Ueber die Grenzwerthe

eines

unendlichen Potenzausdruckes

der Form $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$

Von

L. Seidel.

Aus den Abhandlungen d. k. bayer. Akademie d. W. II. Cl. XI. Bd. I. Abth.

München 1870.

Verlag der k. Akademie,

in Commission bei G. Franz.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Ueber die

Grenzwerthe eines unendlichen Potenz-Ausdruckes.

Von

L. Seidel.

Eisenstein hat in einem Aufsatze des 28. Bandes von Crelle's Journal die Aufgabe behandelt, eine Function y von x, welche definirt ist durch die Gleichung

$$\text{I.} \qquad x^y = y \quad ,$$

zu entwickeln nach den Potenzen von $\log x$.*) Er setzt zugleich, ohne eine nähere Untersuchung deshalb anzustellen, voraus, dass der unendliche Potenz-Ausdruck

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

(in welchem unter x eine positive Grösse verstanden wird) nach der also bestimmten Grenze y convergire so lange, und nur so lange, als $x \leq 1$ ist; und da die Schranken für die Convergenz seiner Reihe andere sind, so statuirt er die Gleichheit der letzteren mit dem unendlichen Ausdruck innerhalb des engeren Werthgebietes von x, welches den zweierlei Umgrenzungen zugleich angehört. Das wirkliche Verhalten des unendlichen Potenzausdruckes in Bezug auf Convergenz ist indess

*) In der von ihm gewählten Bezeichnung ist die Bedeutung der Buchstaben x und y umgetauscht gegen die hier angenommene.

anders, als Eisenstein voraussetzt; und da die Untersuchung auf einige eigenthümliche und, wie mir scheint, nicht uninteressante Momente führt, so werde ich hier dieselbe etwas näher darlegen.

1.

Als stehende Bezeichnung sei gesetzt

$$\text{II.} \qquad x^x = x_1 \;;\; x^{x_1} = x_2 \;;\; x^{x_2} = x_3 \quad \ldots \quad x^{x_r} = x_{r+1} \;; \; \ldots$$

Betrachtet man nun zunächst den Fall $x > 1$, als den einfachsten, so ist klar, dass man hat

$$x < x_1 < x_2 < \ldots ,$$

dass also die aufeinander folgenden x_r entweder zuletzt über alle Grenzen wachsen, oder sich einer festen Grenze y, die selbst grösser als 1 ist, und der Gleichung I. genügt, von unten her beständig annähern müssen. Diese Gleichung, nach welcher

$$\log x = \frac{\log y}{y}$$

wird, gibt für x den Maximalwerth $\sqrt[e]{e}$, zu $y = e$ gehörig; zu jedem x zwischen 1 und dem Maximalwerth gibt sie zwei Werthe y, den einen zwischen 1 und e, den andern zwischen e und ∞. Für Werthe $x > \sqrt[e]{e}$ (welchen keine reellen y entsprechen) muss demnach der unendliche Potenzausdruck divergiren; dagegen lässt sich leicht zeigen, dass er für

$$1 < x < \sqrt[e]{e}$$

wirklich nicht über alle Grenzen wächst, und also noch nach einem zugehörigen y convergirt. Denn wenn $x \leqq e^{\frac{1}{e}} < e$, so ist zunächst

$$x^x < (e^{\frac{1}{e}})^e \,, \text{ d. i. } x_1 < e$$

hiermit dann wieder ebenso

$$x^{x_1} < (e^{\frac{1}{e}})^e \,, \text{ d. i. } x_2 < e$$

und so für alle folgenden x, so dass der Werth e von denselben nie erreicht, noch weniger überschritten werden kann. — Demnach ist nicht 1 sondern erst $\sqrt[e]{e}$ der grösste Werth von x, für welchen der unendliche Potenzausdruck convergirt; und für Werthe x zwischen 1 und diesem Maximalwerth ist unter den beiden reellen y, die der Gleichung I genügen, dasjenige der Grenzwerth, welches $< e$ ist.

2.

Wenn man jetzt voraussetzt

$$o < x < 1$$

so wird der Gang der Grössen $x_1, x_2, \ldots$ ein anderer. Man hat hier zunächst

$$x^1 < x^x < x^o, \text{ d. i. } x < x_1 < 1;$$

hiermit dann ebenso

$$x^1 < x^{x_1} < x^x, \text{ d. i. } x < x_2 < x_1$$

ferner

$$x^{x_1} < x^{x_2} < x^x, \text{ d. i. } x_2 < x_3 < x_1$$

u. s. w., so dass jedes neue x der Grösse nach zwischen die beiden ihm zunächst vorausgehenden fällt, und sich im Ganzen folgendes Verhalten ergibt:

$$\text{III.} \quad o < x < x_2 < x_4 < \ldots . \quad < x_{2n-2} < x_{2n} < \ldots \quad < x_{2n+1} < x_{2n-1} < \ldots$$
$$< x_3 < x_1 < 1$$

Diese Art des Fortschreitens verträgt sich offenbar mit der gleichzeitigen Annäherung der x_{2n} von unten her und der x_{2n+1} von oben her an dieselbe zwischenliegende Grenze y, die der Gleichung I genügt; aber auch mit der Convergenz der x_{2r} gegen eine kleinere Grenze u und der gleichzeitigen der x_{2r+1} gegen eine grössere v, soferne u und v echte Brüche sind, die den simultanen Gleichungen entsprechen:

$$\text{IV.} \qquad x^u = v \quad ; \qquad x^v = u$$

oder auch der aus ihnen abgeleiteten Gleichung (in welcher der Buchstabe v mit u vertauscht werden darf)

$$\text{V.} \qquad x^v \log x - \log v = o$$

Dabei ist evident, dass die Gleichung I auch für die gegenwärtig angenommene Begrenzung von x immer ein brauchbares y, und zwar hier nur Eines liefert: denn lässt man in ihr y die Werthe o bis 1 durchlaufen, so geht zugleich x beständig wachsend von o bis 1. Andrerseits ist auch klar, dass das in solcher Weise mit x verbundene y, wenn man es in Gleichung V statt v setzt, auch diese Gleichung erfüllt, weil ja die beiden in IV, aus welchen V hervorgeht, selbst die Gl. I als speciellen Fall in sich schliessen. Es liegt also hier vor eine transcendente Gleichung (V), von welcher man weiss, dass sie alle Wurzeln einer einfacheren ähnlichen Gleichung (I) enthält, und in Betreff deren nun die Frage zu stellen ist, ob sie ausser diesen Wurzeln $v = y$ (zu echten Brüchen x) auch noch andere (für unsere Anwendung reelle und zwischen o und 1 gelegene) Wurzeln v hat. Diese letzteren müssen, wenn sie überhaupt existiren, paarweise vorhanden sein, weil zu jedem gefundenen v, welches kein y ist, nach der zweiten Gleichung in IV, ein von ihm verschiedenes u sich ergibt, welches mit ihm zugleich ein echter Bruch ist, und der nehmlichen Gleichung V entspricht.

3.

Obgleich man hier nicht so wie in der Algebra die Gleichung I benützen kann, um diejenigen Wurzeln zu isoliren, welche in V neben den gemeinschaftlichen noch stecken können, so lässt sich doch im vorliegenden Falle etwas sehr Aehnliches mittelst einer Hilfsvariabelen erreichen, auf deren Einführung man durch die Kenntniss der besonderen Lösung durch I geleiter wird.

Setzt man nemlich, anschliessend an die Form der Gleichungen IV

VI. $$v = x^u = x^v e^{\vartheta} = u e^{\vartheta}$$

so ist $\vartheta = o$ wenn $u = v = y$; zugleich gelingt es, wenn ϑ nicht verschwindet, die drei Grössen x, u, v explicite durch ϑ darzustellen.

Substituirt man nehmlich zunächst in V für x^v seinen Werth $v e^{-\vartheta}$ und für log x den hieraus folgenden Werth $\frac{\log v - \vartheta}{v}$, so bleibt von v nur der Logarithmus in der Gleichung, die, wie es sein muss, sich identisch erfüllt für $\vartheta = o$. Hat ϑ irgend einen anderen Werth, so erhält man direct

VII. $$\log v = -\frac{\vartheta}{e^{\vartheta} - 1}$$

Aus VI ist aber auch

$$v : u = e^{\vartheta}$$

und hiermit ergibt sich denn für das dem eben gefundenen v conjugirte u die Gleichung:

$$\text{VIII.}\qquad \log u = -\frac{\vartheta}{1 - e^{-\vartheta}} = \frac{\vartheta}{e^{-\vartheta} - 1}$$

Die letztere Form dieses Ausdrucks lässt erkennen (was auch direct aus Gl. VI zu lesen ist), dass u und v ihre Rollen tauschen, wenn ϑ sein Zeichen wechselt. Will man, wie gleich Anfangs angenommen wurde, immer mit v den grösseren der beiden zusammengehörigen Werthe benennen, so hat man ϑ immer positiv zu denken.

Natürlich ergibt sich nun aus VI auch x durch ϑ: am elegantesten ausgedrückt mittelst hyperbolischer Functionen wie folgt:

$$\text{IX.}\qquad \log x = -\frac{1}{2}\vartheta \text{ cosec hyp.} \frac{1}{2}\vartheta \,.\, e^{\frac{1}{2}\vartheta \,.\, \text{cotg hyp} \frac{1}{2}\vartheta}$$

Man überzeugt sich leicht, dass jede der drei Grössen v, u, x immer in Einerlei Sinn sich verändert, während ϑ alle positiven Werthe, von ∞ bis zu Null herab, durchläuft, — und zwar nimmt v zugleich mit ϑ fortwährend ab, indess u und x zunehmen. An den Differential-Coefficienten von log v und log u wird dies sofort erkannt, indem man den Ausdruck e^{ϑ} durch die Reihe ersetzt; was x betrifft, so findet sich

$$\frac{d \log \log \frac{1}{x}}{d\vartheta} = \frac{1}{\vartheta} - \frac{\vartheta}{(2 \text{ Sin hyb. } \frac{1}{2}\vartheta)^2}$$

$$= \frac{(e^{\frac{\vartheta}{2}} - e^{-\frac{\vartheta}{2}})^2 - \vartheta^2}{\vartheta\,(e^{\frac{\vartheta}{2}} - e^{-\frac{\vartheta}{2}})^2}$$

nothwendig positiv für positive ϑ. Die extremen Werthe, zwischen welchen sich dabei die drei Grössen bewegen, sind folgende:

für $\vartheta = \infty \ldots \quad v = 1, \quad u = o, \quad x = o$

für $\vartheta = 0 \ldots \quad v = \frac{1}{e}, \quad u = \frac{1}{e}, \quad x = \frac{1}{e^e}$

Jedes x zwischen o und $\frac{1}{e^e}$ wird also Einmal, und nur Einmal auftreten mit einem ihm zugehörigen Paare von Werthen v, u, die nicht coincidiren; dagegen kommen die $x > \frac{1}{e^e}$ für kein von Null verschiedenes ϑ zum Vorschein. Für diese letzteren hat also Gleichung V keine andere reelle Wurzel als das y aus I *) und der unendliche Potenzausdruck muss gegen dieses als seine Grenze convergiren; während für die kleineren x noch zu untersuchen bleibt, ob die Annäherung schliesslich an den Werth y oder an die beiden zu demselben x gehörigen Grössen u, v stattfindet. Was den Grenzfall $x = \frac{1}{e^e}$ selbst angeht, so fallen für ihn die drei Grössen u, v, y in dem Werthe $\frac{1}{e}$ zusammen, und zwar in der Art, dass, wenn man diese drei Functionen als Ordinaten zu Abscissen x aufgetragen denkt, an der bezeichneten Stelle die beiden hier endigenden Curvenäste der u und v, von der Ordinate berührt, in einander verlaufen, während der Ast der y unter endlichem Winkel sie schneidet.

4.

Wenn die von einander verschiedenen u, v zu einem $x < 1$ existiren, so schliessen sie den Werth y nothwendig zwischen sich ein. Denn in der Gleichung $x^u = v$ kann man den Exponenten vom Werthe y aus nicht nach der Einen oder der andern Seite hin verändern, ohne dass der Werth der Potenz, ebenfalls vom Werthe y aus, sich im entgegengesetzten Sinne verändert.

Andrerseits bleiben die Grössen x, x_1, x_2, ... nothwendig immer ausserhalb solcher Grössen u, v, die unseren Gleichungen IV entsprechen. Denn weil $v < 1$, so hat man zunächst

---

*) Die unendlich vielen Paare complexer und auch im gewöhnlichen speciellen Sinne des Wortes conjugirter Wurzeln u, v, welche man mittelst rein imaginärer ϑ zu allen positiven x noch erhält, sind für unsere Untersuchung ohne Bedeutung. — Dass übrigens für die Werthe von $x > \frac{1}{e^e}$ der Ausdruck in V keine andere reelle Wurzel v haben kann, folgt auch aus der Betrachtung seines partiellen Differentialcoefficienten, nach v genommen, welcher nicht Null werden kann, wenn x jene Grenze überschreitet.

$$x < x^v, \quad \text{d. h.} \quad x < u;$$

hiermit ferner $$x^x > x^u, \quad \text{d. h.} \quad x_1 > v$$

ebenso $$x^{x_1} < x^v, \quad \text{d. h.} \quad x_2 < u$$

$$x^{x_2} > x^u, \quad \text{d. h.} \quad x_3 > v$$

u. s. w.

Aus diesem Verhalten ist klar, dass weder die x von geradem noch die von ungeradem Index dem zwischen u und v gelegenen y sich ohne Ende nähern können: es müssen also die ersteren den Werth u selbst und die anderen den Werth v zur Grenze haben. Ihr Verhalten tritt dadurch in continuirlichen Zusammenhang mit demjenigen, welches im extremen Falle $x = o$ stattfindet, wo nehmlich alle x von geradem Index dem Werth o (Grenzwerth von u für $\vartheta = \infty$) und alle von ungeradem Index dem Werth 1 (conjugirter Grenzwerth von v) von Anfang an gleich sind.

Das Gesammtergebniss der Discussion unseres unendlichen Potenzausdruckes für positive x ist also folgendes:

Lässt man x von o an allmählich wachsen bis zu dem Werthe $\frac{1}{e^e}$, so ist die Grenze von x_{2n}, für unendlich wachsende n, eine Funktion u von x, welche nach und nach von o bis $\frac{1}{e}$ wächst, und die Grenze von x_{2n+1} ist unter gleichen Umständen eine andere Funktion v, welche nach und nach abnimmt von 1 bis $\frac{1}{e}$. Man kann direct beliebig viele zusammengehörige x, u, v rechnen, indem man in den Gleichungen IX, VIII, VII für ϑ willkührliche positive Werthe setzt. Erreicht x den Werth $\frac{1}{e^e}$, so fallen u und v beide im Werthe $\frac{1}{e}$ zusammen. Für grössere x, bis zum Maximalwerthe $\sqrt[e]{e}$, convergiren die x_{2n} und die x_{2n+1} gegen ein und dieselbe Grenze y, die allmählich von $\frac{1}{e}$ bis e zu-nimmt, und überhaupt der Gleichung I genügt. Erst da, wo diese Gleichung ein reelles y versagt, nehmlich jenseits $x = \sqrt[e]{e}$, hört auch der Potenzausdruck zu convergiren auf.

Von den beiden Functionen

$$\text{Lim. } x_{2n} \text{ und Lim. } x_{2n+1}$$

kann man die erste allgemein bezeichnen als die kleinste reelle Wurzel der Gleichung V: die andere ist grösste Wurzel dieser Gleichung für $x < 1$, aber kleinste Wurzel für $x > 1$. Diese beiden Functionen fallen, wie man sieht, in dem grössten Theil ihres reellen Verlaufes, zwischen $x = \sqrt[e]{e}$, und $x = \frac{1}{e^e}$, unter sich und mit der Wurzel y der Gleichung I (und zwar der kleineren, wo diese Gleichung zwei Lösungen darbietet) zusammen; von der bezeichneten Stelle bis zu $x = o$ hat aber jede von den dreien ihre besondere Fortsetzung, die ohne Unterbrechung der Continuität sich an den allen gemeinsamen Theil anschliesst.

Die Reihe, welche Eisenstein mit Hilfe unserer Gleichung I abgeleitet hat, convergirt seiner Untersuchung nach innerhalb der Strecke $x = \frac{1}{\sqrt[e]{e}}$ bis $x = \sqrt[e]{e}$, die, wie man sieht, nach unten nicht so weit, nach oben nur ebenso weit reicht, als diejenige, in welcher der unendliche Potenzausdruck der nehmlichen Gleichung genug thut. Für den Umfang des reellen Gebietes, in welchem die beiden unendlichen Ausdrücke dieselbe Function darstellen, setzt also lediglich die Bedingung der Convergenz der R e i h e den Markstein.