem Grenzübergang $\varepsilon = o$, $\varepsilon_1 = o$ immer $c + \varepsilon_1 < \alpha$ anzunehmen, für $\alpha > c$ ist dann:

$$\lambda(\alpha) = \mathrm{Lim}_{\varepsilon = o} \int_a^{c-\varepsilon} d\,\beta\, f(\beta) + \mathrm{Lim}_{\varepsilon_1 = o} \int_{c+\varepsilon_1}^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta).$$

Es soll also festgestellt werden, dass

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = o,\, \varepsilon_1 = o} \int_a^b d\,\alpha\, \varphi'(\alpha)\, \lambda_1(\alpha) = \int_a^b d\,\alpha\, \varphi'(\alpha)\, \lambda(\alpha),$$

oder dass: $\mathrm{Lim}_{\varepsilon = o,\, \varepsilon_1 = o} \int_a^b d\,\alpha\, \varphi'(\alpha) \left\{ \lambda_1(\alpha) - \lambda(\alpha) \right\} = o.$ Man hat:

für $a \leqq \alpha \leqq c - \varepsilon : \lambda_1(\alpha) - \lambda(\alpha) = o$

für $c - \varepsilon < \alpha < c + \varepsilon_1 : \lambda_1(\alpha) - \lambda(\alpha) = -\int_{c-\varepsilon}^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta)$

für $c + \varepsilon_1 \leqq \alpha \overline{\gtrless} b : \lambda_1(\alpha) - \lambda(\alpha) = -\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon_1} d\,\beta\, f(\beta)$

Die Integrale rechts sind entsprechend wie vorher das Integral $\lambda(\alpha)$ zu definiren, so dass z. B. mit $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon_1} d\,\beta\, f(\beta)$ gemeint ist:

$\mathrm{Lim}_{\mu = o} \int_{c-\varepsilon}^{c-\mu} d\,\beta\, f(\beta) + \mathrm{Lim}_{\mu_1 = o} \int_{c+\mu_1}^{c+\varepsilon_1} d\,\beta\, f(\beta).$ Somit ist also:

$$-\int_a^b d\,\alpha\, \varphi'(\alpha) \left\{ \lambda_1(\alpha) - \lambda(\alpha) \right\} = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon_1} d\,\alpha\, \varphi'(\alpha) \int_{c-\varepsilon}^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) + \int_{c+\varepsilon_1}^{b} d\,\alpha\, \varphi'(\alpha) \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon_1} d\,\beta\, f(\beta).$$

Lässt man hierin ε und ε_1 Null werden, so verschwindet zunächst das zweite Glied rechts. Damit das erste Glied (dem man, da nichts über die Vorzeichen der Functionen unter dem Integralzeichen vorausgesetzt ist, behufs der Bestimmung seines Limes nur die Form:

$$(\varepsilon + \varepsilon_1)\, \varphi'(\alpha_1) \int_{c-\varepsilon}^{\alpha_1} d\,\beta\, f(\beta), \quad c - \varepsilon \leqq \alpha_1 \leqq c + \varepsilon_1,$$

ertheilen kann) verschwinde, ist erforderlich, dass $\varphi'(\alpha)$ nicht gerade für $a = c$ unendlich wird — denn sonst darf unter Voraussetzung der Stetigkeit von

$\varphi'(\alpha)$ ebenfalls unendlich werden, und zwar so, dass das Integral, in dem diese Function auftritt, convergent ist. Es folgt also: Falls f(x) und $\varphi'(x)$ nicht in denselben Punkten und nur so unendlich werden, dass die Integrale convergent sind, und übrigens diese Functionen die Bedingung der Integrirbarkeit erfüllen, während $\varphi(x)$ stetig sein muss, so hat man:

$$\int_a^b d\,\alpha\,\varphi(\alpha)\,f(\alpha) = \varphi(b)\int_a^b d\,\alpha\,f(\alpha) - \int_a^b d\,\alpha\,\varphi'(\alpha)\int_a^\alpha d\,\beta\,f(\beta)$$

die Grösse $\int_a^\alpha d\,\beta\,f(\beta) = \lambda(\alpha)$ im obigen Sinne genommen.

13. Ausdehnung eines Riemann'schen Satzes.

Dies sind die Bemerkungen allgemeiner Natur, welche ich der eigentlichen Untersuchung voranschicken wollte, um den Resultaten ihre umfassendste Gültigkeit zu sichern.

Als Ergänzung zu den vorstehenden Betrachtungen wollen wir untersuchen, was aus dem ersten im Art. 5 angeführten Riemann'schen Satze wird, wenn wir die Reihe $f(x) = \sum_0^\infty (a_p \cos. px + b_p \sin. px)$ unbestimmt mit den Grenzen U(x) und O(x) annehmen. Wir setzen also

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_1^\infty \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2}, \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

schreiben der Kürze halber:

$$\Delta^2 F = F(x+2\varepsilon) - 2F(x) + F(x-2\varepsilon)$$

$$A_p = a_p \cos. px + b_p \sin. px$$

$$\frac{\Delta^2 F}{\varepsilon^2} = \sum_0^\infty A_p \left(\frac{\sin. p\varepsilon}{p\varepsilon}\right)^2$$

und wollen den $\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \dfrac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2}$ bestimmen.

Zu diesem Zweck verstehen wir unter N eine äusserst grosse Zahl, setzen noch

$$r_p = \sum_{q=p}^{q=N} A_q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

und bilden:

$$\sum_{o}^{N} A_p \left(\frac{\sin.\ p\varepsilon}{p\varepsilon}\right)^2 = \sum_{o}^{N} A_p - \sum_{1}^{N} r_p \left\{\left(\frac{\sin.\ (p-1)\varepsilon}{(p-1)\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin.\ p\varepsilon}{p\varepsilon}\right)^2\right\} \quad . \quad 3)$$

Die zweite Summe rechts zerlegen wir in die Theile:

$$\sum_{1}^{N} = \sum_{1}^{m} + \sum_{m+1}^{n} + \sum_{n+1}^{N},\ m < n < N, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

wo m beliebig gross, n die grösste unter $\frac{\pi}{\varepsilon}$ liegende ganze Zahl, und N viel grösser als n sei.

Zunächst können wir schreiben:

$$\sum_{m+1}^{n} = [r_p]_{m+1}^{n} \left\{\left(\frac{\sin.\ m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin.\ n\varepsilon}{n\varepsilon}\right)^2\right\},$$

da die Differenz $\left(\frac{\sin.\ (p-1)\varepsilon}{(p-1)\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin.\ p\varepsilon}{p\varepsilon}\right)^2$ positiv ist, indem $\frac{\sin.\ u}{u}$ von $u = o$ bis $u = \pi$ abnimmt. Der Factor von $[r_p]_{m+1}^{n}$ ist kleiner als 1, und $[r_p]_{m+1}^{n}$ selbst ist ein mittlerer Werth aus den Grössen r_{m+1}, r_{m+2}, ... r_n.

Weiter haben wir:

$$\sum_{n+1}^{N} = \sum_{n+1}^{N} \left\{ r_p\ (\sin.\ (p-1)\varepsilon)^2 \left(\frac{1}{(p-1)^2\varepsilon^2} - \frac{1}{p^2\varepsilon^2}\right) - r_p \frac{\sin.\ (2p-1)\varepsilon\ \sin.\ \varepsilon}{(p\varepsilon)^2} \right\}$$

$$= \Big[r_p(\sin.\ (p-1)\varepsilon)^2\Big]_{n+1}^{N} \left(\frac{1}{(\varepsilon n)^2} - \frac{1}{(\varepsilon N)^2}\right) - \left[r_p \sin.\ (2p-1)\varepsilon \frac{\sin.\ \varepsilon}{\varepsilon}\right]_{n+1}^{N} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n+1}^{N} \frac{1}{p^2}$$

worin die eckigen Klammern mittlere Werthe wie oben $[r_p]_{m+1}^{n}$ bedeuten.

Nun gehen wir zur Grenze über, indem wir ε unendlich klein, m, n und N unendlich gross werden lassen, aber so, dass $m\,\varepsilon$ Null wird, und N unendlich viel grösser als n wird. Der numerisch grösste Werth, den r_p von unendlich grossen Werthen von p und N an annehmen kann, ist $O(x) - U(x)$, (Art. 9, Satz 3). Die mittleren Werthe $\left[r_p\right]_{m+1}^{n}$, $\left[r_p (\sin.(p-1)\varepsilon)^2\right]_{n+1}^{N}$, $\left[r_p \sin.(2p-1)\varepsilon \,.\, \frac{\sin.\varepsilon}{\varepsilon}\right]_{n+1}^{N}$ werden also numerisch nicht grösser als $O(x) - U(x)$ sein können.

Hieraus geht hervor, dass erstens

$$\operatorname{Lim} \sum_{m+1}^{n} = j\left\{O(x) - U(x)\right\}$$

ist, wo j zwischen -1 und $+1$ liegt.

Untersuchen wir zweitens $\operatorname{Lim} \sum\limits_{n+1}^{N}$. Falls n und N so unendlich werden, dass $\frac{n}{N}$ verschwindet, so convergirt $\frac{1}{(\varepsilon n)^2} - \frac{1}{(\varepsilon N)^2}$ gegen $\frac{1}{\pi^2}$, $\frac{1}{\varepsilon}\sum\limits_{n+1}^{N}\frac{1}{p^2}$ gegen $\frac{1}{\pi}$, und $\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)(O(x) - U(x))$ ist der numerisch grösste Werth, den man sich unter $\operatorname{Lim} \sum\limits_{n+1}^{N}$ denken kann. Endlich die erste Summe in 4 hat zur Grenze Null, während die erste Summe rechts in 3 nach Art. 10 geschrieben werden kann:

$$\frac{O(x) + U(x)}{2} + j\,\frac{O(x) - U(x)}{2},$$

j zwischen -1 und $+1$. Es folgt also im Ganzen:

$$\operatorname{Lim} \sum_{0}^{N} A_p \left(\frac{\sin.\, p\varepsilon}{p\varepsilon}\right)^2 = \frac{O(x) + U(x)}{2} + j'\,\frac{O(x) - U(x)}{2}$$

wo $j' = j\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)$ ist, und j wieder zwischen -1 und $+1$, oder wir haben den Satz:

W e n n d i e R e i h e:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_p \cos.\, px + b_p \sin.\, px$$

z w a r n i c h t c o n v e r g i r t a b e r a u c h n i c h t ü b e r a l l e G r e n z e n w ä c h s t, u n d m a n b e z e i c h n e t m i t $O(x)$ u n d $U(x)$ d i e G r e n z e n zwischen denen ihre Summe schwankt, so ist der Limes $\varepsilon = 0$ der Grösse.

$$\frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

wo

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} + \sum_1^\infty \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2},$$

stets enthalten in der Form:

$$\frac{O(x) + U(x)}{2} + j\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)\left[O(x) - U(x)\right],$$

falls j eine zwischen -1 und $+1$ gelegene Zahl vorstellt.

Nun endlich können wir den eigentlichen Gegenstand dieser Mittheilung in Angriff nehmen.

III. Der eigentliche Beweis dafür, dass die Coefficienten der trigonometrischen Entwickelung die Fourier'sche Form haben.

14. Besonderer Fall, wo die Entwickelung eine stetige Function darstellt. Darstellung der Riemann'schen Function F(x).

Unsere Analyse besteht darin, dass wir in

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_1^\infty \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2}$$

F(x) durch

$$f(x) = a_0 + \sum_1^\infty (a_p \cos. px + b_p \sin. px)$$

auszudrücken suchen, und alsdann durch Integration vorstehender Gleichung für F(x), in der die Reihe gleichmässig convergirt, die Coefficienten a und b und etwaige andere unbekannte Grössen bestimmen.

Wir wollen diese Untersuchung zuerst durchführen unter der Annahme, dass f(x) eine zwischen den Grenzen $-\pi, +\pi$ stetige Function von x ist.

Alsdann ist, wie man den zweiten Differentialquotienten auch auffassen möge [11]):

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta\, f(\beta) = f(x)$$

für alle Werthe von x des Intervalls $-\pi < x < +\pi$. Setzt man jetzt

$$\Phi(x) = F(x) - \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta\, f(\beta)$$

so folgt
$$\operatorname{Lim}_{\varepsilon = 0} \frac{\Phi(x+\varepsilon) - 2\Phi(x) + \Phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0.$$

Durch den im Art. 5 erwähnten Beweis des Herrn Schwarz, dessen Gang wir in einem der folgenden Art. zu reproduciren haben werden, ergiebt sich aus vorstehender Gleichung:

$$\Phi(x) = c_0 + c_1 x,$$

und zwar wegen der Stetigkeit von $\Phi(x)$ für $-\pi \leqq x \leqq +\pi$, so dass wir statt $F(x)$ setzen dürfen:

$$\int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta\, f(\beta) + c_0 + c_1 x.$$

---

11) Seine allgemeinste an die Form (Ann. v. Clebsch u. Neumann, Bd. VII, pag. 245):

$$\operatorname{Lim}_{\varepsilon = 0,\, \varepsilon_1 = 0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon_1)}{\varepsilon + \varepsilon_1}$$

des ersten Differentialquotienten sich anschliessende Auffassung ist der Limes für $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0, \eta = 0, \eta_1 = 0$ von

$$\frac{F(x+\varepsilon+\varepsilon_1) - F(x+\varepsilon-\eta_1) - F(x+\varepsilon_1-\eta) + F(x+\eta-\eta_1)}{(\varepsilon+\eta)(\varepsilon_1+\eta_1)}$$

Setzt man $\int^{x} d\alpha \int^{\alpha} d\beta\, f(\beta)$ statt F, so wird dieser Quotient:

$$\frac{1}{(\varepsilon+\eta)(\varepsilon_1+\eta_1)}\int_{x-\eta_1}^{x+\varepsilon_1} d\alpha \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\varepsilon} d\beta\, f(\beta).$$

15. Besonderer Fall etc. Darstellung der Coefficienten der trigonometrischen Reihe durch Integrale.

Wenn wir die Gleichung für F (x) Eingangs des vor. Art. mit cos. n x, sin. n x, 1 multipliciren und zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ integriren, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\cos.\, n\,\alpha\, d\,\alpha &= (-1)^n \frac{2\pi}{n^2}\, a_0 - \frac{a_n}{n^2}\,\pi \\
\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\sin.\, n\,\alpha\, d\,\alpha &= \qquad\qquad\quad - \frac{b_n}{n^2}\,\pi \\
\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\, d\,\alpha &= \frac{\pi^3}{3}\, a_0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1.$$

Hierin nun $F_1(x) + c_0 + c_1 x$, wo $F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\,\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta)$ gesetzt ist, statt F (x) eingeführt, findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{+\pi} F_1(\alpha)\cos.\, n\,\alpha\, d\,\alpha &= (-1)^n \frac{2\pi\, a_0}{n^2} - \frac{a_n}{n^2}\,\pi \\
\int_{-\pi}^{+\pi} F_1(\alpha)\sin.\, n\,\alpha\, d\,\alpha + (-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}\, c_1 &= -\frac{b_n}{n^2}\,\pi \\
\int_{-\pi}^{+\pi} F_1(\alpha)\, d\,\alpha + 2\pi\, c_0 &= \frac{\pi^3}{3}\, a_0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

Nun ist wegen

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\,\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \int_{-\pi}^{x} (x-\alpha)\, f(\alpha)\, d\,\alpha$$

und dann wegen der allgemeinen Umformung:

$$\int_a^b d\,u \int_a^u d\,v\,\varphi(u,v) = \int_a^b d\,u \int_u^b d\,v\,\varphi(v,u)$$

zunächst überhaupt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F_1(\alpha)\,\psi(\alpha)\,d\,\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \int_{\alpha}^{+\pi} d\,\beta\,(\beta - a)\,\psi(\beta).$$

Hierin hat man statt $\psi(x)$ nach einander cos. n x, sin. n x, 1 zu setzen, um die Integrale in den Gleichungen 2 dieses Art. zu reduciren. So erhält man, wenn man die Nenner n und n^2 wegmultiplicirt:

$$\left.\begin{aligned}
&(-1)^n \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) - \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)\cos.\, n\,\alpha = (-1)^n \,.\, 2\pi\, a_0 - \pi\, a_n \\
&-\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)\sin.\, n\,a + n\,.\,c_1 (-1)^{n+1}.\, 2\pi + n(-1)^n \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)\,(\alpha - \pi) = -\pi\, b_n \\
&\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)\,(\pi - \alpha)^2 + 2\pi\, c_0 = \frac{\pi^3}{3}\, a_0.
\end{aligned}\right\} \;3.$$

Lassen wir jetzt in der ersten und zweiten Gleichung 3. n unendlich werden, so folgen aus diesen Gleichungen die Werthe von a_0 und c_1, weil a_n und b_n verschwinden [12]) und auch die Integrale

12) Da die Reihe f(x) convergirt, so verschwindet für $p = \infty$ ihr Glied a_p cos. p x + b_p sin. p x, woraus man mit Herrn **Cantor** schliesst, dass a_p und b_p für sich verschwinden, was man

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \sin. n\,\alpha\,, \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \cos. n\,\alpha$$

für $n = \infty$ Null werden, sobald nur $f(\alpha)$ integrirbar ist.[13]) Somit sind alle Grössen c_0, c_1, a_0, a_n, b_n völlig bestimmt und man findet:

$$\left.\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \left\{ \frac{\pi^2}{3} - (\pi - \alpha)^2 \right\} \\
c_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)\, (\pi - \alpha) \\
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \cos. n\,\alpha \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \sin. n\,\alpha
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4.$$

---

auch so beweisen kann. Man setzt $x \pm h$ statt x, und da also auch $\cos. p h\, (a_p \cos. px + b_p \sin. px) \pm \sin. p h\, (a_p \sin. px - b_p \cos. px)$ verschwinden muss, so muss $a_p \cos. px + b_p \sin. x$ und $a_p \sin. px - b_p \cos. px$ einzeln verschwinden, oder auch die Summe dieser Grössen, die erste mit $\cos. px$, die zweite mit $\sin. px$ multiplicirt. Diese Summe ist aber a_p. Es giebt noch einen anderen unstrengen Beweis für den nämlichen Satz, der aber lehrt von welchem allgemeineren Satze er ein besonderer Fall ist. Erhebt man $A_n = a_n \cos. nx + b_n \sin. nx$ auf's Quadrat und integrirt nach x zwischen den Grenzen x_0 und x_1, so folgt:

$$\int_{x_0}^{x_1} A_n^2\, dx = \frac{x_1 - x_0}{2}\,(a_n^2 + b_n^2) + \frac{1}{n}\, B_n\,, \text{ wo } B_n = \frac{a_n^2 - b_n^2}{4}\,(\sin. 2n\,x_1 - \sin. 2n\,x_0) - a_n b_n (\cos. 2n\,x - \cos. 2n\,x_0).$$

Für $n = \infty$ nähert sich daher $a_n^2 + b_n^2$ der Grenze:

Es wäre ein Leichtes die Bedingungen für $f(x)$ dadurch zu erweitern, dass man dieser Function beliebig viele, ja sich nach Puncten zu unendlich verdichtende Stetigkeitsunterbrechungen gestattete. Allein wir wollen uns damit nicht aufhalten, sondern gleich die viel allgemeinere Annahme eintreten lassen, dass $f(x)$ nur integrirbar zu sein braucht.

16. Der allgemeine Fall. Vorbemerkung.

Es sei also nunmehr erstens

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + (a_2 \cos. 2x + b_2 \sin. 2x) + \dots$$

eine integrirbare Function und zweitens mögen für $n = \infty$ a_n und b_n verschwinden.

Vielleicht folgt dies übrigens schon aus der ersten Voraussetzung der Integrirbarkeit von $f(x)$. Diese verlangt jedenfalls (wie leicht zu zeigen), dass in jedem kleinsten Intervall die Reihe einmal convergire.

Es handelt sich wieder um die Differenz

$$\Phi(x) = F(x) - F_1(x)$$

der Functionen:

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2}$$

$$F_1(x) = \int^x d\alpha \int^\alpha d\beta\, f(\beta).$$

$$\text{Lim} \frac{2}{x_1 - x_0} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} A_n^2\, dx - \frac{1}{n} B_n \right\} = o.$$

Auf die nämliche Weise würde man beweisen, dass, wenn das Aggregat:

$$\varphi_1(\alpha_1) \cos. \alpha_1 x + \varphi_2(\alpha_2) \cos. \alpha_2 x + \dots$$
$$+ \psi_1(\beta_1) \sin. \beta_1 x + \psi_2(\beta_2) \sin. \beta_2 x + \dots$$

verschwindet, während die Grössen α, β und die sämmtlichen Differenzen $\alpha_p - \alpha_q$, $\beta_p - \beta_q$ unendlich werden, die Functionen φ und ψ es sind, durch deren Verschwinden das Aggregat Null wird.

13) Riemann über die Darstellbarkeit etc. Art. 10. Auch lässt sich das Verschwinden dieser Integrale als besonderer Fall eines sehr allgemeinen Satzes auffassen. (Ueber den Gültigkeitsbereich etc., Borch. Journ. Bd. 79, pag. 41.)

Würde die Grenze des Verhältnisses:

$$\frac{\varDelta^2 \Phi}{\varepsilon^2} = \frac{\Phi(x+\varepsilon) - 2\Phi(x) + \Phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

wie im Art. 14, Null sein, so wäre die Aufgabe damit gelöst, indem man ganz wie dort weiter schlösse. Allein man sieht ohne Weiteres, dass die Grenze nicht allgemein Null sein kann, wenigstens dass dies nicht allgemein sich nachweisen lässt. Wir müssen demnach über diese Grenze Einiges feststellen, um weiter vordringen zu können, und werden dann von der Fundamentaleigenschaft der integrirbaren Functionen eine Anwendung machen, die als Sitz der Kraft des hier vorzutragenden Beweises angesehen werden kann. Das Resultat wird schliesslich allerdings wie im obigen speciellen Falle sein, dass die Differenz $F(x) - F_1(x)$ eine lineäre Function von x ist.

17. Der $\operatorname{Lim} \dfrac{\varDelta^2 (F(x) - F_1(x))}{\varepsilon^2}$.

Bezeichnet man mit $O(x)$ und $U(x)$ die Unbestimmtheitsgrenzen von $f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + \dots$ so ist $f(x) = \varphi(x) + j\,\psi(x)$, $\varphi(x) = \dfrac{O(x) + U(x)}{2}$, $\psi(x) = \dfrac{O(x) - U(x)}{2}$, (Art. 10). Es seien mit den Functionszeichen f, φ, ψ die diesen Functionen entsprechenden Werthevorräthe im Sinne des Art. 7 für den jedesmaligen Werth von x gemeint; und wenn diese Functionen für irgend einen numerischen Werth von x direct berechnet gedacht sind, so will ich sie mit $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ bezeichnen. Alsdann hat man (Art. 13):

$$\operatorname{Lim} \frac{\varDelta^2 F(x)}{\varepsilon^2} = \varphi_1(x) + j\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)\psi_1(x).$$

Weiter hat man

$$\varDelta^2 F_1(x) = \int_x^{x+\varepsilon} d\alpha \int^{\alpha} d\beta\, f(\beta) - \int_{x-\varepsilon}^{x} d\alpha \int^{\alpha} d\beta\, f(\beta) = \int_x^{x+\varepsilon} d\alpha \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} d\beta\, f(\beta).$$

Das Integral rechter Hand können wir zunächst schreiben:

$$\int_x^{x+\varepsilon} d\alpha \,.\, \varepsilon\, f(\alpha_1),$$

wo $f(\alpha_1)$ ein mittlerer Werth des Werthevorraths von $f(\beta)$ im Intervall $\alpha - \varepsilon \leqq \beta \leqq \alpha$. Ferner ist

$$\varepsilon \int_x^{x+\varepsilon} d\,\alpha\, f(\alpha_1) = \varepsilon^2 f(\alpha_2),$$

wo $f(\alpha_2)$ ein mittlerer Werth sämmtlicher Werthe $f(\alpha_1)$ wenn in der Begrenzung des Intervalls $\alpha - \varepsilon \leqq \beta \leqq \alpha$ das α alle Werthe von $x - \varepsilon$ bis x annehmen kann.

Also ist $f(\alpha_2)$ schliesslich ein mittlerer Werth des Werthevorraths $f(\beta)$ im Intervall

$$x - \varepsilon \leqq \beta \leqq x + \varepsilon,$$

und reducirt sich für $\varepsilon = o$ auf einen mittleren Werth des Werthevorraths $f(\beta)$ für $\beta = x$.

Wir können also schreiben:

$$\operatorname{Lim} \frac{\varDelta^2 F_1(x)}{\varepsilon^2} = \varphi^*(x) + j\, \psi^*(x)$$

unter $\varphi^*(x)$ und $\psi^*(x)$ mittlere Werthe der Werthevorräthe $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für den betrachteten Punkt x verstanden. Demnach wird zuerst:

$$\operatorname{Lim} \frac{\varDelta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2} = \varphi_1(x) + j\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) \psi_1(x) - \varphi^*(x) - j\, \psi^*(x).$$

Da wir nicht alle Bestandtheile dieses Limes einzeln brauchen, so wollen wir ihn in eine für unsere Zwecke genügende kürzere Form zusammenfassen.

Es sei $\varDelta\,\varphi(x)$ die grösste (positiv genommene) Werthdifferenz, welche innerhalb des Werthevorraths $\varphi(x)$ für den betrachteten Punkt x möglich ist, und es sei $\Psi(x)$ der grösste Werth, welcher im Werthevorrath $\psi(x) = \frac{O(x) - U(x)}{2}$ vorkommt; alsdann ist:

$$\operatorname{Lim} \frac{\varDelta^2 \Phi}{\varepsilon^2} = \varDelta^*\, \varphi(x) + j\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) \Psi(x)$$

wo $\varDelta^*\,\varphi(x)$ numerisch nicht grösser als $\varDelta\,\varphi(x)$ ist, und j zwischen -1 und $+1$ liegt. Der numerisch grösste Werth, den somit $\operatorname{Lim} \frac{\varDelta^2 \Phi}{\varepsilon^2}$ erreichen könnte, ist:

$$\Delta\,\varphi(x) + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)\Psi(x) = \nu$$

und es kann ε immer so verkleinert werden, dass $\frac{\Delta^2\,\Phi}{\varepsilon^2}$ numerisch nicht grösser als $\nu + \nu'$ ist, unter ν' eine Grösse von vorgeschriebener Kleinheit verstanden.

18. Kurze Skizze des weiteren Weges.

Der am Schluss des vorigen Artikels für den Limes von $\frac{\Delta^2\,\Phi(x)}{\varepsilon^2}$ gefundene Ausdruck zeichnet uns den Weg deutlich vor, den wir nunmehr zu verfolgen haben. Es verschwindet nämlich allerdings nicht dieser Limes, aber (wie ich sogleich ausführlicher entwickeln werde) es verschwindet wegen der Bedingung der Integrirbarkeit der Limes von:

$$\sum_{p=1}^{p=n} (x_p - x_{p-1}) \frac{\Delta^2\,\Phi(x_p)}{\varepsilon^2}$$

falls die Differenzen $x_p - x_{p-1}$ unendlich klein sind, während x_0 und $x_n - x_0$ endlich bleiben. Es liegt nahe, hieraus zu schliessen, dass

$$\frac{\Delta^2 \int\limits_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\,\alpha}{\varepsilon^2}$$

die Null zur Grenze hat, und ist dies richtig, so findet man schliesslich $\int\limits_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\,\alpha = c_0 + c_1 x$, ein Resultat, durch welches ersichtlich das Problem so gut wie gelöst ist. Diesen Gedankengang wollen wir jetzt genauer ausführen.

19. Einführung der Function deren zweiter Differentialquotient verschwindet.

Wir betrachten also die Summe:

$$G(x, \delta) = G(x) = \sum_{p=o}^{p=n} \delta\,.\,\Phi(x + p\,\delta)$$

wo $n\,\delta = a$ sei, und constant bleibe, wenn δ und $\frac{1}{n}$ gegen Null convergiren

Bilden wir

$$\frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2} = \sum_{p=o}^{p=n} \delta \frac{\Delta^2 \Phi(x + p\,\delta)}{\varepsilon^2},$$

und lassen darin ε abnehmen, so nähert sich die rechte Seite (Art. 17) einer Grösse:

$$\sum_{p=o}^{p=n} d \left\{ \Delta^* \varphi(x + p\delta) + j \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) \Psi(x + p\delta) \right\},$$

deren numerisch grösstdenkbaren Werth wir mit:

$$\tau(x) = \sum_{p=o}^{p=n} \delta \left\{ \Delta \varphi(x + p\delta) + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) \Psi(x + p\delta) \right\}$$

im Sinne des cit. Art. bezeichnen.

Man wird ε immer so klein annehmen können, dass die Summe:

$$\frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2} = \sum_{p=o}^{p=n} \delta \frac{\Phi(x + p\,\delta)}{\varepsilon^2}.$$

vorstehende Summe $\tau(x)$ numerisch um nicht mehr, wie um einen beliebig klein vorgeschriebenen Werth τ' überschreitet.

Weiter wird man wegen der Integrirbarkeit von f(x) die Grösse δ so klein machen können, dass auch $\tau(x)$ von vorgeschriebener Kleinheit wird. Um dies einzusehen, erinnere man sich an die Ausführungen des Art. 11, auf Grund deren a fortiori $\tau(x)$ mit δ verschwindet, da die l. c. unserem $\Psi(x + p\delta)$ entsprechende Grösse $\psi(x_p)$ den grössten Werth von $\psi(x)$ im Intervall $x + (p - 1)\delta \ldots x + p\delta$ vorstellt, während $\Psi(x + p\delta)$ nur den grössten Werth des Werthevorrath $\psi(x)$ für das Argument $x + p\delta$ zu bedeuten braucht.

Endlich wird man gemäss dem im letzten Alinea des Art. 11 Gesagten stets eine Kleinheit von δ angeben können, bei welcher die Function $\tau(x)$ für jeden Werth x innerhalb eines beliebigen Intervalls kleiner wird als eine beliebig vorgeschriebene Grösse τ: da nämlich das l. c. angenommene Integrirbarkeits-Intervall A . . . B hier sich ins Unbegrenzte erstreckt, indem $\Phi(x)$ in jedem endlichen Integral von x integrirbar ist.

Somit folgt überhaupt:

Man kann δ stets so klein annehmen, dass

$$\frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2} = \frac{\Delta^2 \sum\limits_{p=o}^{p=n} \delta\, G(x+p\delta)}{\varepsilon^2}$$

bei Verkleinerung von ε für jeden Werth von x eines beliebigen Intervalls unter eine vorgeschriebene Grenze $\tau + \tau'$ sinkt.

20. Beweis, dass G(x) von der Form $c_0 + c_1 x$ ist.

Dies festgestellt, führen wir, indem wir uns an die Analyse des Herrn Schwarz anlehnen, die Functionen ein:

$$H(x) = G(x) - G(a) - \frac{x-a}{b-a}(G(b) - G(a))$$

$$K(x) = \gamma H(x) - \frac{r^2}{2}(x-a)(b-x),$$

wo a und b zwei beliebig gewählte ein Intervall $a \leqq x \leqq b$ einschliessende Grössen vorstellen, γ und r willkürliche später zu verwendende Grössen bedeuten.

Man findet leicht:

$$\Delta^2 K(x) = \varepsilon^2 r^2 \left\{ 1 + \frac{\gamma}{r^2} \frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2} \right\}$$

Die Functionen H und K erfüllen, wie man ohne Weiteres einsieht, die Bedingungen:

1. $H(a) = H(b) = K(a) = K(b) = o$.
2. $K(x)$ ist stetig im Intervall $a \leqq x \leqq b$.
3. $\Delta^2 K(x)$ wird für jeden Werth von x des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ bei genügender Kleinheit von δ und hinreichender Verkleinerung von ε positiv. Denn wie klein wir r und wie gross wir γ auch annehmen mögen, wir können die vorgeschriebene Grenze $\tau + \tau'$, die $> \frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2}$ gedacht ist (Schluss d. vor. Art.), stets so bestimmen, dass

$$\frac{\gamma}{r^2}(\tau + \tau') < 1$$

wird.

Mit Hilfe dieser Daten kann man nun nachweisen, dass $K(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ nicht positiv sein kann, wie das willkürliche γ auch beschaffen sein mag. Denn wäre $K(x)$ in diesem Intervall irgendwo positiv, so müsste es, wegen der Stetigkeit von $K(x_1)$, für irgend einen Werth $x = x_1$, wo $a < x_1 < b$, seinen grössten Werth annehmen, so dass bei hinreichend kleinem ε

$$K(x_1 + \varepsilon) - K(x_1) \leqq o$$
$$K_1(x_1 - \varepsilon) - K(x_1) \leqq o$$

mithin $\Delta^2 K(x_1) = K(x_1 + \varepsilon) - 2K(x_1) + K(x_1 - \varepsilon) \leqq o$

würde und bei weiterer Verkleinerung von ε bliebe. Aber $\Delta^2 K(x)$ wird bei hinreichender Verkleinerung von ε ja positiv. Also ist

$$K(x) = \gamma H(x) - \frac{r^2}{2}(x - a)(b - x) \leqq o$$

wie man innerhalb beliebig vorgeschriebener Grenzen des numerischen Werthes von γ über diese Grösse auch verfügen möge. Daher ist auch, wenn man, jenachdem $H(x)$ positiv oder negativ ist, γ gleich $+1$ oder -1 setzt:

$$\text{mod. } H(x) - \frac{r^2}{2}(x - a)(b - x) \leqq o,$$

d. h. der Ueberschuss von mod. $H(x)$ über die Null kann durch Verkleinerung von r beliebig verringert werden. Aber je kleiner man r annimmt, desto kleiner muss auch die in $H(x)$ eingehende Grösse δ angenommen werden, und beide sinken gleichzeitig unter jede Grenze. Soll also r unendlich klein sein, so werden die in $H(x) = o$ eingehenden Summen, aus denen $G(x)$ besteht, in Integrale übergehen.

Aus
$$H(x) = o$$
folgt:
$$G(x) = c_0 + c_1 x$$
und daher
$$\int_0^a F(x + \alpha)\, d\alpha - \int_0^a F_1(x + \alpha)\, d\alpha = c_0 + c_1 x$$

oder:
$$F(\alpha_1 + x) - F_1(\alpha_1 + x) = \frac{c_0}{a} + \frac{c_1}{a} x, \quad o \leqq \alpha_1 \leqq a.$$

Lässt man hierin a verschwinden, so folgt:

$$F(x) - F_1(x) = \mathrm{Lim}_{a = o} \left\{ \frac{c_0}{a} + \frac{c_1}{a} x \right\}.$$

Hierin ist x willkürlich, c_0 und c_1 sind von x unabhängig, $F(x)$, $F_1(x)$ sind völlig bestimmte Grössen, also ist auch $\mathrm{Lim}_{a=0}\frac{c_0}{a}$, $\mathrm{Lim}_{a=0}\frac{c_1}{a}$ etwas Bestimmtes [14]), und man hat

$$F(x) - F_1(x) = c_0 + c_1 x,$$

welches das abzuleitende Resultat ist.

Da wir nun, falls von

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + \ldots$$

nur die Integrirbarkeit vorausgesetzt ist, wieder:

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_p \cos. px + b_p \sin. px}{p^2} = \int^x d\alpha \int^\alpha d\beta f(\beta) + c_0 + c_1 x$$

gefunden haben, so ist die weitere Analyse genau dieselbe, wie im Art. 14, und auch in diesem Falle lassen sich also die Coefficienten a_0, a_p, b_p auf die Fourier'sche Weise ausdrücken.

21. Die Annahme der durchgängigen Endlichkeit von f(x) wird fallen gelassen.

Es bleibt noch übrig, den Fall zu untersuchen, wo f(x) nur deshalb die Bedingung der Integrirbarkeit nicht erfüllt, weil diese Function für einzelne Werthe des Arguments berechnet, unendlich ist, oder bei Annäherung an einzelne solche unendlich wird.

Es sei x_1 ein solcher Werth des Arguments, so ist zunächst unter dem Integral

$$\int f(\alpha)\, d\alpha$$

wie gewöhnlich zu verstehen:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \int^{x_1-\varepsilon} f(\alpha)\, d\alpha + \mathrm{Lim}_{\varepsilon_1=0} \int_{x_1+\varepsilon_1} f(\alpha)\, d\alpha,$$

---

14) Denn bildet man die vorstehende Gleichung für zwei Werthe x' und x'' von x, so findet man:

$$F(x') - F_1(x') - [F(x'') - F_1(x'')] = (x' - x'')\, \mathrm{Lim}_{a=0} \frac{c_1}{a}.$$

Die linke Seite ist bestimmt, also muss es auch die rechte sein.

falls x_1 innerhalb der Grenzen des Integrals liegt. Geben wir $F_1(x) = \int^x d\alpha \int^\alpha d\beta\, f(\beta)$ untere Grenzen, und setzen wie oben:

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta\, f(\beta) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha\, (x-\alpha)\, f(\alpha)$$

so genügt es, damit $F_1(x)$ einen Sinn habe, dass

$$\int_{-\pi}^{x} d\alpha\, f(\alpha)$$

endlich und bestimmt ist, wie im Art. 12 „über partielle Integration" des Ausführlicheren gezeigt ist.

Nun werde für $x = A$ und $x = B$ die Function $f(x)$ unendlich, sei aber sonst endlich und integrirbar. Wir bestimmen ein x so, dass alle Elemente der Summe

$$G(x) = \sum_{p=o}^{p=n} \delta\, \Phi(x + p\,\delta)$$

in das Intervall A . . . B fallen, d. h. man muss haben:

$$A < x + p\,\delta < B;\ p = o, 1, 2, \ldots n;\quad n\,\delta = a$$

oder

$$A < x < B - a.$$

In diesem Intervall wird alsdann auch

$$F(x) - F_1(x) = c_0 + c_1 x$$

sein. Da wir aber a beliebig klein annehmen dürfen, so ist auch im ganzen Intervall

$$A < x < B$$

$$F(x) - F_1(x) = c_0 + c_1 x$$

Aehnlich würde man zeigen, dass für

$$x < A : F(x) - F_1(x) = c'_0 + c'_1 x$$

$$x > B : F(x) - F_1(x) = c''_0 + c''_1 x.$$

Nun liefert

$$F_1(x) = \int^x d\alpha \int^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

diesen Ausdruck:

$$\Delta^2 F_1(x) = \int_{x}^{x+\varepsilon} d\alpha \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} d\beta\, f(\beta)\ \text{(Art. 17)}$$

Setzt man daher:

$$\int_x^{x+\varepsilon} d\,\alpha \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \varepsilon \int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1} d\,\beta\, f(\beta),\ \ x \leqq \alpha_1 \leqq x + \varepsilon,$$

so folgt, da nach dem zweiten Riemann'schen Satze (Art. 5) $\frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon}$ mit ε verschwindet, dass Gleiches von

$$\frac{\Delta^2 \left\{ F(x) - F_1(x) \right\}}{\varepsilon}$$

gilt, und zwar auch für $x = A$ und $x = B$.

Jetzt ist aber leicht zu zeigen, dass die an beiden Seiten von A und B für $F(x) - F_1(x)$ gefundenen linearen Functionen

$$c'_0 + c'_1\, x\ ,\ c_0 + c_1\, x\ ,\ c''_0 + c''_1\, x$$

identisch sind. Denn wegen der Stetigkeit von $F(x) - F_1(x)$ ist z. B.

$$c'_0 - c_0 + A\,(c'_1 - c_1) = o.$$

Ausserdem ist:

$$\frac{\Delta^2 \left\{ F(A) - F_1(A) \right\}}{\varepsilon} = \frac{c_0 + c_1 (A + \varepsilon) - 2 (c_0 + c_1 A) + c'_0 + c'_1 (A - \varepsilon)}{\varepsilon}$$
$$= c'_1 - c_1.$$

Wenn also $f(x)$ in einzelnen Punkten des Intervalls $-\pi \ldots + \pi$ unendlich wird, so hat man gleichwohl wieder längs des ganzen Intervalls:

$$F(x) = \int^x d\,\alpha \int^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) + c_0 + c_1\, x,$$

vorausgesetzt, dass das Integral einen Sinn hat. Diese Formel lässt sich dann noch leicht dahin verallgemeinern, dass man Unendlichwerden in unzähligen, ähnlich wie die Wurzeln des Kettensinus:

$$\sin. \cfrac{1}{\sin. \cfrac{1}{\ddots\, \sin. \cfrac{1}{x}}}$$

gruppirten Punkten gestattet, nur muss das Integral entsprechend definirt werden, in Betreff welcher Fragen ich auf die Abhandlung: „Versuch einer Classif. etc.“, Borchardt's Journ. Bd. 79, pag. 35 sqq. zu verweisen mir erlaube.

22. Andere Bestimmung der Coefficienten der Fourier'schen Reihe.

Wenn wir jetzt vermöge der Analyse des Art. 15 die gleichen Werthe 4 wie dort für die Grössen c_0, c_1, a_0, a_n, b_n finden wollen, so wäre wieder die Bedingung zu erfüllen, dass der Limes $n = \infty$ der Integrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \cos.\, n\,\alpha\,, \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \sin.\, n\,\alpha$$

verschwindet, wie dies in den bis jetzt betrachteten Fällen aus allgemeinen Sätzen (Borch. Journ. Bd: 79, pag. 41) folgt. Für den Fall des Unendlichwerdens von f(x) könnte man weiter den l. c. Art. 2 bewiesenen allgemeinen Satz benutzen. Wir können aber gänzlich ohne von diesen Sätzen Gebrauch zu machen, die Werthe der Coefficienten a_n, b_n aus den Gleichungen 3 des Art. 15 ziehen. Da man nämlich hat:

$$\int_{-\pi}^{x} d\,\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta\, f(\beta) + c_0 + c_1 x = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_p \cos.\, px + b_p \sin.\, px}{p^2}, \quad . \quad . \quad . \quad 1.$$

so folgt, wenn man statt x setzt $-\pi$ und $+\pi$:

$$\left.\begin{aligned} c_0 - c_1\pi &= \frac{a_0\pi^2}{2} - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^p a_p}{p^2} \\ \int_{-\pi}^{+\pi} (\pi - \alpha) f(\alpha)\, d\,\alpha + c_0 + c_1\pi &= \frac{a_0\pi^2}{2} - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^p a_p}{p^2}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2.$$

und für o und 2π statt x:

$$\left.\begin{aligned} -\int_{-\pi}^{o} \alpha\, f(\alpha)\, d\,\alpha + c_0 &= -\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_p}{p^2} \\ \int_{-\pi}^{2\pi} (2\pi - \alpha) f(\alpha)\, d\,\alpha + c_0 + 2\pi c_1 &= \frac{4\, a_0\pi^2}{2} - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_p}{p^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.$$

Eliminirt man aus 2 die Reihe, so findet man zunächst:

$$2\pi c_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} (\alpha - \pi)\, f(\alpha)\, d\,\alpha.$$

Ebenso ergiebt sich aus 3:

$$\int_{-\pi}^{2\pi}(2\pi-\alpha)\,f(\alpha)\,d\alpha+\int_{-\pi}^{o}\alpha\,f(\alpha)\,d\alpha+2\pi\,c_1=2\,a_0\,\pi^2$$

und hieraus wegen des Werthes von $2\pi\,c_1$ und wegen:

$$\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-\alpha)\,f(\alpha)\,d\alpha=-\int_{-\pi}^{o}\alpha\,f(\alpha)\,d\alpha$$

erhält man:

$$2\pi\,a_0=\int_{-\pi}^{+\pi}d\,\alpha\,f(\alpha).$$

Dies reicht aber aus, um aus die Gleichungen 3 des Art. 15 die Grössen a_n, b_n zu bestimmen.

Im eben Gesagten ist, wie ich bemerken will, der Satz enthalten, dass aus der Convergenz des Integrals $\int_{-\pi}^{+\pi}d\,\alpha\,f(\alpha)$, wenn $f(x)$ eine trigonometrische Reihe mit schliesslich verschwindenden Coefficienten vorstellt, die für einzelne Werthe des Arguments unendlich wird, auch das Verschwinden der Coefficienten der Fourier'schen Reihe folgt.

23. Bemerkungen über die Beschaffenheit der Unendlichkeitswerthe von f(x).

Als von eigenthümlichem Interesse hebe ich den Fall hervor, wo die Function $f(x)$, für einen Punkt $x = x_1$ berechnet, einen unendlich grossen Werth annimmt, während die Grössen

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=o}\,f(x_1+\varepsilon)\,,\ \mathrm{Lim}_{\varepsilon=o}\,f(x_1-\varepsilon)$$

endlich sind. Ein solches Verhalten zeigt z. B. die Function

$$\varphi(x)=\mathrm{Lim}_{h=\infty}\,\frac{x\,h+1}{x\,h+x^2}\,,$$

diesen Limes so verstehend, dass er gebildet wird, nachdem für x dessen numerische Werthe eingesetzt worden. Die Function $\varphi(x)$ ist überall Eins, ausser für $x = o$, wo sie unendlich ist.

Wenn die Function:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + \ldots$$

einen solchen Punkt $x = x_1$ besitzt, so werden die Integrale $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha$, etc. in der Weise gebildet, dass man den Unendlichkeitswerth gänzlich fortlässt, und die Function $f(x)$ für $x = x_1$ mit irgend einem endlichen Werthe, der ja doch auf den Werth des Integrals ohne Einfluss ist, behaftet sich denkt.

Besonders merkwürdig ist dieser Fall, weil sich gezeigt hat [15]), dass die Fourier'sche Reihe, wenn man sie mit gewissen stetigen, endlichen Functionen bildet, dennoch in einzelnen Punkten unendliche Werthe annimmt. Es entspricht dies also auf das vollkommenste den Ergebnissen der vorstehenden Abhandlung, insofern nämlich die Unendlichkeitswerthe dieser Fourier'schen Reihe nicht berücksichtigt zu werden brauchen, wenn sie, behufs nachträglicher Bestimmung ihrer Coefficienten, als trigonometrische Reihe mit noch nicht in die Fourier'sche Form gebrachten, sondern lediglich numerischen Coefficienten aufgefasst wird.

24. Fall, wo die trigonometrische Reihe f(x) so rasch unendlich wird, dass die Coefficienten der Fourier'schen Reihe divergente Integrale sind.

Schliesslich ist noch ein Fall des Unendlichwerdens der darzustellenden Function $f(x)$ zu untersuchen, in welchem ihre Darstellung durch eine trigonometrische Reihe möglich ist, die indessen nicht ohne Weiteres als Fourier'sche Reihe sich schreiben lässt, weil deren Coefficienten divergente Integrale sein würden. So dass man es hier endlich doch mit einer Ausnahme zu thun hätte, wenn nicht eine kleine Modification in der Definition der in der Fourier'schen Reihe auftretenden Integrale dennoch wieder gestattete, die Coefficienten der trigonometrischen Reihe auf die Fourier'sche Weise auszudrücken.

---

15) Göttinger gelehrte Anzeigen, 1873, Nr. 21. Die ausführliche Publication wird nächstens erfolgen.

Betrachten wir die gemeine Sinusreihe:

$$\frac{\pi}{2} f_n(x) = \sin. x \int_0^\pi d\,\alpha\, f(\alpha) \sin.\alpha + \sin. 2x \int_0^\pi d\,\alpha\, f(\alpha) \sin. 2\alpha + \ldots$$

$$+ \sin. nx \int_0^\pi d\,\alpha\, f(\alpha) \sin. n\,\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\,\alpha\, f(\alpha) \left\{ \frac{\sin. N \frac{\alpha - x}{2}}{2 \sin. \frac{\alpha - x}{2}} - \frac{\sin. N \frac{\alpha + x}{2}}{2 \sin. \frac{\alpha + x}{2}} \right\},$$

wo $N = 2n + 1$. Dies Integral zerlegen wir in die Theile:

$$\int_0^a, \int_a^b, \int_b^c, \int_c^\pi,$$

wo wir $o < a < b < x < c < \pi$ annehmen, und a, $x - b$, $c - x$ beliebig klein uns denken. Falls $f(x)$ im Intervall $o \leqq x \leqq \pi$ endlich bleibt und nur eine endliche Anzahl Maxima hat, wird für $N = \infty$ das erste, zweite und vierte Integral verschwinden. Wird $f(o)$ unendlich, so ist, um die Wirkung davon zu beurtheilen, nur die Untersuchung des Integrals von o bis a erforderlich, auf die wir uns beschränken. Dieser Theil des für $\frac{\pi}{2} f_n(x)$ vorstehend angegebenen Ausdrucks geht, wie leicht zu bestätigen über in:

$$\frac{1}{2} \cos. N \frac{x}{2} \sin. \frac{x}{2} \int_0^a d\,\alpha\,.\,\alpha\, f(\alpha)\,.\,\varphi(\alpha) \frac{\sin. \frac{N}{2} \alpha}{\alpha}$$

$$- \frac{1}{2} \sin. N \frac{x}{2} \cos. \frac{x}{2} \int_0^a d\,\alpha\,.\,\alpha\, f(\alpha)\,.\,\psi(\alpha) \cos. \frac{N}{2} \alpha$$

wo

$$\varphi(\alpha) = \frac{\cos. \frac{\alpha}{2}}{\left(\sin.\frac{\alpha}{2}\cos.\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin.\frac{x}{2}\cos.\frac{\alpha}{2}\right)^2},\ \alpha\,\psi(\alpha) = \frac{\sin. \frac{\alpha}{2}}{\left(\sin.\frac{\alpha}{2}\cos.\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin.\frac{x}{2}\cos.\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

Die Grössen $\varphi(o)$ und $\psi(o)$ sind weder Null noch unendlich. Falls also $\mathrm{Lim}_{\alpha = o}\, \alpha\, f(\alpha)$ nicht unendlich ist, hat man

$$\mathrm{Lim}_{N=\infty}\int_0^a d\,\alpha\,\alpha\,f(\alpha)\,\varphi(\alpha)\frac{\sin.\frac{N}{2}\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Lim}_{\alpha=o}\,\alpha\,f(\alpha)\,\varphi(\alpha)$$

$$\mathrm{Lim}_{N=\infty}\int_0^a d\,\alpha\,\alpha\,f(\alpha)\,\psi(\alpha)\cos.\frac{N}{2}\,\alpha = o.$$

Die Sinusreihe convergirt also, wenn $f(\alpha)$ in der Nähe von $\alpha = o$ nicht unendlich viele Maxima hat und wenn $\mathrm{Lim}\,\alpha\,f(\alpha) = o$, sie divergirt, wenn dann der $\mathrm{Lim}\,\alpha\,f(\alpha)$ nicht $= o$ ist.[16])

Nun werde die Function $f(x)$ für $x = a$ $(-\pi < a < +\pi)$ so unendlich, ohne unendlich viele Maxima, dass ihr Integral, über die Stelle $x = a$ genommen, divergirt, dass aber $\mathrm{Lim}_{x=a}\,(x - a)\,f(x) = o$ sei. Wir werden dann also setzen dürfen:

$$\frac{\pi}{2}\,f(a+\xi) = \sin.\,\xi\int_0^\pi d\,\alpha\,f(a+\alpha)\sin.\,\alpha + \sin.\,2\,\xi\int_0^\pi d\alpha f(a+\alpha)\sin.\,2\,\alpha + ..$$

---

16) Das nämliche Resultat lässt sich noch einfacher bei der Fourier'schen Formel ableiten. Setzt man $f(x) = -f(-x)$ in $\pi\,f(x) = \int_0^\infty d\,\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} d\,\beta\,f(\beta)\cos.\,\alpha(\beta - x)$, so ergiebt sich bekanntlich:

$$\frac{\pi}{2}\,f(x) = \int_0^\infty d\,\alpha\int_0^\infty d\,\beta\,f(\beta)\sin.\,\alpha\,\beta\sin.\,\alpha\,x.$$

Um zu finden wie stark $f(\beta)$ für $\beta = o$ unendlich werden darf, lassen wir das Integral nach β nur von o bis a gehen, nehmen $x > a$ an und finden:

$$\int_0^\infty d\,\alpha\int_0^a d\,\beta\,f(\beta)\sin.\,\alpha\,\beta\sin.\,\alpha\,x = \mathrm{Lim}_{h=\infty}\int_0^h d\,\alpha\int_0^a d\,\beta\,f(\beta)\left\{\cos.\,\alpha\,(\beta - x) - \cos.\,\alpha(\beta + x)\right\}$$

$$= \mathrm{Lim}_{h=\infty}\left\{x\cos.\,h\,x\int_0^a d\,\beta\frac{\beta\,f(\beta)}{\beta^2 - x^2}\cdot\frac{\sin.\,h\,\beta}{\beta} - \sin.\,h\,x\int_0^a d\,\beta\frac{\beta\,f(\beta)}{\beta^2 - x^2}\cdot\cos.\,h\,\beta\right\}$$

woraus leicht das Weitere folgt.

oder man hat für $a + \xi = x$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{p=1}^{p=\infty} (a_p \cos. p x + b_p \sin. p x)$$

wo:

$$a_0 = o\,,\ a_p = -\frac{2}{\pi} \sin. p a \int_0^{\pi} d\,\alpha\, f(a + \alpha) \sin. p \alpha,$$

$$b_p = \frac{2}{\pi} \cos. p a \int_0^{\pi} d\,\alpha\, f(a + \alpha) \sin. p \alpha.$$

Die Function $f(x)$ ist also durch eine convergente trigonometrische Reihe darstellt. Will man sie aber durch eine Fourier'sche Reihe:

$$f(x) = A_0 + \sum_{p=1}^{p=\infty} (A_p \cos. p x + B_p \sin. p x)$$

darstellen, in welcher A_0, A_p, B_p die Bedeutungen

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)\,,\ A_p, B_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) \cos. p\,\alpha\,,\ \sin. p\,\alpha$$

haben, so sind diese Integrale divergent, wenn man sie nämlich auf die gewöhnliche Weise auffasst, nach welcher z. B.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha) = \mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \int_{-\pi}^{a-\varepsilon} d\,\alpha\, f(\alpha) + \mathrm{Lim}_{\varepsilon_1=0} \int_{a+\varepsilon_1}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha),$$

wo ε und ε_1 von einander unabhängig Null werdend gedacht sind. Es soll aber gezeigt werden, dass doch wieder die Relationen:

$$a_0 = A_0\,,\ a_p = A_p\,,\ b_p = B_p$$

stattfinden, wenn man die in den A und B auftretenden Integrale so definirt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} = \mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{-\pi}^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{+\pi} \right\}.$$

Berücksichtigt man die Relationen:

$$f(a+\alpha) = -f(a-\alpha)\,,\quad f(a-\pi+\alpha) = -f(a-\pi-\alpha)$$

so wird sich also vermöge derselben und nach der eben festgesetzten Definition z. B. ergeben müssen:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)\cos.\ p\,\alpha = -2\sin.\ p\,a\int\limits_{0}^{\pi} d\,\alpha\, f(a+\alpha)\sin.\ p\,\alpha$$

In der That, wenn man weiter zerlegt:

$$\int\limits_{-\pi}^{a-\varepsilon} + \int\limits_{a+\varepsilon}^{+\pi} = \left(\int\limits_{-\pi}^{-(\pi-a)} + \int\limits_{-(\pi-a)}^{2a-\pi}\right) + \left(\int\limits_{2a-\pi}^{a-\varepsilon} + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\pi}\right)$$

so geht der erste Theil über in:

$$\int\limits_{\pi-a}^{\pi} d\,\alpha\, f(a+\alpha)\,(\cos.\ p\,(a+\alpha) - \cos.\ p\,(a-\alpha))$$

und der zweite in:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\pi-a} d\,\alpha\, f(a+\alpha)\,(\cos.\ p\,(a+\alpha) - \cos.\ p\,(a-\alpha))\,,$$

so dass für $\varepsilon = o$ allerdings nach der obigen Definition

$$a_p = A_p$$

herauskommt.

Falls für einen Werth $x = a$ das Integral $\int\limits_{0}^{\varepsilon} d\,\alpha\,(f(a+\alpha) + f(a-\alpha))$ convergent ist, während $f(x)$ für $x = a$ ohne Maxima so unendlich wird, dass $\text{Lim}\ \varepsilon\, f(a+\varepsilon) = o$, $\text{Lim}\ \varepsilon f(a-\varepsilon) = o$ [17]): so ist also das Verhalten der Function in der Umgebung des Punktes $x = a$ kein Hinderniss für ihre Entwickelung in eine Fourier'sche Reihe, vorausgesetzt, dass im Fall der Divergenz

17) Riemann, Ueber die Darst. d. e. trigon. R. Art. 12.

der Integrale $\int\limits_{a\pm\varepsilon}^{a} d(\alpha)\, d\,\alpha$ die in diesem Artikel angegebene Definition der Fourier'schen Coefficienten zu Grunde gelegt wird.

25. Gegenwärtige Beziehungen der beiden Hauptsätze des Art. 3 zu einander.

Die beiden Hauptsätze des Art. 3: dass erstens zwischen den Grenzen $-\pi$, $+\pi$ eine Function nur auf eine Weise in eine trigonometrische Reihe mit dem Gliede $a_p \cos. px + b_p \sin. px$ entwickelt werden könne, und dass zweitens die Coefficienten dieser Reihe die Fourier'sche Form haben, diese beiden Hauptsätze der Theorie der trigonometrischen Reihen sind ihr durch die in der Einleitung erwähnte und durch die vorliegende Untersuchung nunmehr sicher eingefügt. Die Beziehung jener Sätze zu einander giebt zu folgenden Bemerkungen Anlass.

Es versteht sich von selbst, dass der erste Satz in demselben Umfang in Bezug auf die Beschaffenheit der Function $f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + \ldots.$ gilt, wie der zweite, und dass dies nicht umgekehrt werden kann. Deshalb ist der erste Satz ein selbständiger und keine blosse Folge des zweiten: ein ähnliches Verhältniss, wie ich es als zwischen den beiden Hauptsätzen der Theorie der darstellenden Integrale bestehend angegeben habe (Allgemeine Lehrsätze etc., Borch. Journ. Bd. 79, pag. 38, Einleitung). In unserem Falle verhält sich die Sache so.

Lassen wir uns die Annahme genügen, dass die Reihensumme $f(x)$ nicht unendlich wird, so darf sie doch noch, vermöge der durch den zweiten Satz ihr auferlegten Bedingung der Integrirbarkeit in jedem kleinsten Intervall einmal divergiren, während Herr Cantor den ersten Satz nur unter der Voraussetzung beweist, dass die Divergenzpunkte der Reihe eine gewisse Vertheilung zeigen, die aus jedem Intervall andere Intervalle herauszuheben gestattet, in denen kein Divergenzpunkt liegt. Insofern wird also durch den Gültigkeitsumfang, in welchem wir hier den zweiten Satz wiederhergestellt haben, der des ersten noch erweitert. Dagegen setzt der erste Satz in der Fassung des Herrn Cantor gar keine Einschränkung fest hinsichtlich der Grösse der Sprünge der Function f(x) in den Strecken, in denen diese Reihe convergirt, während für den zweiten Satz durch die bekannte Bedingung der Integrirbarkeit die relative Höhe dieser Sprünge wesentlich eingeschränkt und damit zugleich die Selbständigkeit des ersten Satzes gewahrt wird: es sei denn, dass es Beziehungen zwischen Bestimmtsein und Integrirbarkeit der durch trigonometrische Reihen dargestellten Functionen gebe, worüber Vermuthungen zu äussern, ich mich indessen nicht veranlasst fühle.

26. Kurze Zusammenfassung der Resultate dieser Abhandlung.

Die Function

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos. x + b_1 \sin. x) + (a_2 \cos. 2x + b_2 \sin. 2x) + \ldots$$

erfülle in den Strecken, in denen alle ihre Werthe endlich sind, die Bedingung der Integrirbarkeit. Wenn f(x) in Punkten unendlich ist oder wird, von denen einer a sei, so finde dies so statt, dass entweder die Integrale:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0} \int_b^{a-\varepsilon} d\,\alpha\, f(\alpha)\,,\ \mathrm{Lim}_{\varepsilon_1 = 0} \int_{a+\varepsilon_1}^{c} d\,\alpha\, f(\alpha)$$

endlich und bestimmt sind, oder, wenn dies nicht der Fall ist, so, dass die Function ohne Maxima unendlich wird, dass $\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0}\ \varepsilon\, f(a \pm \varepsilon) = 0$, und dass das Integral

$$\int_0^{\varepsilon} d\,\alpha\,(f(a + \alpha) + f(a - \alpha))$$

endlich sei. Wenn endlich die Unendlichkeitspunkte im Intervall $-\pi \ldots +\pi$ in unbegrenzter Zahl vorkommen, so gelte von ihrer Vertheilung und vom Sinne eines Integrals $\int_{-\pi}^{+\pi} d\,\alpha\, f(\alpha)$, was im Art. IX der Abhandlung: Borch. Journ. Bd. 79, pag. 21 gesagt ist.

Sobald alle vorstehende Bedingungen erfüllt sind, ist es erlaubt, die Coefficienten durch die Fourier'sche Form auszudrücken, und wenn dabei die Integrale nach der gewöhnlichen Auffassung ihren Sinn verlieren, so sind sie, falls f(x) für x = a unendlich wird oder ist, als

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0}\left(\int^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}\right)$$

zu definiren.

Schluss.

Wenn die semitische Ursage dem mühelosen Genuss im Paradise die harte Arbeit des Gerechten nach dem Sündenfall gegenüberstellt, so zeigt unsere Wissenschaft ähnliche Gegensätze. Nachdem die etwa mit Fourier und Poisson abschliessende analytische Epoche am immer erneuten Entdecken von Formeln und Sätzen, meist wenig bekümmert um deren genauere Begründung, deren Gültigkeitsbereich, u. s. w. sich ergötzt hatte, müssen wir, ein bedächtigeres Geschlecht, die wir die feineren Unterscheidungen der neueren Mathematik, die Begriffe von der unbedingten, der gleichmässigen Convergenz u. a. m. vom Baume der Erkenntniss gepflückt haben, was die Analytiker jener Epoche am Wege fanden, mit früher nicht geahnten Schwierigkeiten ringend, der Wissenschaft von Neuem erwerben. Freilich lohnt uns dafür das befriedigende Bewusstsein, wenn auch nicht selten hart erkämpften doch in seinem genau erforschtem Umfange fortan gesicherten Besitzes.

Anhang
über den Fundamentalsatz der Integralrechnung.

Der wichtigste und nützlichste Satz der Integralrechnung, der seinem Entdecker als etwas ganz Erstaunliches hatte erscheinen müssen, wenn dieser nur das Vermögen in Zahlen zu denken und gar kein geometrisches Organ gehabt hatte: das ist der Satz vom Zusammenhang zwischen dem unbestimmten Integral und dem bestimmten. Er lautet:

Ist F(x) eine Function, die differenzirt die Function f(x) liefert, und ist F(x) im Intervall $A \leqq x \leqq B$ stetig, so ist: $\mathrm{Lim}_{n=\infty} \left\{ (x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \right\}$, wo $A < a < x_1 < x_2 \ldots x_{n-1} < x < B$ im nämlichen Intervall von x genau gleich $F(x) - F(a)$.

Wenn man auch noch f(x) stetig oder wenigstens nur mit einer endlichen Anzahl Sprünge behaftet voraussetzt, ist es leicht durch geometrische Betrachtungen den Satz über allen Zweifel zu erheben. Der Beweis ist dann so zu führen, dass man zeigt, wie der Limes der Summe $(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots$ mit dem bekannten Flächenraum $\int_a^x f(\alpha)\, d\alpha$ identisch ist. Weiter findet man $\frac{d}{dx}\int_a^x d\alpha\, f(\alpha) = f(x)$, und nach der Voraussetzung ist $\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$. Man hat dann nur noch zu zeigen, dass zwei Functionen die denselben Differentialquotienten haben, sich nur durch eine Constante unterscheiden können.

Indessen benützt erstens dieser Beweis geometrische Vorstellungen, und der Analytiker darf sich erst zufrieden geben, wenn seine Theorien so durchgeführt sind, als ob es gar keine Geometrie gäbe. Zweitens wird der Beweis ganz ungenügend, wenn von f(x) nur die Integrirbarkeit vorausgesetzt wird, weil alsdann allerdings in jedem kleinsten Intervall von x ein Punkt vorkommen wird, für den

$$\frac{d}{dx}\int_a^x d\,\alpha\, f(\alpha) = f(x)$$

ist (s. Versuch etc. Borch. Journ. Bd. 79, pag. 21, Art. II letztes Alinea), aber auch in jedem kleinsten Intervall Punkte existiren können, für welche diese Gleichung nicht erfüllt ist (s. ebendort, Art. IV). Der in Rede stehende Fundamentalsatz der Integralrechnung bedarf also des Beweises.

Die Voraussetzungen unter denen der Fundamentalsatz hier bewiesen werden soll.

Was zunächst ohne Beweis einleuchtet, weil in der Definition enthalten, ist, dass man setzen darf:

$$\int_a^x d\,\alpha\, f(\alpha) = \mathit{\Delta}(x) - \mathit{\Delta}(a),$$

falls wieder $A < a < x < B$, $f(x)$ im Intervall A und B integrirbar ist, und unter $\mathit{\Delta}(x)$ z. B. verstanden wird:

$$\int_A^x d\,\alpha\, f(\alpha).$$

Es kommt also nur auf den Nachweis von $F(x) - F(a) = \mathit{\Delta}(x) - \mathit{\Delta}(a)$ an. Dem Beweis, wie ich ihn unten führen werde, liegen über den Differentialquotienten $f(x)$ von $F(x)$ folgende Voraussetzungen zu Grunde:

Es sollen im Intervall $A \ldots B$ integrirbar sein die Functionen:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} = f_1(x)\ ,\ \mathrm{Lim}_{\varepsilon = 0} \frac{f(x-\varepsilon) - f(x)}{-\varepsilon} = f_2(x)$$

und wenn man setzt $\mathit{\Delta}_1(x) = \int_A^x d\,\alpha\, f_1(\alpha)$, $\mathit{\Delta}_2(x) = \int_A^x d\,\alpha\, f_2(\alpha)$, so soll sein:

$$\mathit{\Delta}_1(x) = \mathit{\Delta}_2(x).$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn, unter σ_p den grössten absoluten Werth der Differenz $f_1(x) - f_2(x)$ im Intervall δ_p verstanden und $B - A = \delta_1 + \delta_2 + \dots \delta_n$ gesetzt, der Limes $n = \infty$

$$\delta_1 \sigma_1 + \delta_2 \sigma_2 + \dots \delta_n \sigma_n$$

gleich Null ist. Es ist hinzuzufügen, dass, wenn die obigen Voraussetzungen erfüllt sind, auch

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} = f_3(x)$$

integrirbar ist, und dass $\varDelta_3(x) = \int\limits_A^x d\,\alpha\, f_3(\alpha) = \varDelta_1(x) = \varDelta_2(x)$ ist.

Wie ich (Anmerk. 11) schon angeführt, ist die allgemeinste Auffassung des Differentialquotienten:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0,\,\varepsilon_1=0} \frac{F(x+\varepsilon) - (x-\varepsilon_1)}{\varepsilon + \varepsilon_1},$$

von der die obigen specielle Fälle sind, und ich habe Sorge getragen, im Vorigen die Bedingungen für f(x) und F(x) so weit zu lassen, als unser Beweisverfahren gestattet. Liegt jedoch daran nichts, so kann man sie durch die kürzere ersetzen, dass das Integral des wie immer entstanden gedachten Differentialquotienten stets dieselbe endliche und bestimmte Function seiner Grenzen sei.

Beweis des Fundamentalsatzes.

Es soll gezeigt werden, dass unter den Voraussetzungen des vorigen Art. die Grösse:

$$F(x) - F(a) - \int\limits_a^x d\,\alpha\, f_r(\alpha)$$

Null ist, wenn $f_r(x)$ einen der beiden Differentialquotienten $\dfrac{F(x \pm \varepsilon) - F(x)}{\pm \varepsilon}$ vorstellt.

Wir setzen $x + p\delta$ statt x und bilden die Summe nach p, d. i. die Grösse:

$$S(x, \delta) = \sum_{p=o}^{p=n} \delta\, F(x + p\delta) - n\delta\, F(a) - \sum_{p=o}^{p=n} \int_a^{x+p\delta} d\alpha\, f_r(\alpha),$$

wo $n\delta = \Delta$ und $x + \Delta < B$ sei. Wir finden sodann:

$$\frac{S(x \pm \varepsilon, \delta) - S(x, \delta)}{\pm \varepsilon} = \sum_{p=o}^{p=n} \delta \frac{F(x \pm \varepsilon + p\delta) - F(x + p\delta)}{\pm \varepsilon}$$
$$- \sum_{p=o}^{p=n} \frac{\delta}{\pm \varepsilon} \int_{x+p\delta}^{x \pm \varepsilon + p\delta} d\alpha\, f_r(\alpha).$$

Lässt man hierin ε verschwinden, so ist leicht einzusehen, dass die beiden Summen rechts für $\delta = o$ sich derselben Grenze nähern. Denn ein Element der ersten Summe wird:

$$\delta \operatorname{Lim}_{\varepsilon = o} \frac{F(x + p\delta \pm \varepsilon) - F(x + p\delta)}{\pm \varepsilon}$$

d. i. $\delta f_1(x + p\delta)$ oder $\delta f_2(x + p\delta)$. Und ein solches der zweiten Summe ist zunächst $\delta f_r(x + p\delta \pm \bar{\varepsilon})$, $o \leqq \bar{\varepsilon} \leqq \varepsilon$, worauf $\varepsilon = o$ zu setzen ist. Die Differenz beider Elemente ist entweder nicht grösser wie der grösste Werthunterschied einer der Werthevorräthe $f_1(x)$, $f_2(x)$ im Intervall $x + (p - 1)\delta \ldots x + p\delta$ oder $x + p\delta \ldots x + (p + 1)\delta$, oder nicht grösser als der grösste Unterschied $f_1(x) - f_2(x)$ in den nämlichen Intervallen.

Da nun die Summe dieser mit δ multiplicirten Unterschiede verschwindet, wenn δ verschwindet, so kann δ offenbar stets so klein angenommen werden, dass durch genügende Verkleinerung von ε die Grösse

$$\frac{S(x \pm \varepsilon, \delta) - S(x, \delta)}{\pm \varepsilon}$$

für jeden vorgelegten Werth x unter eine vorgeschriebene Grenze sinkt. Ausserdem ist $S(x, \delta)$ eine stetige Function von x.

Nun führen wir ein Intervall $x_o \ldots x_1$ ein, welches dem Intervall angehöre, in dem x sich bewegen darf, und setzen:

$$\varrho(x) = \left\{ S(x, \delta) - S(x_o, \delta) \right\} (x_1 - x_o) + \left\{ S(x_1, \delta) - S(x_o, \delta) \right\} (x - x_o).$$

Die Function $\varrho(x)$ ist im Intervall $x_o \leqq x \leqq x_1$ stetig und man hat:

$$\varrho(x_o) = o, \varrho(x_1) = o.$$

Also giebt es im Intervall $x_0 < x < x_1$ mindestens einen solchen Punkt x', dass die Differenzen $\varrho(x') - \varrho(x' + \varepsilon)$, $\varrho(x') - \varrho(x' - \varepsilon)$, wenn sie von Null verschieden sind, gleiche Vorzeichen haben, und dass unter denselben Umständen die Quotienten:

$$\frac{\varrho(x') - \varrho(x' - \varepsilon)}{-\varepsilon}, \quad \frac{\varrho(x') - \varrho(x' + \varepsilon)}{\varepsilon}$$

verschiedene Vorzeichen haben.

Es ist aber:

$$\frac{\varrho(x') - \varrho(x' \pm \varepsilon)}{\pm \varepsilon} = (x_1 - x_0)\frac{S(x' \pm \varepsilon, \delta) - S(x', \delta)}{\pm \varepsilon} - \left\{S(x_1, \delta) - S(x_0, \delta)\right\}.$$

Wir nehmen nun δ so klein an, dass durch genügende Verkleinerung von ε das erste Glied rechts kleiner als eine sehr kleine Grösse τ gemacht wird. Da die linke Seite entweder Null ist oder mit ε ihr Zeichen wechselt, so kann das zweite Glied rechts: $S(x_1, \delta) - S(x_0, \delta)$ nicht grösser als τ sein. Dasselbe Räsonnement gilt aber für jeden Werth x_1. Daraus folgt, dass $S(x, \delta)$, wenn δ unendlich klein ist, unendlich wenig um einen constanten Werth schwankt, oder

$$\mathrm{Lim}_{\delta = 0}\, S(x, \delta) = \text{constans}.$$

Nun war:

$$S(x, \delta) = \sum_{p=0}^{p=n} \delta\, F(x + p\delta) - n\delta\, F(a) - \sum_{p=0}^{p=n} \delta \int_a^{x+p\delta} d\,\alpha\, f(\alpha).$$

Also findet man für $n\delta = \Delta$, $\delta = 0$:

$$S(x) = \int_0^{\Delta} d\,\alpha\, F(x + \alpha) - \Delta\, F(\alpha) - \int_0^{\Delta} d\alpha \int_a^{x+\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \text{constans},$$

oder

$$\int_x^{x+\Delta} F(\alpha)\, d\,\alpha - \int_x^{x+\Delta} d\,\alpha \int_a^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \text{constans}.$$

Setzt man $x = a$, um die Constante zu bestimmen, so findet man zuerst:

$$\int_x^{x+\Delta} F(\alpha)\, d\,\alpha - \int_x^{x+\Delta} d\,\alpha \int_a^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta) = \int_a^{a+\Delta} F(\alpha)\, d\,\alpha - \int_a^{a+\Delta} d\,\alpha \int_a^{\alpha} d\,\beta\, f(\beta),$$

oder, wenn mittlere Werthe genommen werden:

$$\varDelta \left\{ F(\xi) - \int_a^{\xi} d\beta\, f(\beta) \right\} = \varDelta \left\{ F(\bar{\alpha}) - \int_a^{\bar{\alpha}} d\beta\, f(\beta) \right\},$$

$$x \leqq \xi \leqq x + \varDelta,\ a \leqq \bar{\alpha} \leqq a + \varDelta.$$

Lässt man den Factor $\varDelta$ fort, und lässt dann $\varDelta$ unendlich klein werden, so wird $\xi = x$, $\bar{\alpha} = a$ und es verschwindet das zweite Glied in der Klammer rechts. Somit findet man endlich:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x d\alpha\, f(\alpha)$$

Q. E. D.

Wenn man bedenkt, dass, im Falle $F(x)$ eine der Weierstrass-schen Functionen vorstellt, wie die von mir veröffentlichte (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 29), das Integral ihres Differentialquotienten, der keine integrirbare Function ist, eine zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gänzlich unbestimmte Grösse sein würde, wiewohl die Weierstrass'sche Function selbst stetig ist: so steht a priori der Muthmassung nichts im Wege, dass hier keine Möglichkeit ausgeschlossen ist, dass es Functionen geben könne, deren irgend wie definirter Differentialquotient ein Integral liefert, dass von ihnen verschieden aber bestimmt ist, und dergl. mehr. Um so nöthiger schien es mir durch einen präcis formulirbaren Satz — wenn er auch vorerst nur eine ausreichende Bedingung enthält, — der Integralrechnung den locker werdenden Boden wieder zu festigen.