BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE HEFT 94

RUDOLF ALBRECHT

Über Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit Cauchyschen Charakteristiken

Vorgelegt von Herrn Joseph Lense am 7. März 1958

MÜNCHEN 1959
VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG

Gedruckt mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft
in der C. H. Beck'schen Buchdruckerei, Nördlingen
Printed in Germany

INHALT

EINLEITUNG

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind Systeme von m partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit m abhängigen und $n+1$ unabhängigen Veränderlichen im Reellen, für die CAUCHYsche Charakteristiken existieren. Im besonderen werden quasilineare Systeme behandelt. Die Systeme der hier betrachteten Klasse haben die Eigenschaft, daß unter geeigneten Voraussetzungen bei Vorgabe einer beliebigen n-dimensionalen Integralmannigfaltigkeit eine $(n+1)$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit, welche die vorgegebene enthält, aus der Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten werden kann.

Die erste ausführliche Untersuchung von Systemen dieser Klasse verdankt man M. HAMBURGER [1, 2, 3, 4, 5].[1] In der von ihm gegebenen formalen Integrationstheorie werden die partiellen Differentialgleichungen auf eine Anzahl von Systemen PFAFFscher Gleichungen zurückgeführt, die jeweils als unbeschränkt integrabel vorausgesetzt werden. Sind entsprechend viele Integrale dieser Systeme bekannt, dann kann daraus das allgemeine Integral des Systems partieller Differentialgleichungen erhalten werden. Der Charakteristikenbegriff wird dabei weder erwähnt noch benützt. Später wurde die HAMBURGERsche Theorie von E. v. WEBER weiter ausgebaut [6, 7, 8, 9, 10]. Im Gegensatz zu diesen früheren Untersuchungen wird in der vorliegenden Arbeit das Anfangswertproblem und der Charakteristikenbegriff in den Vordergrund gestellt und die Lösung durch Integration längs eindimensionaler Charakteristiken erhalten. Als wichtigste Arbeiten im Sinne der hier verfolgten Methode seien genannt jene von E. HOLMGREN [11] über lineare, von O. PERRON [12] über halblineare und von R. COURANT und P. LAX [13][2] über quasilineare Systeme mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

Im folgenden werden zunächst lokale Betrachtungen durchgeführt und mit Hilfe einiger Begriffe des CARTANschen Kalküls [14, 15, 16, 17, 18] die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt, daß ein p-dimensionales Integralelement $(1 \leq p \leq n)$ des vorgelegten Differentialsystems charakteristisch ist. Systeme der betrachteten Klasse sind dann dadurch charakterisiert, daß für sie in jedem Integralpunkt des zugrunde gelegten Bereiches m nicht notwendig verschiedene charakteristische Integrallinienelemente $(p = 1)$ existieren, deren Richtungskoordinaten aus einem Eigenwertproblem für Matrizenpaare erhalten werden, und daß es zu diesen Matrizenpaaren m linear unabhängige gemeinsame Linkseigenvektoren gibt. Letzteres hat zusätzliche Bedingungen für derartige Systeme zur Folge, außer im Falle einer einzigen Differentialgleichung oder eines Systems mit nur zwei unabhängigen Veränderlichen. Für quasilineare Differentialsysteme werden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen angegeben, denen die Koordinaten der charakteristischen Integrallinienelemente genügen müssen. Nach Vorgabe von Anfangs-

[1] Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.
[2] Diese Arbeit enthält einige Unklarheiten.

werten kann gezeigt werden, daß in einem gewissen Bereich ein Teilsystem des Systems charakteristischer Gleichungen eindeutig bestimmte Lösungen hat, falls die Koeffizienten dieses Systems und die Anfangsdaten stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben, welche eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllen. Der Beweis erfolgt mit Hilfe eines äquivalenten Integralgleichungssystems, bei dem die Integration vom Anfangspunkt bis zu einem Aufpunkt längs einer Charakteristik ausgeführt wird und das iterativ gelöst werden kann. Sind gewisse Bedingungen erfüllt, so ergeben die erhaltenen Lösungen des Systems charakteristischer Gleichungen als Funktionen der Aufpunktskoordinaten Lösungen des Anfangswertproblems des Systems partieller Differentialgleichungen, und umgekehrt kann jede zweimal stetig differenzierbare derartige Lösung aus der Lösung des Systems charakteristischer Gleichungen erhalten werden. Eine beträchtliche Vereinfachung ergibt sich dabei für den Fall diagonaler bzw. diagonalisierbarer Systeme partieller Differentialgleichungen, zu denen zum Beispiel alle halblinearen Systeme der betrachteten Klasse gehören.

Die hier durchgeführte Integrationsmethode kann als Verallgemeinerung der CAUCHYschen Charakteristikenmethode einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung aufgefaßt werden.

I. POLARSYSTEM UND CHARAKTERISTISCHES SYSTEM

Im folgenden soll für nicht eingeklammerte Indizes die Summationsvereinbarung gelten. Falls nicht anderes angegeben ist, gehen lateinische Indizes von 1 bis m, griechische von 0 bis n. Alle auftretenden Veränderlichen und Funktionen werden reell vorausgesetzt.

Gegeben seien die m Funktionen

$$f_i(x^0, x^1, \ldots, x^n;\ u^1, u^2, \ldots, u^m;\ p_0^1, p_1^1, \ldots, p_n^m)$$

der Veränderlichen x^ν, u^k, p_ν^k, die wir zur Abkürzung mit

$$f_i\,(x^\nu, u^k, p_\nu^k)$$

bezeichnen. Die $N = 1 + n + (2 + n)m$ Veränderlichen deuten wir als kartesische Koordinaten in einem N-dimensionalen Raum. Für ein gewisses Wertesystem E_0: $(x_0^\nu, u_0^k, p_{\nu 0}^k)$ möge gelten

$$f_i(x_0^\nu, u_0^k, p_{\nu 0}^k) = 0.$$

Verstehen wir unter $\mathfrak{U}$ eine Umgebung von E_0 im Raum der Argumente, so sollen folgende Bedingungen erfüllt sein:

Voraussetzung I: Die Funktionen f_i mögen in $\mathfrak{U}$ stetig sein und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung bezüglich jeder der Veränderlichen x^ν, u^k, p_ν^k besitzen.

Voraussetzung IIa: In $\mathfrak{U}$ sei $Rg\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial p_\nu^k}\right) = m$.

Unter $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial p_\nu^k}\right)$ wird eine $m \times m(n+1)$ Matrix mit dem Zeilenindex i, den Spaltenindizes k, ν und den Elementen $\dfrac{\partial f_i}{\partial p_\nu^k}$ verstanden. E_0 soll dann ein „regulärer“ Integralpunkt oder ein reguläres nulldimensionales Integralelement genannt werden.

In $\mathfrak{U}$ betrachten wir das System der Gleichungen

$$f_i(x^\nu, u^k, p^k_\nu) = 0, \qquad (I, 1)$$

$$du^k - p^k_\nu dx^\nu = 0 \qquad (I, 2)$$

und schließen dieses System unter Berücksichtigung der Gln. (I, 2) durch die Gleichungen

$$a^\nu_{ik} dp^k_\nu + b_{i\nu} dx^\nu = 0, \qquad (I, 3)$$

$$dp^k_\nu \wedge dx^\nu = 0 \qquad (I, 4)$$

ab, wobei

$$a^\nu_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial p^k_\nu}, \quad b_{i\nu} = \frac{\partial f_i}{\partial x^\nu} + \frac{\partial f_i}{\partial u^l} p^l_\nu$$

gesetzt ist.

Durch das Wertesystem

$$(x^\nu_0, u^k_0, p^k_{\nu 0}; \ \delta^\lambda x^\nu, \delta^\lambda u^k, \delta^\lambda p^k_\nu)$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots, p; \quad 1 \leq p \leq n+1$$

sei im Punkte E_0 ein p-dimensionales lineares Vektorgebilde (einfacher p-Vektor samt Angriffspunkt) gegeben. Dieses bestimmt ein p-dimensionales Integralelement E_p, wenn seine Koordinaten alle linken Seiten der Gln. (I, 1, 2, 3, 4) annullieren. Für $p > 0$ nennen wir ein Integralelement E_p „gewöhnlich", wenn es wenigstens ein $(p-1)$-dimensionales reguläres Integralelement E_{p-1} enthält. Ein Integralelement E_{p-1} $(p > 1)$ heißt „regulär", wenn es gewöhnlich ist und durch E_{p-1} nicht mehr p-dimensionale Integralelemente hindurchgehen als durch ein allgemeines zu E_{p-1} benachbartes $(p-1)$-dimensionales Integralelement, andernfalls singulär. Zwei Integralelemente E_{p-1}, E'_{p-1} heißen benachbart, wenn die kartesischen Punkt- und die inhomogenen Grassmannschen Koordinaten des E'_{p-1} bestimmenden Vektorgebildes einer Umgebung derjenigen des E_{p-1} bestimmenden Vektorgebildes angehören.

Es möge für $1 \leq p \leq n$

$$(x^\nu, u^k, p^k_\nu; \ \delta^\lambda x^\nu, \delta^\lambda u^k, \delta^\lambda p^k_\nu)$$

ein p-dimensionales gewöhnliches Integralelement E_p mit dem Integralpunkt E_0: (x^ν, u^k, p^k_ν) darstellen, wobei zur Vereinfachung der Schreibweise der Index 0 wieder fortgelassen wird, obwohl sich zunächst alle folgenden Betrachtungen nur auf diesen einen Integralpunkt E_0 beziehen. Das zugehörige Polarsystem ist

$$du^k - p^k_\nu dx^\nu = 0, \qquad (I, 5)$$

$$a^\nu_{ik} dp^k_\nu + b_{i\nu} dx^\nu = 0, \qquad (I, 6)$$

$$\delta^\lambda x^\nu dp^k_\nu - \delta^\lambda p^k_\nu dx^\nu = 0. \qquad (I, 7)$$

Ist sein Rang nicht kleiner als für ein allgemeines benachbartes p-dimensionales Integralelement, so ist E_p regulär. Für $p = 0$ entfallen die Gln. (I, 7). Der Rang des Systems (I, 5) ist stets m. Damit folgt zusammen mit Voraussetzung IIa für den Rang s_0 des Systems (I, 5, 6): $s_0 = 2m$. Weiter ist der Charakter der Ordnung $p (1 \leq p \leq n)$ $s_p \leq m$. Ist insbesondere $s_n = m$, so gilt $\sum_{k=0}^{n} s_k = (2+n)\,m$, da die Charaktere bekanntlich nicht wachsende Zahlen sind, und folglich ist das Geschlecht g des abgeschlossenen Differentialsystems (I, 1, 2, 3, 4) $g = n + 1$ und $s_{n+1} = 0$.

Wir nehmen nun an, daß $s_p = m$ ist. Ist dann der Rang des Polarsystems (I, 5, 6, 7) kleiner als $(2+p)m$, so ist E_p singulär und ein „charakteristisches" Integralelement. Zur Untersuchung dieses Falles können wir uns auf das System (I, 6, 7) beschränken. Die Matrix dieses Systems ist

$$C_p = \begin{pmatrix} a^{\nu}_{ik} & b_{i\mu} \\ \varepsilon^r_k\,\delta^{\lambda} x^{\nu} & -\,\delta^{\lambda} p^r_{\mu} \end{pmatrix}, \tag{I, 8}$$

$$\varepsilon^r_k = \begin{cases} 1 \text{ für } r = k, \\ 0 \text{ für } r \neq k, \end{cases}$$

die wir uns als Übermatrix, gebildet aus der Matrix

$$(a^{\nu}_{ik}\, b_{i\mu})$$

und den p Matrizen

$$(\varepsilon^r_k\, \delta^{\lambda} x^{\nu} - \delta^{\lambda} p^r_{\mu})$$

denken, wobei i, r Zeilenindizes und k, ν, μ Spaltenindizes bedeuten. Ist also E_p ein charakteristisches Integralelement, so gilt

$$Rg\, C_p < (1 + p)\, m.$$

Da E_p ein gewöhnliches Integralelement ist, also mindestens ein reguläres Integralelement E_{p-1} enthält, ist dabei

$$Rg\, C_p \geq p m.$$

Die Gleichungen, welche die lineare Abhängigkeit der Zeilen der Matrix C_p ausdrücken, gehören zum „charakteristischen System". Wir verwenden dabei diesen Begriff in einem allgemeineren Sinn und verstehen darunter nicht nur das assoziierte System des abgeschlossenen Differentialsystems.

Haben die Gln. (I, 6, 7) des Polarsystems keine lineare Beziehung zwischen den dx^{ν} zur Folge, so können wir uns auf die Untersuchung der reduzierten Matrix

$$C'_p = \begin{pmatrix} a^{\nu}_{ik} \\ \varepsilon^r_k\, \delta^{\lambda} x^{\nu} \end{pmatrix} \tag{I, 9}$$

an Stelle der Matrix C_p beschränken. Wir nehmen deshalb an

Voraussetzung III: Für die p-dimensionalen gewöhnlichen Integralelemente, $1 \leq p \leq n$, deren Integralpunkte in $\mathfrak{U}$ liegen, sei $Rg\, C'_p = Rg\, C_p$.

Wir betrachten dementsprechend zunächst nur die Projektion des E_p bestimmenden Vektorgebildes in den (x^{ν})-Raum. Diese Projektion ist p-dimensional infolge Voraussetzung III.

Damit nun für die $(1+p)m \times (1+n)m$ Matrix C'_p

$$Rg\, C'_p < (1+p)m$$

gilt, ist infolge der getroffenen Voraussetzungen und der Struktur der Matrix C'_p notwendig und hinreichend, daß ein vom Nullvektor verschiedener Zeilenvektor

$$(l^i \delta t \;\; k_{r\lambda})$$

existiert, der bei Linksmultiplikation an C'_p

$$l^i a^{\nu}_{ik} \delta t + k_{r\lambda} \varepsilon^r_k \delta^\lambda x^\nu = 0$$

bzw.

$$l^i a^{\nu}_{ik} \delta t + k_{k\lambda} \delta^\lambda x^\nu = 0 \qquad \text{(I, 10)}$$

ergibt. δt ist ein Proportionalitätsfaktor. Gl. (I, 10) muß für jeden Index k und ν gelten. Dabei können nicht alle $l^i \delta t$ gleich Null sein, sonst würde bei von Null verschiedenen $k_{r\lambda}$ eine lineare Abhängigkeit der $\delta^\lambda x^\nu$ bestehen. Ebenso können nicht alle $k_{r\lambda}$ gleich Null sein, weil dann bei von Null verschiedenen l^i die Voraussetzung II a $Rg\,(a^{\nu}_{ik}) = m$ nicht erfüllt wäre. Gehören demnach die Koordinaten $\delta^\lambda x^\nu$ zu p Vektoren, die ein charakteristisches Integralelement E_p bestimmen, so folgt aus den Gln. (I, 10) notwendig, daß für jeden festen Index k und alle $(p+1)$-tupel (ν_σ) der Indizes ν die Determinanten

$$\left| l^i a^{\nu_\sigma}_{ik} \;\; \delta^\lambda x^{\nu_\sigma} \right| = 0 \qquad \text{(I, 11)}$$

sind. Dabei ist ν_σ Zeilenindex, $\sigma = 0, 1, 2, \ldots, p$, und λ Spaltenindex für p der $p+1$ Spalten. Bilden wir aus den Koordinaten $\delta^\lambda x^\nu$ die (nicht alle verschwindenden) Grassmannschen homogenen Koordinaten des durch die Vektoren $(\delta^\lambda x^\nu)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, p$, gegebenen einfachen p-Vektors,

$$y^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p} = \left| \delta^\lambda x^{\mu_\sigma} \right|, \; \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

so kann man für die Gln. (I, 11) schreiben:

$$l^i \left\{ \sum_{\sigma=0}^{p} (-1)^\sigma a^{\nu_\sigma}_{ik} \cdot y^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{\sigma-1} \nu_{\sigma+1} \ldots \nu_p} \right\} = 0. \qquad \text{(I, 12)}$$

Die Gln. (I, 12) gelten für jeden Index k, stellen also ein lineares homogenes Gleichungssystem für die l^i dar. Andererseits muß (I, 12) für alle $(p+1)$-tupel der Indizes ν gelten. Die l^i sind also gemeinsame Lösungen aller derartigen Gleichungssysteme (I, 12). Für nichttriviale l^i müssen also alle m-reihigen Determinanten

$$\left| \sum_{\sigma=0}^{p} (-1)^\sigma a^{\nu_\sigma}_{ik} \cdot y^{\nu_0 \ldots \nu_{\sigma-1} \nu_{\sigma+1} \ldots \nu_p} \right| = 0 \qquad \text{(I, 13)}$$

sein (i ist Zeilen-, k Spaltenindex). Sind nun die Gln. (I, 13) erfüllt und Größen l^i aus den Gln. (I, 12) bestimmt, so folgt weiter aus den Gln. (I, 10) für jeden festen Index k und $\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$:

$$k_{k\varkappa} : \delta t = \left| \delta^1 x^{\nu_\sigma} \delta^2 x^{\nu_\sigma} \ldots \delta^{\varkappa-1} x^{\nu_\sigma} - l^i a^{\sigma}_{ik} \delta^{\varkappa+1} x^{\nu_\sigma} \ldots \delta^p x^{\nu_\sigma} \right| : \left| \delta^\lambda x^{\nu_\sigma} \right|, \qquad \text{(I, 14)}$$

wobei für mindestens ein p-tupel (ν_σ) die Determinante

$$|\delta^\lambda x^{\nu_\sigma}| \neq 0$$

ist. Andernfalls wären die p Vektoren $(\delta^\lambda x^\nu)$ im (x^ν)-Raum linear abhängig. Für dieses p-tupel können nicht alle Determinanten

$$|\delta^1 x^{\nu_\sigma} \ldots \delta^{\varkappa-1} x^{\nu_\sigma} - l^i a^{\nu_\sigma}_{ik} \delta^{\varkappa+1} x^{\nu_\sigma} \ldots \delta^p x^{\nu_\sigma}|$$

verschwinden, da nach obiger Überlegung nicht alle $k_{k\lambda}$ gleich Null sind.

Ist umgekehrt ein System von $\binom{n+1}{p}$ schiefsymmetrischen Größen $y^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}$ gegeben, die im (x^ν)-Raum einen einfachen p-Vektor bestimmen (für $p > 1$, $n > 2$ also die Plückerschen Beziehungen erfüllen), der die Projektion eines ein gewöhnliches Integralelement E_p bestimmenden einfachen p-Vektors im (x^ν, u^k, p^k_ν)-Raum ist, sind die $y^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}$ weiterhin Eigenwerte der linearen Polynommatrizen

$$\left(\sum_{\sigma=0}^{p} (-1)^\sigma a^{\nu_\sigma}_{ik} \eta^{\nu_0\nu_1\cdots\nu_{\sigma-1}\nu_{\sigma+1}\cdots\nu_p}\right) \tag{I, 15}$$

mit den Unbestimmten $\eta^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_p}$, so daß aus den Gln. (I, 12) gemeinsame Lösungen l^i bestimmt werden können, so ist das Integralelement E_p charakteristisch. Denn wir können aus den $y^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}$ die Koordinaten $\delta^\lambda x^\nu$ von p Vektoren bestimmen, die den einfachen p-Vektor im (x^ν)-Raum aufspannen, und aus den Gln. (I, 14) Größen $k_{k\lambda}$ ermitteln, so daß die Beziehungen (I, 10) gelten. Damit haben wir folgendes Ergebnis:

Satz 1: Gelten für das abgeschlossene Differentialsystem (I, 1, 2, 3, 4) die Voraussetzungen I, IIa und III, ist der Charakter $s_p = m$ und E_p ein gewöhnliches p-dimensionales Integralelement, $1 \leq p \leq n$, so ist E_p dann und nur dann charakteristisch, wenn

a) die Koordinaten $y^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}$ der Projektion des E_p bestimmenden einfachen p-Vektors in den (x^ν)-Raum Eigenwerte der Polynommatrizen (I, 15) sind,

b) gemeinsame Lösungen l^i der Gln. (I, 12) existieren.

II. DER FALL, DASS CHARAKTERISTISCHE INTEGRALLINIEN-ELEMENTE MIT EINEM VOLLSTÄNDIGEN SYSTEM VON LINKSEIGENVEKTOREN EXISTIEREN

Während im vorhergehenden ganz allgemein die Bedingungen ermittelt wurden, die notwendig und hinreichend sind, daß ein p-dimensionales gewöhnliches Integralelement E_p charakteristisch ist, wenden wir uns nun dem Spezialfall zu, der im Rahmen dieser Arbeit hauptsächlich interessiert. Wir gehen von folgender Frage aus: Wie lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, daß im Integralpunkt E_0 unter Berücksichtigung ihrer eventuellen Vielfachheit m eindimensionale charakteristische Integralelemente $E_1^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, existieren, zu denen ein System von m linear unabhängigen Zeilenvektoren (l^i_j) gehört?

Wir haben also $p = 1$ und schreiben für die $E_1^{(j)}$ bestimmenden Koordinaten

$$(x^\nu, u^k, p^k_\nu; \delta_{(j)} x^\nu, \delta_{(j)} u^k, \delta_{(j)} p^k_\nu)$$

und den zugehörigen linksmultiplikativen Zeilenvektor

$$(l^i_j\, \delta t \quad k_{j_r}).$$

Nach (I, 10) gilt dann für jeden Index j für ein charakteristisches Integrallinienelement $E_1^{(j)}$

$$l^i_j\, a^\nu_{ik}\, \delta t + k_{jk}\, \delta_{(j)} x^\nu = 0, \tag{II, 1}$$

mit nicht sämtlich verschwindenden k_{j_r}, woraus entsprechend (I, 14) die Proportionen

$$k_{jk} : \delta t = -\, l^i_j\, a^\nu_{ik} : \delta_{(j)} x^\nu = -\, l^i_j\, a^\mu_{ik} : \delta_{(j)} x^\mu$$

bzw.

$$\delta_{(j)} x^\nu : \delta_{(j)} x^\mu = l^i_j\, a^\nu_{ik} : l^i_j\, a^\mu_{ik} \tag{II, 2}$$

folgen. Die Gln. (I, 12) lauten hier also

$$l^i_j \left\{ a^\nu_{ik}\, \delta_{(j)} x^\mu - a^\mu_{ik}\, \delta_{(j)} x^\nu \right\} = 0, \tag{II, 3}$$

d. h. die l^i_j sind gemeinsame Lösungen der Systeme (II, 3) für alle Indexpaare (μ, ν). Deshalb müssen entsprechend (I, 15) die $\delta_{(j)} x^\mu$ Eigenwerte der Polynommatrizen

$$(a^\nu_{ik}\, \eta^\mu - a^\mu_{ik}\, \eta^\nu)$$

sein. Weiterhin wird nun verlangt, daß zu diesen Eigenwerten ein vollständiges System von Linkseigenvektoren (l^i_j) gehört.

Wir zählen zunächst die Anzahl der den Koeffizienten a^ν_{ik} auferlegten Bedingungen: Bei festem Index j hat das Bestehen der Gln. (II, 2) $(m-1)n$ Beziehungen zur Folge. Da aber $m-1$ dieser Verhältnisse ohne Bedingungen für die a^ν_{ik} erfüllt sind, müssen die Koeffizienten

$$(m-1)(n-1)$$

Bedingungen erfüllen, also keine für den Fall einer einzigen Gleichung

$$f(x^\nu, u, p_\nu) = 0$$

bzw. ein System mit nur zwei unabhängigen Veränderlichen x^0, x^1 (siehe auch [3]).

Wir wollen nun weiter den Index $\nu = 0$ auszeichnen und an Stelle von Voraussetzung IIa fordern

Voraussetzung IIb: In $\mathfrak{U}$ sei die Determinante $|a^0_{ik}| \neq 0$.

Dann ist der Charakter $s_1 = m$, wie aus dem Rang der Matrix

$$C'_1 = \begin{pmatrix} a^\nu_{ik} \\ \varepsilon^r_k\, \delta x^\nu \end{pmatrix}$$

für ein Integrallinienelement mit $\delta x^0 = 0$ folgt, und wir können uns bezüglich der $\delta_{(j)} x^\nu$ auf das Eigenwertproblem für die Matrizen

$$(a^0_{ik}\,\eta^\mu - a^\mu_{ik}\,\eta_0)$$

beschränken und für jeden Index j

$$\delta_{(j)}\,x^0 = \delta x^0 \neq 0$$

annehmen. Andernfalls wäre

$$|\,a^0_{ik}\,|\;\delta_{(j)}\,x^\nu = 0,$$

woraus wegen $|a^0_{ik}| \neq 0$ stets $\delta_{(j)} x^\nu = 0$ folgen würde. Deshalb genügt es, die inhomogenen linearen Polynommatrizen

$$(a^0_{ik}\,\lambda^\mu - a^\mu_{ik}) \quad \text{bzw.} \quad (\varepsilon^i_k\,\lambda^\mu - \alpha^{ir}\,a^\mu_{rk}) \tag{II, 4}$$

mit der zu (a^0_{ik}) inversen Matrix (α^{ir}) und mit den Eigenwerten

$$\lambda^\mu_{(j)} = \frac{\delta_{(j)}\,x^\mu}{\delta\,x^0}$$

zu betrachten. Es gibt bekanntlich genau dann zu jeder der Matrizen (II, 4) m linear unabhängige Linkseigenvektoren, wenn diese Matrizen nur lineare Elementarteiler besitzen und in diesem Falle gemeinsame Linkseigenvektoren genau dann, wenn

$$a^\mu_{ik}\,\alpha^{kr}\,a^\nu_{rs} = a^\nu_{ik}\,\alpha^{kr}\,a^\mu_{rs} \tag{II, 5}$$

ist für alle Paare von Indizes ν, μ [19].

Unter der Annahme, daß also für m charakteristische Linienelemente und m linear unabhängige gemeinsame Linkseigenvektoren (l^i_j) die Gln. (II, 1) gelten, wollen wir nun auch die übrigen, nach Voraussetzung III bestehenden Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Gleichungen des Systems (I, 6, 7) angeben. Die Matrix (I, 8) dieses Systems ist in unserem Falle für das j-te charakteristische Integrallinienelement $E^{(j)}_1$

$$C^{(j)}_1 = \begin{pmatrix} a^\nu_{ik} & b_{i\mu} \\ \varepsilon^r_k\,\delta_{(j)}\,x^\nu & -\,\delta_{(j)}\,p^r_\mu \end{pmatrix}.$$

Bei Multiplikation der Matrix $C^{(j)}_1$ von links mit dem Zeilenvektor $(l^i_j \delta t\; k_{jr})$ müssen also außer den Gln. (II, 1) die Gleichungen

$$l^i_j b_{i\nu}\,\delta t - k_{jr}\,\delta_{(j)} p^r_\nu = 0$$

gelten für jeden Index ν. Durch Umformung mittels der Beziehungen (II, 2) erhält man hieraus

$$l^i_j a^\mu_{ik}\,\delta_{(j)} p^k_\nu + l^i_j b_{i\nu}\,\delta_{(j)}\,x^\mu = 0\,. \tag{II, 6}$$

Aus (II, 6) folgt speziell für $\mu = 0$

$$l^i_j a^0_{ik}\,\delta_{(j)} p^k_\nu + l^i_j b_{i\nu}\,\delta x^0 = 0\,. \tag{II, 7}$$

Gelten also die Gln. (II, 2) und (II, 7), so bestehen auch die für ein charakteristisches Integrallinienelement $E_1^{(j)}$ notwendigen Beziehungen

$$l_j^i a_{ik}^\nu \delta_{(j)} p_\nu^k + l_j^i b_{i\nu} \delta_{(j)} x^\nu = 0, \tag{II, 8}$$

da für $E_1^{(j)}$ als Integrallinienelement infolge der Gln. (I, 3) sogar jeder Koeffizient der l_j^i in dieser Gleichung Null ist.

Wir haben im Bisherigen alle Beziehungen für den festen Integralpunkt E_0 aufgestellt. Nun sehen wir von dieser Bedingung ab und verlangen

Voraussetzung IV: In $\mathfrak{U}$ sollen die Matrizen (II, 4) für alle Indizes μ, $\mu \geq 1$, nur reelle Eigenwerte $\lambda_{(j)}^\mu$ mit einem System von m linear unabhängigen gemeinsamen Linkseigenvektoren (l_j^i) besitzen und die $\lambda_{(j)}^\mu$ und l_j^i als Funktionen der x^ν, u^k, p_ν^k stetig sein und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung bezüglich aller dieser Veränderlichen haben.

Daß die $\lambda_{(j)}^\mu$ als Wurzeln der charakteristischen Gleichungen der Matrizen (II, 4) endlich sind, folgt schon aus Voraussetzung IIb. Infolge Voraussetzung IV können wir für jeden Index k

$$\lambda_{(j)}^\mu = \frac{l_j^i a_{ik}^\mu}{l_j^i a_{ik}^0} \tag{II, 9}$$

setzen. Jedes charakteristische Integrallinienelement $E_1^{(j)}$ mit einem in $\mathfrak{U}$ liegenden Integralpunkt muß dann nach (II, 2) dem System

$$dx^\mu = \lambda_{(j)}^\mu dx^0, \; \lambda_{(j)}^0 = 1, \tag{II, 10}$$

genügen.

Verstehen wir unter $\frac{\partial \chi}{\partial x^\nu}$ $n+1$ unbestimmte Größen, so folgt aus Voraussetzung IV (Gln. [II, 9]), daß die Determinante $\left| a_{ik}^\nu \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu} \right|$ in der Form

$$\left| a_{ik}^\nu \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu} \right| = \left| a_{ik}^0 \right| \prod_{j=1}^{m} \lambda_{(j)}^\nu \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu} \tag{II, 11}$$

geschrieben werden kann, wie sich aus

$$l_j^i a_{ik}^\nu \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu} = l_j^i a_{ik}^0 \lambda_{(j)}^\nu \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu}$$

infolge $|l_j^i| \neq 0$ in $\mathfrak{U}$ ergibt.

Nun möge durch die stetig differenzierbaren Funktionen

$$u^k = \mu^k(x^\mu), \; p_\nu^k = \pi_\nu^k(x^\mu)$$

eine in $\mathfrak{U}$ gelegene $(n+1)$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ des Systems (I, 1, 2, 3, 4) dargestellt werden, welche infolge Voraussetzung IV in allen ihren Punkten den Gln. (II, 10) genügende charakteristische Integrallinienelemente $E_1^{(j)}$

$$(x^\nu,\, u^k,\, p^k_\nu;\ \delta_{(j)} x^\nu,\, \delta_{(j)} u^k,\, \delta_{(j)} p^k_\nu)$$

hat. Sind dann $\chi_{(j)}(x^\nu)$ Funktionen mit der Eigenschaft, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \chi_{(j)}}{\partial x^\nu}$ Komponenten eines Normalenvektors zu $(\delta_{(j)} x^\nu)$ sind, dann gilt

$$l^i_j\, a^\nu_{ik} \frac{\partial \chi_{(j)}}{\partial x^\nu} = 0$$

für jeden Index k, bzw.

$$\lambda^\nu_{(j)} \frac{\partial \chi_{(j)}}{\partial x^\nu} = 0.$$

Also ist für jeden Index j

$$\left| a^\nu_{ik} \frac{\partial \chi_{(j)}}{\partial x^\nu} \right| = 0.$$

Umgekehrt können wir auf $\mathfrak{M}$ die durch Nullsetzen der rechten Seite von Gl. (II, 11) erhaltenen Gleichungen

$$\lambda^\nu_{(j)} \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu} = 0 \tag{II, 12}$$

als lineare homogene partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für derartige Funktionen $\chi_{(j)}$ auffassen. Die Gln. (II, 12) stellen das zu den Gln. (II, 10) adjungierte System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung dar.

Die Reduzibilität der Determinante $\left| a^\nu_{ik} \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu} \right|$ nach Gl. (II, 11) ist zwar notwendig, aber natürlich nicht hinreichend für die Existenz von m linear unabhängigen Linkseigenvektoren (l^i_j).

Satz 2: Gelten für das Differentialsystem (I, 1, 2, 3, 4) die Voraussetzungen I, IIb, III, so hat eine in $\mathfrak{U}$ gelegene $(n+1)$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ dann und nur dann in jedem ihrer Punkte charakteristische Integrallinienelemente $E^{(j)}_1$ mit m linear unabhängigen Linkseigenvektoren (l^i_j), wenn in jedem solchen Punkt

a) die Matrizen (II, 4) nur reelle Eigenwerte $\lambda^\mu_{(j)}$ und nur lineare Elementarteiler haben,

b) die Vertauschbarkeitsbeziehungen (II, 5) gelten. Letztere haben $(m-1)(n-1)$ Bedingungen für die Koeffizienten a^ν_{ik} zur Folge. Auf $\mathfrak{M}$ genügt dann das Feld der charakteristischen Richtungen im (x^ν)-Raum den Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen (II, 10), und die Determinante $\left| a^\nu_{ik} \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu} \right|$, als Polynom in den $n+1$ Unbestimmten $\frac{\partial \chi}{\partial x^\nu}$ aufgefaßt, ist reduzibel und zerfällt in m in $\frac{\partial \chi}{\partial x^\nu}$ lineare Faktoren, die einzeln nullgesetzt die zu den Systemen (II, 10) adjungierten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen.

III. QUASILINEARE SYSTEME

Wir nehmen nun an, daß die f_i ein quasilineares System bilden,

$$f_i \equiv a_{ik}^{\nu}\, p_{\nu}^{k} + h_i = 0, \qquad \text{(III, 1)}$$
$$a_{ik}^{\nu} = a_{ik}^{\nu}\,(x^{\mu}, u^{l}),\ h_i = h_i\,(x^{\mu}, u^{l}),$$

der im vorigen Kapitel betrachtete Spezialfall vorliegt und die angegebenen Voraussetzungen einschließlich Voraussetzung IV gelten. Wir gehen von den Gln. (III, 1) zu den Gleichungen

$$l_j^i f_i \equiv l_j^i\, a_{ik}^{\nu}\, p_{\nu}^{k} + l_j^i\, h_i = 0$$

über. Unter Berücksichtigung der Gln. (II, 9) können wir schreiben

$$l_j^i\, a_{ik}^{\nu}\, p_{\nu}^{k} + l_j^i\, h_i = l_j^i\, a_{ik}^{0}\, \lambda_{(j)}^{\nu}\, p_{\nu}^{k} + l_j^i\, h_i$$

und erhalten daraus zusammen mit Gln. (II, 10) infolge der Gln. (I, 2) als Differentialgleichungen für charakteristische Integrallinienelemente

$$l_j^i\, a_{ik}^{0}\, p_{\nu}^{k}\, dx^{\nu} + l_j^i\, h_i\, dx^0 = 0$$

bzw.

$$l_j^i\, a_{ik}^{0}\, du^{k} + l_j^i\, h_i\, dx^0 = 0. \qquad \text{(III, 2)}$$

In der HAMBURGERschen Theorie werden für jeden Index j das System der Gln. (II, 10) zusammen mit der Gl. (III, 2) betrachtet und als unbeschränkt integrabel vorausgesetzt. Wir stellen diese Forderung nicht und behandeln zunächst den allgemeinen Fall, später in Kapitel VI den Fall, daß sich die Ausdrücke $l_j^i\, a_{ik}^{0}\, du^k$ durch ein vollständiges Differential darstellen lassen, was zu beträchtlichen Vereinfachungen führt.

Wir ersetzen die Gln. (I, 1, 3) durch andere und betrachten von jetzt an als zu integrierendes System

$$F_j \equiv A_{jk}^{\nu}\, p_{\nu}^{k} + H_j = 0, \qquad \text{(III, 3)}$$

$$du^k - p_{\nu}^{k}\, dx^{\nu} = 0, \qquad \text{(III, 4)}$$

$$A_{jk}^{\nu}\, dp_{\nu}^{k} + B_{j\nu}\, dx^{\nu} = 0, \qquad \text{(III, 5)}$$

$$dp_{\nu}^{k} \wedge dx^{\nu} = 0, \qquad \text{(III, 6)}$$

wobei zur Abkürzung

$$A_{jk}^{\nu} = l_j^i\, a_{ik}^{\nu},\ H_j = l_j^i\, h_i,$$

$$B_{j\mu} = \frac{\partial F_j}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial F_j}{\partial u^{l}}\, p_{\mu}^{l}$$

gesetzt ist. Infolge der quasilinearen Gln. (III, 1) sind die l_j^i ebenfalls als von den p_{ν}^{k} unabhängig anzunehmen. Verwenden wir nun die Formeln des Kapitels II für dieses System (III, 3, 4, 5, 6), so können in diesen Formeln die l_j^i gleich Eins gesetzt werden.

Dann führen wir in $\mathfrak{U}$ durch die Substitutionen

$$P_{j\nu} = A^0_{jk}\, p^k_\nu \tag{III, 7}$$

an Stelle der p^k_ν die neuen Veränderlichen $P_{j\nu}$ ein. Die A^0_{jk} sind von den p^k_ν unabhängig, also sind die Substitutionen (III, 7) linear. Ferner ist die Determinante

$$|A^0_{jk}| = |\, l^i \,|\, |a^0_{ik}| \neq 0,$$

also lassen sich die p^k_ν eindeutig aus den $P_{j\nu}$ bestimmen.

Das j-te Integrallinienelement $E^{(j)}_1$ muß nun einerseits die Gln. (II, 10) erfüllen:

$$dx^\nu = \lambda^\nu_{(j)}(x^\mu, u^k)\, dx^0.$$

Ferner muß es wegen der Gln. (III, 4) die Gleichungen

$$du^k = p^k_\nu\, \lambda^\nu_{(j)}\, dx^0$$

befriedigen. Nach Substitution der p^k_ν mittels (III, 7) setzen wir hierfür

$$du^k = \Phi^k_{(j)}\,(x^\mu,\, u^l,\, P_{l\mu})\, dx^0$$

und zur Abkürzung

$$\Phi^j_{(j)} = \Phi^j.$$

Schließlich muß das Element $E^{(j)}_1$ infolge der Gln. (II, 7) die Gleichungen

$$A^0_{jk}\, dp^k_\nu = -B_{j\nu}\, dx^0$$

erfüllen. Damit folgt aus (III, 7)

$$dP_{j\nu} = dA^0_{jk}\, p^k_\nu + A^0_{jk}\, dp^k_\nu = \left\{\left(\frac{\partial A^0_{jk}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A^0_{jk}}{\partial u^l}\, p^l_\mu\right) \lambda^\mu_{(j)}\, p^k_\nu - B_{j\nu}\right\} dx^0.$$

Nach Substitution der p^k_ν mittels (III, 7) schreiben wir hierfür

$$dP_{j\nu} = \Psi_{j\nu}(x^\mu,\, u^k,\, P_{k\mu})\, dx^0.$$

Wir haben damit ein System von $2\,n + m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen, dem die Koordinaten des charakteristischen Integralelements $E^{(j)}_1$ genügen müssen:

$$dx^\nu = \lambda^\nu_{(j)}\, dx^0, \tag{III, 8}$$

$$du^j = \Phi^j\, dx^0, \tag{III, 9}$$

$$du^k = \Phi^k_{(j)}\, dx^0, \quad k \neq j, \tag{III, 9a}$$

$$dP_{j\nu} = \Psi_{j\nu}\, dx^0. \tag{III, 10}$$

Wir nehmen dabei an, daß der Koeffizient $A^0_{jj} \neq 0$ ist, was bei geeigneter Indizierung stets zu erreichen ist. Der wesentliche Vorteil des quasilinearen Systems (III, 3) liegt in der Möglichkeit zur Herstellung der Differentialgleichungen (III, 10) mittels der bezüglich der p^k_ν linearen Substitution (III, 7).

Wir bemerken noch, daß die Gln. (III, 3) mit

$$\lambda^{\nu}_{(j)} = \frac{A^{\nu}_{jk}}{A^{0}_{jk}}$$

m unabhängige lineare Beziehungen zwischen den $P_{j\nu}$ darstellen:

$$\lambda^{\nu}_{(j)} P_{j\nu} + H_j = 0. \tag{III, 11}$$

IV. EXISTENZ UND UNITÄT DER LÖSUNGEN DES SYSTEMS (III, 8, 9, 10)

Wir geben für das abgeschlossene Differentialsystem des Systems quasilinearer Gleichungen (III, 1, 4) eine n-dimensionale Integralmannigfaltigkeit vor und zeigen, daß mit den hierdurch festgelegten Anfangswerten unter gewissen Voraussetzungen das System der Gleichungen (III, 8, 9, 10) in einer Umgebung dieser Mannigfaltigkeit eine eindeutig bestimmte Lösung hat. Hierzu betrachten wir ein äquivalentes System von Integralgleichungen. Für dieses wird die Existenz einer Lösung mittels eines Iterationsverfahrens vom PICARDschen Typ bewiesen, das von R. COURANT und P. LAX für den Fall zweier unabhängiger Veränderlicher eingeführt wurde [13], mit einer gegenüber der dortigen abgeänderten Beweisführung.

Im folgenden gehen die Indizes $\varkappa$, λ, μ, ν von 0 bis n, die Indizes ϱ, σ, τ von 1 bis n. Unter „const" wird in diesem Kapitel jeweils eine positive Konstante verstanden (nicht notwendig in jedem Falle die gleiche). Ferner verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$$\varphi(x^{\mu}) \in C^{r} \text{ in einem Bereich}$$

heißt, sämtliche partiellen Ableitungen der Funktion $\varphi(x^{\mu})$ von der Ordnung r bezüglich aller Veränderlichen x^{μ} existieren im betrachteten Bereich und sind dort stetig.

$$\varphi(x^{\mu}, y^{\nu}) \in \mathrm{Lip}\,[x^{\mu}] \quad \text{in einem Bereich}$$

heißt, die Funktion $\varphi(x^{\mu}, y^{\nu})$ erfüllt im betrachteten Bereich der x^{μ}, y^{ν} eine LIPSCHITZbedingung (abgekürzt: Lip.-Bed.) mit einer einheitlichen LIPSCHITZkonstanten (abgekürzt: Lip.-Konst.) bezüglich der x^{μ}. Schließlich soll die Schreibweise $[\varphi(x^{\mu}, y^{\nu})]_{(\tilde{x}^{\mu}, y^{\nu})}$ bedeuten:

$$[\varphi(x^{\mu}, y^{\nu})]_{(\tilde{x}^{\mu}, y^{\nu})} \equiv \varphi(\tilde{x}^{\mu}, y^{\nu}).$$

Weiter verwenden wir das fast selbstverständliche

LEMMA 1: Im Bereich B_x der x^{μ} gelte für die Funktionen $\varphi^{l}(x^{\mu})$:

$$\varphi^{l}(x^{\mu}) \in \mathrm{Lip}\,[x^{\mu}]$$

mit je einer Lip.-Konst. k_l, ferner $|\varphi^{l}| \leq M_l$, $0 < M_l$. Dann ist in B_x

a) $\sum_{l=1}^{m} k_l$ eine Lip.-Konst. für die Funktion $\sum_{l=1}^{m} \varphi^l (x^\mu)$,

b) $\prod_{l=1}^{m} M_l \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{M_i}$ eine Lip.-Konst. für die Funktion $\prod_{l=1}^{m} \varphi^l (x^\mu)$.

Im Bereich B_u der u^l gelte für die Funktion $\psi (u^l)$:

$$\psi (u^l) \in \text{Lip } [u^l]$$

mit einer Lip.-Konst. K. Für $(x^\mu) \in B_x$ sei $(\varphi^l (x^\mu)) \in B_u$. Dann ist in B_x

c) $K \sum_{l=1}^{m} k_l$ eine Lip.-Konst. für die Funktion $\psi (\varphi^l (x^\mu))$.

Die Beweise verlaufen ähnlich wie entsprechende bekannte Stetigkeitsbeweise. Ferner benötigen wir

Lemma 2: Besitzen die Funktionen einer Funktionenmenge in einem konvexen Bereich gleichartig beschränkte stetige partielle Ableitungen erster Ordnung bezüglich aller ihrer Veränderlichen, so erfüllen die Funktionen der Menge in diesem Bereich eine gleichartige Lip.-Bed..

Gleichartig beschränkt soll hierbei heißen, es gibt eine gemeinsame Schranke für die Ableitungen aller Funktionen der Menge, gleichartige Lip.-Bed. soll heißen, es gibt eine gemeinsame Lip.-Konst. für alle Funktionen der Menge. Lemma 2 folgt aus dem Mittelwertsatz.

Nun geben wir eine n-dimensionale Anfangsmannigfaltigkeit vor, und zwar zur Vereinfachung der Darstellung und ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit auf der Hyperebene $x^0 = 0$ des (x^ν)-Raumes:

Im Bereich

$$|x^\varrho \leq S_x, \quad S_x = \text{const},$$

seien m beliebige reelle Funktionen

$$u_0^k (x^\varrho) \in C^2 \tag{IV, 1}$$

gegeben. Wir setzen

$$p_{\sigma 0}^k = \frac{\partial u_0^k}{\partial x^\sigma}.$$

Wir nehmen nun weiter an, daß die Funktionen $F_j (x^\nu, u^k, p_\nu^k)$ für alle Werte-$(n+1)$-tupel $(0, x^\varrho)$, $|x^\varrho| \leq S_x$, und für die zugehörigen Werte

$$u^k = u_0^k (x^\varrho), \quad p_\sigma^k = p_{\sigma 0}^k (x^\varrho)$$

durch reelle Werte $p_{00}^k (x^\varrho)$ annulliert werden:

$$F_j (0, x^\varrho, u_0^k (x^\varrho), p_{\nu 0}^k (x^\varrho)) = 0.$$

Jedes solche Wertesystem

$$(0, x^\varrho, u_0^k (x^\varrho), p_{\nu 0}^k (x^\varrho))$$

soll einen Integralpunkt E_0 darstellen mit einer Umgebung

$$\mathfrak{U} (0, x^\varrho, u_0^k (x^\varrho), p_{\nu 0}^k (x^\varrho)),$$

in der für das ursprüngliche System (III, 1) die Voraussetzungen I, IIb, III und IV gelten, so daß diese Voraussetzungen auch im Gebiet

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{|x^\varrho| \leq S_x} \mathfrak{U}\left(0, x^\varrho, u_0^k(x^\varrho), p_{\nu 0}^k(x^\varrho)\right)$$

erfüllt sind. Wir können dann die Gln. (III, 3) nach den p_0^k auflösen und erhalten

$$p_0^k = \varphi^k(x^\nu, u^i, p_\sigma^i),$$

$$p_{00}^k(x^\varrho) = \varphi^k\left(0, x^\varrho, u_0^i(x^\varrho), p_{\sigma 0}^i(x^\varrho)\right).$$

Dann führen wir in $\mathfrak{G}$ die Substitutionen (III, 7) durch,

$$P_{j\nu} = A_{jk}^0(x^\mu, u^l)\, p_\nu^k$$

und setzen

$$P_{j\nu 0}(x^\varrho) = A_{jk}^0\left(0, x^\varrho, u_0^l(x^\varrho)\right) p_{\nu 0}^k(x^\varrho).$$

Infolge der Voraussetzungen I, IIb und IV sind in $\mathfrak{G}$

$$\varphi^k(x^\nu, u^i, p_\sigma^i) \in C^1, \quad A_{jk}^0(x^\nu, u^l) \in C^1.$$

Wegen

$$u_0^i(x^\varrho) \in C^2 \text{ in } |x^\varrho| \leq S_x$$

ist also in diesem Bereich auch

$$p_{00}^k(x^\varrho) \in C^1, \quad P_{k\nu 0}(x^\varrho) \in C^1.$$

Wir verlangen, daß für $|x^\varrho| \leq S_x$

$$\frac{\partial P_{k\nu 0}(x^\varrho)}{\partial x^\sigma} \in \operatorname{Lip}[x^\varrho] \tag{IV, 2}$$

gilt.

Wir definieren folgende abgeschlossene konvexe Bereiche:

Bereich X: Für $0 \leq x^0 \leq \delta$, $\delta = \text{const}$, sei $|x^\varrho| \leq S_x - S_\lambda x^0$, $S_\lambda = \text{const}$, $S_\lambda \delta < S_x$, $\varrho = 1, 2, \ldots n$, wobei S_x die bereits eingeführte positive Konstante ist.

Bereich $U(x^\varrho)$: Für $(x^\nu) \in X$ sei $|u^k - u_0^k(x^\varrho)| \leq S_u$, $S_u = \text{const}$, $k = 1, 2, \ldots m$.

Bereich $P(x^\varrho)$: Für $(x^\nu) \in X$ sei $|P_{k\nu} - P_{k\nu 0}(x^\varrho)| \leq S_P$, $S_P = \text{const}$, $k = 1, 2, \ldots m$, $\nu = 0, 1, \ldots n$.

Die Vereinigungen

$$U(X) = \bigcup_{(x^\nu) \in X} U(x^\varrho), \quad P(X) = \bigcup_{(x^\nu) \in X} P(x^\varrho)$$

sind infolge der Abgeschlossenheit von X selbst abgeschlossen. Ist $\mathfrak{G}^*$ das Bildgebiet von $\mathfrak{G}$ bei den Substitutionen (III, 7), so sollen die Konstanten δ, S_u, S_P so gewählt sein, daß der abgeschlossene Bereich $X \times U(X) \times P(X)$ Teilbereich von $\mathfrak{G}^*$ ist. Weiter gelte für die in den Gln. (III, 8, 9, 10) auftretenden Funktionen die

Voraussetzung V: In $\mathfrak{G}^*$ seien für die Funktionen $\lambda^{\sigma}_{(j)}(x^{\mu}, u^k)$ die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\in \mathrm{Lip}\,[x^{\mu}, u^k]$, ferner seien die Funktionen $\Phi^j(x^{\mu}, u^k, P_{k\mu})$, $\Psi_{j\nu}(x^{\mu}, u^k, P_{k\mu}) \in C^1$, ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung $\in \mathrm{Lip}\,[x^{\mu}, u^k, P_{k\mu}]$. Folglich sind diese Funktionen und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung im abgeschlossenen Teilbereich $X \times U(X) \times P(X)$ von $\mathfrak{G}^*$ stetig und beschränkt. Wir können deshalb bei passender Wahl von δ in diesem Bereich

$$|\lambda^{\nu}_{(j)}| \leq S_{\lambda}, |\Phi^j| \leq S_{\Phi}, |\Psi_{j\nu}| \leq S_{\Psi} \qquad \text{(IV, 3)}$$

mit $S_{\Phi} = \text{const}$, $S_{\Phi}\,\delta < S_u$, $S_{\Psi} = \text{const}$, $S_{\Psi}\,\delta < S_P$ setzen.

Wir betrachten nun eine Familie stetiger reeller Funktionen $y^{\nu}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu})$, $v^j(\xi^{\mu})$, $Q_{j\nu}(\xi^{\mu})$ von x^0 und von Parametern ξ^{μ} mit folgenden Eigenschaften: Für

$$0 \leq x^0 \leq \xi^0, \ (\xi^{\mu}) \in X,$$

gilt für die Funktion

(a) $y^{\nu}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu})$:

α) Für $x^0 = \xi^0$ ist $y^{\sigma}_{(j)}(\xi^0, \xi^{\mu}) = \xi^{\sigma}$.

β) $|y^{\varrho}_{(j)}| \leq S_x - S_{\lambda}x^0$, $y^0_{(j)} = x^0$.

γ) $y^{\nu}_{(j)} \in C^1$ bezüglich der ξ^{μ}, $\dfrac{\partial y^{\nu}_{(j)}}{\partial \xi^{\mu}}$ ist gleichartig beschränkt.

δ) $\dfrac{\partial y^{\nu}_{(j)}}{\partial \xi^{\mu}} \in \mathrm{Lip}\,[x^0, \xi^{\varkappa}]$ gleichartig.

(b) $v^j(\xi^0, \xi^{\varrho})$:

α) Für $\xi^0 = 0$ ist $v^j(0, \xi^{\varrho}) = u^j_0(\xi^{\varrho})$.

β) $|v^j(\xi^0, \xi^{\varrho}) - u^j_0(\xi^{\varrho})| \leq S_u$.

γ) $v^j \in C^1$, $\dfrac{\partial v^j}{\partial \xi^{\mu}}$ ist gleichartig beschränkt.

δ) $\dfrac{\partial v^j}{\partial \xi^{\mu}} \in \mathrm{Lip}\,[\xi^{\varkappa}]$ gleichartig.

(c) $Q_{j\nu}(\xi^0, \xi^{\varrho})$:

α) Für $\xi^0 = 0$ ist $Q_{j\nu}(0, \xi^{\varrho}) = P_{j\nu 0}(\xi^{\varrho})$.

β) $|Q_{j\nu}(\xi^0, \xi^{\varrho}) - P_{j\nu 0}(\xi^{\varrho})| \leq S_P$.

γ) $Q_{j\nu} \in C^1$, $\dfrac{\partial Q_{j\nu}}{\partial \xi^{\mu}}$ ist gleichartig beschränkt.

δ) $\dfrac{\partial Q_{j\nu}}{\partial \xi^{\mu}} \in \mathrm{Lip}\,[\xi^{\varkappa}]$ gleichartig.

Dabei sind im Bereich X zu bildende Grenzwerte auf in X liegenden Punktfolgen auszuführen. Auf $\xi^0 = 0$, $|\xi^{\varrho}| = S_x$ erklären wir die unter γ) geforderten partiellen Ableitungen nach ξ^0 durch die Grenzwerte der entsprechenden partiellen Ableitungen für $|\xi^\varrho| < S_x$. Diese Grenzwerte existieren infolge der aus δ) folgenden gleichmäßigen Stetigkeit der partiellen Ableitungen, sind stetig, gleichartig beschränkt und $\in$ Lip $[\xi^\varkappa]$ gleichartig.

Ein $m\,(n+1)$-tupel von Funktionen $y^\nu_{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots m, \nu = 0, 1, 2, \ldots n)$, ein m-tupel von Funktionen v^j $(j = 1, 2, \ldots m)$ und ein $m\,(n+1)$-tupel von Funktionen $Q_{j\nu}$ $(j = 1, 2, \ldots m, \nu = 0, 1, 2, \ldots n)$ fassen wir zusammen zu einem Funktionenvektor

$$\mathfrak{f}\,(x^0, \xi^\mu) = \begin{pmatrix} y^\nu_{(j)} \\ v^j \\ Q_{j\nu} \end{pmatrix}.$$

Derartige Funktionenvektoren betrachten wir als Elemente eines Raumes $\mathfrak{F}$, die durch lineare Operationen aus diesen Funktionenvektoren gebildeten Funktionenvektoren als Elemente eines Raumes, der $\mathfrak{F}$ als Unterraum enthält. In diesem Raum definieren wir als Norm eines Elements das Maximum des absoluten Betrages der Komponenten des Funktionenvektors für $0 \leq x^0 \leq \xi^0$, $(\xi^\mu) \in X$. Infolge (IV, 1, 2) ist

$$\mathfrak{f}_0\,(x^0, \xi^\mu) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \xi^\varrho \\ \vdots \\ x_0 \\ \xi^\varrho \\ u^j_0\,(\xi^\varrho) \\ P_{j\nu 0}\,(\xi^\varrho) \end{pmatrix} \qquad \text{(IV, 4)}$$

Element von $\mathfrak{F}$.

Der Raum $\mathfrak{F}$ ist dann vollständig: Für eine Folge $\{\mathfrak{f}_r\}$ von Vektoren $\mathfrak{f}_r \in \mathfrak{F}$, $r = 1, 2, \ldots,$ folgt aus

$$\lim_{s,\, r \to \infty} \|\mathfrak{f}_s - \mathfrak{f}_r\| = 0$$

wegen der benützten Normierung die gleichmäßige Konvergenz der Komponentenfunktionen der Vektoren $\mathfrak{f}_r$ gegen die Komponentenfunktionen eines Funktionenvektors $\mathfrak{g}$ im abgeschlossenen Bereich $0 \leq x^0 \leq \xi^0$, $(\xi^\mu) \in X$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{g} \in \mathfrak{F}$ ist. Zunächst sind die Komponenten von $\mathfrak{g}$ als Grenzfunktionen einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen selbst stetig. Weiter erfüllen diese Grenzfunktionen die Bedingungen

α): Denn jede Folgefunktion hat für $x^0 = \xi^0$ bzw. $\xi^0 = 0$ den vom Folgeindex unabhängigen Wert ξ^ν bzw. $u^j_0\,(\xi^\varrho)$ oder $P_{j\nu 0}\,(\xi^\varrho)$, also gilt dies auch für die betreffende Grenzfunktion.

β): Da die Bereiche X, $U\,(\xi^\varrho)$, $P\,(\xi^\varrho)$ abgeschlossen sind, liegen auch die Wertevorräte der Grenzfunktionen in diesen Bereichen. $y^0_{(j)}$ ist stets gleich x^0.

γ, δ): Alle Folgefunktionen besitzen stetige, gleichartig beschränkte partielle Ableitungen nach den ξ^μ, die eine Lip.-Bed. mit einer gleichartigen Lip.-Konst. erfüllen und deshalb sogar gleichartig stetig sind. Damit folgt aus dem Arzelaschen Satz die Existenz einer Teilfolge der Folge $\{\mathfrak{f}_r\}$, so daß die partiellen Ableitungen nach den ξ^μ der Komponentenfunktionen der Vektoren dieser Teilfolge gleichmäßig konvergieren. Ihre Grenzfunktionen stellen dann die entsprechenden partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen von $\mathfrak{g}$ dar. Diese haben somit stetige partielle Ableitungen nach den ξ^μ, für die dieselben gleichartigen Schranken und Lip.-Konst. wie für die Folgefunktionen gelten, da gleichartige Schranken und Lip.-Konst. beim Grenzübergang bestehenbleiben.

Auf die Komponentenfunktionen $y^\nu_{(j)}$, v^j, $Q_{j\nu}$ eines Vektors $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ üben wir nun folgende Integraltransformationen aus:

$$z^\nu_{(j)}(x^0, \xi^\mu) = \xi^\nu + \int\limits_{\xi^0}^{x^0} \lambda^\nu_{(j)}\left[y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu), v^k(y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu))\right] dt, \tag{IV, 5}$$

$$w^j(\xi^\mu) = u^j_0\left[z^\varrho_{(j)}(0, \xi^\mu)\right] + \int\limits_0^{\xi^0} \Phi^j\left[y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu), v^k(y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu)), Q_{k\lambda}(y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu))\right] dt, \tag{IV, 6}$$

$$R_{j\nu}(\xi^\mu) = P_{j\nu 0}\left[z^\varrho_{(j)}(0, \xi^\mu)\right] + \int\limits_0^{\xi^0} \Psi_{j\nu}\left[y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu), v^k(y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu)), Q_{k\lambda}(y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu))\right] dt, \tag{IV, 7}$$

mit $0 \leq x^0 \leq \xi^0 \leq \delta$, $(\xi^\mu) \in X$ und der Integrationsveränderlichen t. Wir haben also in den Funktionen

$$\lambda^\nu_{(j)}(x^\varkappa, u^k),\ \Phi^j(x^\varkappa, u^k, P_{k\lambda}),\ \Psi_{j\nu}(x^\varkappa, u^k, P_{k\lambda}) \tag{IV, 8}$$

der Gln. (III, 8, 9, 10) für

$$x^\varkappa = y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu),\ u^k = v^k(y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu)),\ P_{k\lambda} = Q_{k\lambda}(y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu))$$

und dabei wieder für die Funktionen

$$v^k(\xi^\varkappa),\ Q_{k\lambda}(\xi^\varkappa) \tag{IV, 9}$$

die Funktionen

$$v^k(y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu)),\ Q_{k\lambda}(y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu))$$

gesetzt. Da im zugrunde gelegten Bereich ihrer Veränderlichen sowohl die Funktionen (IV, 8) als auch die Funktionen (IV, 9) und die $y^\varkappa_{(j)}(t, \xi^\mu)$ stetig sind, existieren die in diesen Transformationen auftretenden Integrale und sind nach einem elementaren Satz stetige Funktionen von x^0 und den ξ^μ. Die gleiche Aussage gilt dann jedenfalls für die Funktionen $z^\nu_{(j)}(x^0, \xi^\mu)$. Für die Funktionen $w^j(\xi^\mu)$, $R_{j\nu}(\xi^\mu)$ werden wir sie später beweisen. Symbolisch schreiben wir für die Transformation (IV, 5, 6, 7)

$$\mathfrak{h} = T\mathfrak{f}$$

mit dem Funktionenvektor

$$\mathfrak{h} = \begin{pmatrix} z^\nu_{(j)} \\ w^j \\ R_{j\nu} \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{h} \in \mathfrak{F}$ ist und die Funktionen $z^\nu_{(j)}$ die Eigenschaften α) mit δ) der Funktionen $y^\nu_{(j)}$, die Funktionen w^j bzw. $R_{j\nu}$ diejenigen der Funktionen v^j bzw. $Q_{\ \nu}$ besitzen:

(a)

α) Für $x^0 = \xi^0$ ist $z^{\sigma}_{(j)}(\xi^0, \xi^{\mu}) = \xi^{\sigma}$.

β) Infolge (IV, 3) gilt die Integralabschätzung

$$| z^{\varrho}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}) - \xi^{\varrho} | \leq \int_{x^0}^{\xi^0} | \lambda^{\varrho}_{(j)} | \, dt \leq S_{\lambda}(\xi^0 - x^0),$$

ferner ist $(\xi^{\mu}) \in X$, also

$$| \xi^{\varrho} | \leq S_x - S_{\lambda}\,\xi^0.$$

Folglich ist

$$| z^{\varrho}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}) | = | z^{\varrho}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}) - \xi^{\varrho} + \xi^{\varrho} | \leq S_{\lambda}(\xi^0 - x^0) + S_x - S_{\lambda}\,\xi^0 = S_x - S_{\lambda}\,x^0.$$

Für $\nu = 0$ gilt wegen $\lambda^0_{(j)} = 1$ $z^0_{(j)} = x^0$.

γ) Im abgeschlossenen Bereich $X \times U(X)$ haben die Funktionen $\lambda^{\nu}_{(j)}(x^{\varkappa}, u^k)$ nach Voraussetzung IV stetige, beschränkte partielle Ableitungen, die Funktionen $y^{\varkappa}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu})$, $v^k(\xi^{\mu})$ haben stetige und gleichartig beschränkte partielle Ableitungen nach den ξ^{μ}. Also kann nach einem elementaren Satz in Gln. (IV, 5) unter dem Integralzeichen differenziert werden und wir erhalten für

$$\nu = \sigma: \qquad \frac{\partial z^{\sigma}_{(j)}}{\partial \xi^{\sigma}} = 1 + \int_{\xi^0}^{x^0} \frac{d\lambda^{\sigma}_{(j)}}{d\xi^{\sigma}}\, dt, \tag{IV, 10}$$

$$\nu = \varrho,\ \varrho \neq \sigma: \qquad \frac{\partial z^{\varrho}_{(j)}}{\partial \xi^{\sigma}} = \int_{\xi^0}^{x^0} \frac{d\lambda^{\varrho}_{(j)}}{d\xi^{\sigma}}\, dt, \tag{IV, 11}$$

$$\nu = \varrho: \qquad \frac{\partial z^{\varrho}_{(j)}}{\partial \xi^0} = \int_{\xi^0}^{x^0} \frac{d\lambda^{\varrho}_{(j)}}{d\xi^0}\, dt - \lambda^{\varrho}_{(j)}(\xi^{\varkappa}, v^k(\xi^{\varkappa})), \tag{IV, 12}$$

$$\nu = 0: \qquad \frac{\partial z^0_{(j)}}{\partial \xi^{\lambda}} = 0. \tag{IV, 13}$$

Dabei ist

$$\frac{d\lambda^{\nu}_{(j)}[y^{\varkappa}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}), v^k(y^{\varkappa}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}))]}{d\xi^{\lambda}} = \left\{ \frac{\partial \lambda^{\nu}_{(j)}}{\partial y^{\varkappa}_{(j)}} + \frac{\partial \lambda^{\nu}_{(j)}}{\partial v^k} \frac{\partial v^k}{\partial y^{\varkappa}_{(j)}} \right\} \frac{\partial y^{\varkappa}_{(j)}}{\partial \xi^{\lambda}}. \tag{IV, 14}$$

Nach bekannten Sätzen sind die Ableitungen (IV, 10, 11, 12) stetig in allen Veränderlichen x^0, ξ^{μ} des zugrunde gelegten abgeschlossenen Bereiches. Nun sei in diesem Bereich

$$\max_{\substack{\lambda = 0,1,\ldots n \\ \nu = 1,2,\ldots n}} \left\{ \left| \frac{\partial y^{\nu}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu})}{\partial \xi^{\lambda}} \right| \right\} \leq M$$

und M eine gleichartige Schranke wie gefordert. Ferner ist nach Voraussetzung $\left| \frac{\partial v^k(\xi^{\mu})}{\partial \xi^{\varkappa}} \right|$ gleichartig beschränkt. Dann ist der Betrag der linken Seite von (IV, 14)

$$\left| \frac{d\lambda^{\nu}_{(j)}}{d\xi^{\lambda}} \right| \leq \left\{ \left| \frac{\partial \lambda^{\nu}_{(j)}}{\partial y^{\varkappa}_{(j)}} \right| + \left| \frac{\partial \lambda^{\nu}_{(j)}}{\partial v^k} \frac{\partial v^k}{\partial y^{\varkappa}_{(j)}} \right| \right\} \left| \frac{\partial y^{\varkappa}_{(j)}}{\partial \xi^{\lambda}} \right|$$

gleichartig beschränkt, denn die endliche Summe endlich vieler Produkte gleichartig beschränkter Glieder ist selbst gleichartig beschränkt. Außerdem ist im betrachteten abgeschlossenen Bereich der $x^\varkappa$, u^k, dem auch die Werte ξ^μ, $v^k(\xi^\mu)$ angehören, $|\lambda^\varrho_{(j)}(x^\varkappa, u^k)|$ beschränkt. Also gilt infolge einer Integralabschätzung für die Gln. (IV, 10, 11, 12)

$$\left|\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda}\right| \leq \text{const} + \text{const}\,(\xi^0 - x^0) \leq \text{const} + \text{const}\cdot\delta \leq M,$$

falls M genügend groß und δ genügend klein gewählt wurde. Wesentlich dabei ist, daß die Konstante M nur in die mit δ multiplizierte Konstante const eingeht.

δ) $(\tilde{\xi}^\mu) \in X$, $(\xi^\mu) \in X$ seien zwei verschiedene Punkte, $\xi^0 \leq \tilde{\xi}^0$, ferner sei $\tilde{x}^0 \in [0, \tilde{\xi}^0]$, $x^0 \in [0, \xi^0]$. Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\left|\left[\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda}\right]_{(\tilde{x}^0, \tilde{\xi}^0, \tilde{\xi}^\varrho)} - \left[\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda}\right]_{(x^0, \xi^0, \xi^\varrho)}\right| \leq \left|\left[\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda}\right]_{(\tilde{x}^0, \tilde{\xi}^0, \tilde{\xi}^\varrho)} - \left[\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda}\right]_{(x^0, \tilde{\xi}^0, \tilde{\xi}^\varrho)}\right| +$$

$$\left|\left[\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda}\right]_{(x^0, \tilde{\xi}^0, \tilde{\xi}^\varrho)} - \left[\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda}\right]_{(x^0, \xi^0, \tilde{\xi}^\varrho)}\right| + \left|\left[\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda}\right]_{(x^0, \xi^0, \tilde{\xi}^\varrho)} - \left[\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda}\right]_{(x^0, \xi^0, \xi^\varrho)}\right|.$$

Ist also gleichartig

$$\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda} \in \text{Lip}\,[x^0], \quad \frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda} \in \text{Lip}\,[\xi^0], \quad \frac{\partial \xi^\nu_{(j)}}{\partial z^\lambda} \in \text{Lip}\,[\xi^\varrho],$$

so ist auch gleichartig

$$\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda} \in \text{Lip}\,[x^0, \xi^0, \xi^\varrho].$$

Wir weisen im folgenden nach, daß jede der drei einzelnen Lip.-Bed. erfüllt ist.

Für alle Ableitungen (IV, 10, 11, 12) gilt gleichartig

$\dfrac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda} \in \text{Lip}\,[x^0]$:

$$\left|\left[\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda}\right]_{(\tilde{x}^0, \xi^0, \xi^\varrho)} - \left[\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\lambda}\right]_{(x^0, \xi^0, \xi^\varrho)}\right| \leq \text{const}\,|\tilde{x}^0 - x^0|,$$

denn

$$\int\limits_{\xi^0}^{\tilde{x}^0} \frac{d\lambda^\nu_{(j)}}{d\xi^\lambda}\,dt - \int\limits_{\xi^0}^{x^0} \frac{d\lambda^\nu_{(j)}}{d\xi^\lambda}\,dt = \int\limits_{x^0}^{\tilde{x}^0} \frac{d\lambda^\nu_{(j)}}{d\xi^\lambda}\,dt$$

und $\left|\dfrac{d\lambda^\nu_{(j)}}{d\xi^\lambda}\right|$ ist gleichartig beschränkt.

Für das Folgende ist zu berücksichtigen, daß die Funktionen

$$\lambda^\varrho_{(j)}(\xi^\varkappa, v^k(\xi^\varkappa)) \in \text{Lip}\,[\xi^\varkappa] \text{ gleichartig} \qquad \text{(IV, 15)}$$

sind. Denn es ist $\lambda^\varrho_{(j)}(x^\varkappa, u^k) \in C^1$ für $(x^\varkappa) \in X$, $(u^k) \in U(X)$. Ferner ist in X $(v^k(\xi^\varkappa)) \in U(X)$, $v^k(\xi^\varkappa) \in C^1$ mit gleichartig beschränkten Ableitungen. Also ist nach Lemma 2

$$\lambda^\nu_{(j)}(\xi^\varkappa, v^k(\xi^\varkappa)) \in \text{Lip}\,[\xi^\varkappa] \text{ gleichartig.}$$

Weiter sind die Funktionen (IV, 14)

$$\frac{d\lambda^{\nu}_{(j)}\left[y^{\varkappa}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}), v^k(y^{\varkappa}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}))\right]}{d\xi^{\lambda}} \in \text{Lip}\,[\xi^{\mu}] \text{ gleichartig.} \qquad \text{(IV, 16)}$$

Denn nach Voraussetzung V sind die Ableitungen

$$\frac{\partial \lambda^{\nu}_{(j)}(x^{\varkappa}, u^k)}{\partial x^{\varkappa}}, \quad \frac{\partial \lambda^{\nu}_{(j)}(x^{\varkappa}, u^k)}{\partial u^k} \in \text{Lip}\,[x^{\varkappa}, u^k]$$

im Gebiet $\mathfrak{G}^*$. Ferner ist für $(\xi^{\mu}) \in X$

$$(y^{\varkappa}_{(j)}) \in X, \quad (v^k(y^{\varkappa}_{(j)})) \in U(y^{\varkappa}_{(j)})$$

und $y^{\varkappa}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}) \in C^1$ mit gleichartig beschränkten partiellen Ableitungen, also nach Lemma 2

$$y^{\varkappa}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}) \in \text{Lip}\,[\xi^{\mu}] \text{ gleichartig;}$$

ebenso ist $v^k(\xi^{\varkappa}) \in C^1$ mit gleichartig beschränkten partiellen Ableitungen und

$$v^k(\xi^{\varkappa}) \in \text{Lip}\,[\xi^{\varkappa}] \text{ gleichartig.}$$

Schließlich ist nach Voraussetzung

$$\frac{\partial y^{\varkappa}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu})}{\partial \xi^{\lambda}} \in \text{Lip}\,[\xi^{\mu}] \text{ gleichartig}$$

mit einer Lip.-Konst. K und

$$\frac{\partial v^k(\xi^{\varkappa})}{\partial \xi^{\lambda}} \in \text{Lip}\,[\xi^{\varkappa}] \text{ gleichartig.}$$

Damit gilt (IV, 16) infolge Lemma 1.

Weiterhin ist gleichartig

$$\left| \int_{\tilde\xi^0}^{x^0} \left[\frac{d\lambda^{\nu}_{(j)}}{d\xi^{\lambda}}\right]_{(\tilde\xi^0, \tilde\xi^{\varrho})} dt - \int_{\xi^0}^{x^0} \left[\frac{d\lambda^{\nu}_{(j)}}{d\xi^{\lambda}}\right]_{(\xi^0, \tilde\xi^{\varrho})} dt \right| \leq$$

$$\left| \int_{\xi^0}^{\tilde\xi^0} \left[\frac{d\lambda^{\nu}_{(j)}}{d\xi^{\lambda}}\right]_{(\tilde\xi^0, \tilde\xi^{\varrho})} dt \right| + \int_{x^0}^{\xi^0} \left| \left[\frac{d\lambda^{\nu}_{(j)}}{d\xi^{\lambda}}\right]_{(\tilde\xi^0, \tilde\xi^{\varrho})} - \left[\frac{d\lambda^{\nu}_{(j)}}{d\xi^{\lambda}}\right]_{(\xi^0, \tilde\xi^{\varrho})} \right| dt \leq$$

$$\leq (\text{const.} + \text{const} \cdot \delta)\,(\tilde\xi^0 - \xi^0), \qquad \text{(IV, 17)}$$

da der Betrag des Integranden im ersten Integral der rechten Seite gleichartig beschränkt ist und für den Integranden des zweiten Integrals Beziehung (IV, 16) gilt.

Aus (IV, 15, 16, 17) folgt endlich $\frac{\partial z_{(j)}^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}} \in \mathrm{Lip}\,[\xi^0]$ gleichartig:

$$\left| \left[\frac{\partial z_{(j)}^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}}\right]_{(x^0,\,\tilde{\xi}^0,\,\tilde{\xi}^{\varrho})} - \left[\frac{\partial z_{(j)}^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}}\right]_{(x^0,\,\xi^0,\,\tilde{\xi}^{\varrho})} \right| \leq (\mathrm{const} + \mathrm{const}\cdot\delta)\,(\tilde{\xi}^0 - \xi^0)\,,$$

und $\frac{\partial z_{(j)}^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}} \in \mathrm{Lip}\,[\xi^{\varrho}]$ gleichartig:

$$\left| \left[\frac{\partial z_{(j)}^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}}\right]_{(x^0,\,\xi^0,\,\tilde{\xi}^{\varrho})} - \left[\frac{\partial z_{(j)}^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}}\right]_{(x^0,\,\xi^0,\,\xi^{\varrho})} \right| \leq (\mathrm{const} + \mathrm{const}\cdot\delta) \max_{\varrho=1,2,\ldots n} \{|\tilde{\xi}^{\varrho} - \xi^{\varrho}|\}.$$

Wesentlich dabei ist, daß die gleichartige Lip.-Konst. K **nur** in die mit δ multiplizierten Konstanten const eingeht. Somit ist

$$\frac{\partial z_{(j)}^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}} \in \mathrm{Lip}\,[x^0, \xi^0, \xi^{\varrho}]$$

mit der gleichartigen Lip.-Konst. K, falls K genügend groß und δ genügend klein gewählt wurde.

Damit ist gezeigt, daß die Funktionen $z_{(j)}^{\nu}(x^0, \xi^{\mu})$ zur Familie der Funktionen $y_{(j)}^{\nu}(x^0, \xi^{\mu})$ gehören.

Aus diesem Ergebnis folgt nun sofort, daß die Funktionen $w^j(\xi^{\mu})$ und $R_{j\nu}(\xi^{\mu})$ der Gln. (IV, 6, 7) **stetige** Funktionen ihrer sämtlichen Veränderlichen sind: Für die in den Gln. (IV, 6, 7) auftretenden Integrale haben wir uns dies bereits überlegt. Nun sind die $u_0^j(x^{\varrho})$, $P_{j\nu 0}(x^{\varrho})$ stetige Funktionen der x^{ϱ} für $|x^{\varrho}| \leq S_x$, die $z_{(j)}^{\varrho}(0, \xi^{\mu})$ stetige Funktionen der ξ^{μ} in X und $|z_{(j)}^{\varrho}| \leq S_x$, also sind die $w^j(\xi^{\mu})$ und $R_{j\nu}(\xi^{\mu})$ stetige Funktionen der ξ^{μ} in X. Im folgenden zeigen wir, daß die Funktionen $w^j(\xi^{\mu})$ zur Familie der Funktionen $v^j(\xi^{\mu})$, die Funktionen $R_{j\nu}(\xi^{\mu})$ zur Familie der Funktionen $Q_{j\nu}(\xi^{\mu})$ gehören und die hierfür unter α) mit δ) angegebenen Bedingungen erfüllt sind:

(b)

α) Für $\xi^0 = 0$ ist $w^j(0, \xi^{\varrho}) = u_0^j(\xi^{\varrho})$.

β) Es ist

$$|w^j(\xi^0, \xi^{\varrho}) - u_0^j(\xi^{\varrho})| \leq |w^j(\xi^0, \xi^{\varrho}) - u_0^j(z_{(j)}^{\varrho}(0, \xi^{\mu}))| + |u_0^j(z_{(j)}^{\varrho}(0, \xi^{\mu})) - u_0^j(\xi^{\varrho})|.$$

Infolge (IV, 3) erhält man

$$|w^j(\xi^0, \xi^{\varrho}) - u_0^j(z_{(j)}^{\varrho}(0, \xi^{\mu}))| \leq \int_0^{\xi^0} |\Phi^j|\,dt \leq S_{\Phi}\,\delta\,.$$

Ferner sind die Funktionen $u_0^j(x^{\varrho}) \in C^1$ im Bereich $|x^{\varrho}| \leq S_x$, also auch $u_0^j(x^{\varrho}) \in \mathrm{Lip}\,[x^{\varrho}]$ in diesem Bereich. Deshalb ist

$$|u_0^j(z_{(j)}^{\varrho}(0, \xi^{\mu})) - u_0^j(\xi^{\varrho})| \leq \mathrm{const}\cdot \max_{\varrho=1,2,\ldots n} \{|z_{(j)}^{\varrho}(0, \xi^{\mu}) - \xi^{\varrho}|\} \leq \mathrm{const}\cdot S_{\lambda}\,\delta.$$

Damit gilt

$$|w^j(\xi^0, \xi^{\varrho}) - u_0^j(\xi^{\varrho})| \leq S_{\Phi}\,\delta + \mathrm{const}\cdot S_{\lambda}\delta \leq S_u\,,$$

falls δ genügend klein gewählt wurde.

γ) Im abgeschlossenen Bereich ihrer Veränderlichen haben die Funktionen $u_0^j(x^\varrho)$ stetige, beschränkte partielle Ableitungen nach den x^ϱ, die Funktionen $z_{(j)}^\varrho(0, \xi^\mu)$ stetige, gleichartig beschränkte partielle Ableitungen nach den ξ^μ und es ist $|z_{(j)}^\varrho(0, \xi^\mu)| \leq S_x$. Deshalb ist in X $u_0^j[z_{(j)}^\varrho(0, \xi^\mu)] \in C^1$ mit gleichartig beschränkten partiellen Ableitungen nach den ξ^μ. Weiter haben die Funktionen $\Phi^j(x^\varkappa, u^k, P_{k\lambda})$ im abgeschlossenen Bereich $X \times U(X) \times P(X)$ nach Voraussetzung V stetige, beschränkte partielle Ableitungen, die Funktionen $y_{(j)}^\varkappa(x^0, \xi^\mu)$, $v^k(\xi^\mu)$, $Q_{k\lambda}(\xi^\mu)$ haben stetige und gleichartig beschränkte partielle Ableitungen nach den ξ^μ. Also kann in Gl. (IV, 6) unter dem Integralzeichen differenziert werden und wir erhalten die in allen Veränderlichen stetigen Ableitungen

$$\frac{\partial w^j}{\partial \xi^\sigma} = \frac{\partial u_0^j[z_{(j)}^\varrho(0, \xi^\mu)]}{\partial z_{(j)}^\varrho(0, \xi^\mu)} \frac{\partial z_{(j)}^\varrho(0, \xi^\mu)}{\partial \xi^\sigma} + \int_0^{\xi^0} \frac{d\Phi^j}{d\xi^\sigma} dt, \tag{IV, 18}$$

$$\frac{\partial w^j}{\partial \xi^0} = \frac{\partial u_0^j[z_{(j)}^\varrho(0, \xi^\mu)]}{\partial z_{(j)}^\varrho(0, \xi^\mu)} \frac{\partial z_{(j)}^\varrho(0, \xi^\mu)}{\partial \xi^0} + \int_0^{\xi^0} \frac{d\Phi^j}{d\xi^0} dt + \Phi^j[\xi^\varkappa, v^k(\xi^\varkappa), Q_{k\lambda}(\xi^\varkappa)]. \tag{IV, 19}$$

Dabei ist

$$\frac{d\Phi^j[y_{(j)}^\varkappa(x^0, \xi^\mu), v^k(y_{(j)}^\varkappa(x^0, \xi^\mu)), Q_{k\lambda}(y_{(j)}^\varkappa(x^0, \xi^\mu))]}{d\xi^\nu} =$$

$$\left\{\frac{\partial \Phi^j}{\partial y_{(j)}^\varkappa} + \frac{\partial \Phi^j}{\partial v^k} \frac{\partial v^k}{\partial y_{(j)}^\varkappa} + \frac{\partial \Phi^j}{\partial Q_{k\lambda}} \frac{\partial Q_{k\lambda}}{\partial y_{(j)}^\varkappa}\right\} \frac{\partial y_{(j)}^\varkappa}{\partial \xi^\nu}. \tag{IV, 20}$$

Nun sei in X

$$\max_{\substack{\varkappa = 0, 1, \ldots n \\ j = 1, 2, \ldots m}} \left\{\left|\frac{\partial v^j(\xi^\mu)}{\partial \xi^\varkappa}\right|\right\} \leq M^*$$

und M^* eine gleichartige Schranke. Nach Voraussetzung sind

$$\left|\frac{\partial y_{(j)}^\varkappa(x^0, \xi^\mu)}{\partial \xi^\nu}\right|, \quad \left|\frac{\partial Q_{k\lambda}(\xi^\mu)}{\partial \xi^\nu}\right|$$

gleichartig beschränkt. Deshalb ist der Betrag von (IV, 20) $\left|\frac{d\Phi^j}{d\xi^\nu}\right|$ gleichartig beschränkt. Ferner ist im betrachteten abgeschlossenen Bereich der $x^\varkappa$, u^k, $P_{k\lambda}$, dem auch die Werte $\xi^\varkappa$, $v^k(\xi^\varkappa)$, $Q_{k\lambda}(\xi^\varkappa)$ angehören, $|\Phi^j(x^\varkappa, u^k, P_{k\lambda})|$ beschränkt. Also gilt infolge einer Integralabschätzung für die Gln. (IV, 18, 19)

$$\left|\frac{\partial w^j}{\partial \xi^\nu}\right| \leq \text{const} + \text{const} \cdot \delta + \text{const} \leq M^*,$$

falls M^* genügend groß und δ genügend klein gewählt wurde. Die Konstante M geht hier zwar in eine nicht mit δ multiplizierte Konstante const ein, die Konstante M^* jedoch nur in die mit δ multiplizierte.

δ) Wir zeigen zunächst, daß in X

$$\frac{\partial u_0^j\,[z^\varrho_{(j)}(0,\xi^\mu)]}{\partial z^\varrho_{(j)}(0,\xi^\mu)}\,\frac{\partial z^\varrho_{(j)}(0,\xi^\mu)}{\partial \xi^\nu} \in \mathrm{Lip}\,[\xi^\mu] \text{ gleichartig}. \tag{IV, 21}$$

Nach Voraussetzung (IV, 1) sind die Ableitungen

$$\frac{\partial u_0^j(x^\varrho)}{\partial x^\sigma} \in \mathrm{Lip}\,[x^\varrho] \text{ für } |x^\varrho| \leq S_x .$$

Ferner ist $|\,z^\varrho_{(j)}(0,\xi^\mu)\,| \leq S_x$ und $z^\varrho_{(j)}(0,\xi^\mu) \in C^1$ in X mit gleichartig beschränkten Ableitungen, also nach Lemma 2

$$z^\varrho_{(j)}(0,\xi^\mu) \in \mathrm{Lip}\,[\xi^\mu] \text{ gleichartig}.$$

Schließlich ist in X

$$\frac{\partial z^\varrho_{(j)}(0,\xi^\mu)}{\partial \xi^\nu} \in \mathrm{Lip}\,[\xi^\mu] \text{ gleichartig}$$

nach dem Vorhergehenden, also gilt (IV, 21) nach Lemma 1. Nun können die Eigenschaften

$$\Phi^j\,[\xi^\varkappa,\ v^k(\xi^\varkappa),\ Q_{k\lambda}(\xi^\varkappa)] \in \mathrm{Lip}\,[\xi^\varkappa] \text{ gleichartig}, \tag{IV, 22}$$

$$\frac{d\Phi^j\,[y^\varkappa_{(j)}(x^0,\xi^\mu),\ v^k(y^\varkappa_{(j)}(x^0,\xi^\mu)),\ Q_{k\lambda}(y^\varkappa_{(j)}(x^0,\xi^\mu))]}{d\xi^\nu} \in \mathrm{Lip}\,[\xi^\mu] \text{ gleichartig}, \tag{IV, 23}$$

$$\int_0^{\xi^0} \frac{d\Phi^j}{d\xi^\nu}\,dt \in \mathrm{Lip}\,[\xi^0] \text{ gleichartig} \tag{IV, 24}$$

in X bewiesen werden, wobei die Beweise wie diejenigen für die entsprechenden Beziehungen (IV, 15, 16, 17) verlaufen. Aus (IV, 21) mit (IV, 24) folgt dann wie im Falle (a) der Funktionen $z^\nu_{(j)}(x^0,\xi^\mu)$, daß die Ableitungen (IV, 18, 19) in X eine gleichartige Lip.-Bed. erfüllen. Bei der Abschätzung der Lip.-Konst. geht zwar die gleichartige Lip.-Konst. K der Ableitungen $\frac{\partial z^\nu_{(j)}}{\partial \xi^\varkappa}$ in eine nicht mit δ multiplizierte Konstante const ein, die gleichartige Lip.-Konst. der Ableitungen $\frac{\partial v^j}{\partial \xi^\varkappa}$ jedoch nur in eine mit δ multiplizierte.

(c)

Für die Funktionen $R_{j\nu}(\xi^\mu)$ der Gln. (IV, 7) sind die Nachweise der Eigenschaften α) mit δ) völlig analog zu denjenigen für die Funktionen $w^j(\xi^\mu)$ zu führen. Dabei wird beim Beweis der Eigenschaft δ) die Voraussetzung (IV, 2) benötigt.

Somit ist $\mathfrak{h} \in \mathfrak{F}$, d. h. die Integraltransformation T vermittelt eine Abbildung von $\mathfrak{F}$ in sich. Wir beweisen nun, daß die Transformation T kontrahierend ist, falls δ genügend klein ist:

$$\|\,T\mathfrak{f}_2 - T\mathfrak{f}_1\,\| \leq k\,\|\,\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1\,\| \tag{IV, 25}$$

mit $k =$ konst, $k < 1$, $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \in \mathfrak{F}$ und beliebigen, fest gewählten Werten für (ξ^μ) und x^0, $(\xi^\mu) \in X$, $0 \leq x^0 \leq \xi^0$. Wir wählen folgende Bezeichnungen:

$$\mathfrak{f}_1 = \begin{pmatrix} y^{\nu}_{(j)1} \\ v^j_1 \\ Q_{j\nu 1} \end{pmatrix}, \mathfrak{f}_2 = \begin{pmatrix} y^{\nu}_{(j)2} \\ v^j_2 \\ Q_{j\nu 2} \end{pmatrix}; \mathfrak{h}_1 = T\mathfrak{f}_1 = \begin{pmatrix} z^{\nu}_{(j)1} \\ w^j_1 \\ R_{j\nu 1} \end{pmatrix}, \mathfrak{h}_2 = T\mathfrak{f}_2 = \begin{pmatrix} z^{\nu}_{(j)2} \\ w^j_2 \\ R_{j\nu 2} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

(a)

$$\left| z^{\nu}_{(j)2} - z^{\nu}_{(j)1} \right| \leq$$
$$\int_{x^0}^{\xi^0} \left| \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)2}(t, \xi^\mu), v^k_2(y^{\varkappa}_{(j)2}(t, \xi^\mu))] - \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)1}(t, \xi^\mu), v^k_1(y^{\varkappa}_{(j)1}(t, \xi^\mu))] \right| dt. \tag{IV, 26}$$

Für den Integranden gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left| \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)2}, v^k_2(y^{\varkappa}_{(j)2})] - \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)1}, v^k_1(y^{\varkappa}_{(j)1})] \right| \leq \\ &\left| \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)2}, v^k_2(y^{\varkappa}_{(j)2})] - \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)2}, v^k_1(y^{\varkappa}_{(j)2})] \right| + \\ &\left| \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)2}, v^k_1(y^{\varkappa}_{(j)2})] - \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)1}, v^k_1(y^{\varkappa}_{(j)1})] \right|. \end{aligned}$$

Bei fest gewählten $(x^\varkappa) \in X$ ist im abgeschlossenen konvexen Bereich $U(x^\varkappa)$ $\lambda^{\nu}_{(j)}(x^\varkappa, u^k) \in C^1$ bezüglich der u^k, also

$$\lambda^{\nu}_{(j)}(x^\varkappa, u^k) \in \text{Lip}\,[u^k].$$

Dabei nehmen wir als Lip.-Konst. eine von der Wahl von $(x^\varkappa) \in X$ unabhängige Zahl. Nun ist

$$(y^{\varkappa}_{(j)2}) \in X;\ v^k_1(y^{\varkappa}_{(j)2}),\ v^k_2(y^{\varkappa}_{(j)2}) \in U(y^{\varkappa}_{(j)2});$$

folglich ist

$$\left| \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)2}, v^k_2(y^{\varkappa}_{(j)2})] - \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)2}, v^k_1(y^{\varkappa}_{(j)2})] \right| \leq \text{const} \cdot \max_{k=1,2,\dots m} \left\{ \left| v^k_2(y^{\varkappa}_{(j)2}) - v^k_1(y^{\varkappa}_{(j)2}) \right| \right\}.$$

Weiter ist im konvexen Bereich X $\lambda^{\nu}_{(j)}[\xi^\varkappa, v^k_1(\xi^\varkappa)] \in C^1$ bezüglich der $\xi^\varkappa$ mit gleichartig beschränkten partiellen Ableitungen, also nach Lemma 2

$$\lambda^{\nu}_{(j)}[\xi^\varkappa, v^k_1(\xi^\varkappa)] \in \text{Lip}\,[\xi^\varkappa] \ \text{ gleichartig}.$$

Infolge $y^{\varkappa}_{(j)1}(x^0, \xi^\mu), y^{\varkappa}_{(j)2}(x^0, \xi^\mu) \in X$ ist also mit obiger gleichartigen Lip.-Konst.

$$\left| \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)2}, v^k_1(y^{\varkappa}_{(j)2})] - \lambda^{\nu}_{(j)} [y^{\varkappa}_{(j)1}, v^k_1(y^{\varkappa}_{(j)1})] \right| \leq \text{const} \cdot \max_{\varkappa=1,2,\dots n} \left\{ \left| y^{\varkappa}_{(j)2} - y^{\varkappa}_{(j)1} \right| \right\}.$$

Damit folgt aus (IV, 26) nach einer Integralabschätzung

$$\begin{aligned} \left| z^{\nu}_{(j)2} - z^{\nu}_{(j)1} \right| &\leq \text{const} \cdot \delta \cdot \max_{k=1,2,\dots m} \left\{ \left| v^k_2(y^{\varkappa}_{(j)2}) - v^k_1(y^{\varkappa}_{(j)2}) \right| \right\} + \text{const} \cdot \delta \cdot \max_{\varkappa=1,2,\dots n} \left\{ \left| y^{\varkappa}_{(j)2} - y^{\varkappa}_{(j)1} \right| \right\} \\ &\leq \text{const} \cdot \delta \cdot \| \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1 \| \leq k \, \| \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1 \|, \end{aligned} \tag{IV, 27}$$

für $\nu = 0, 1, 2, \dots n$, $j = 1, 2, \dots m$, falls wir δ genügend klein annehmen.

(b)

Für die Funktionen w_2^j und w_1^j gilt

$$\begin{aligned}|w_2^j - w_1^j| &\leq |u_0^j[z^\varrho_{(j)2}(0, \xi^\mu)] - u_0^j[z^\varrho_{(j)1}(0, \xi^\mu)]| + \\ &\int_0^{\xi^0} |\Phi^j[y^\varkappa_{(j)2}, v_2^k(y^\varkappa_{(j)2}), Q_{k\lambda 2}(y^\varkappa_{(j)2})] - \Phi^j[y^\varkappa_{(j)1}, v_1^k(y^\varkappa_{(j)1}), Q_{k\lambda 1}(y^\varkappa_{(j)1})]|\, dt. \qquad \text{(IV, 28)}\end{aligned}$$

Im konvexen Bereich $|x^\varrho| \leq S_x$ sind die Funktionen $u_0^j(x^\varrho) \in C^1$, haben beschränkte Ableitungen und es ist

$$|z^\varrho_{(j)1}(0, \xi^\mu)|, \ |z^\varrho_{(j)2}(0, \xi^\mu)| \leq S_x.$$

Daraus folgt

$$|u_0^j[z^\varrho_{(j)2}(0, \xi^\mu) - u_0^j[z^\varrho_{(j)1}(0, \xi^\mu)]| \leq \text{const}\, |z^\varrho_{(j)2}(0, \xi^\mu) - z^\varrho_{(j)1}(0, \xi^\mu)|.$$

Nach dem vorhergehenden Ergebnis (IV, 27) ist also

$$|u_0^j[z^\varrho_{(j)2}(0, \xi^\mu)] - u_0^j[z^\varrho_{(j)1}(0, \xi^\mu)]| \leq \text{const}\cdot\delta\cdot\|\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1\|.$$

Der Integrand in (IV, 28) kann entsprechend wie im vorhergehenden Fall (a) abgeschätzt werden, wobei man

$$\int_0^{\xi^0} |\Phi^j[y^\varkappa_{(j)2}, v_2^k, Q_{k\lambda 2}] - \Phi^j[y^\varkappa_{(j)1}, v_1^k, Q_{k\lambda 1}]|\, dt \leq \text{const}\cdot\delta\cdot\|\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1\|$$

erhält. Zusammen mit der vorigen Abschätzung folgt damit für $j = 1, 2, \ldots m$

$$|w_2^j - w_1^j| \leq \text{const}\cdot\delta\cdot\|\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1\| \leq k\,\|\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1\|, \qquad \text{(IV, 29)}$$

falls δ genügend klein gewählt wurde.

(c)

Der Beweis für die Ungleichungen

$$|R_{j\nu 2} - R_{j\nu 1}| \leq k\,\|\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1\| \qquad \text{(IV, 30)}$$

für $j = 1, 2, \ldots m$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$ ist analog demjenigen für die Ungl. (IV, 29) zu führen.

Die Ungln. (IV, 27, 29, 30) ergeben zusammen die Ungl. (IV, 25). Mit dieser Ungleichung kann nun leicht die Existenz und eindeutige Bestimmtheit eines Vektors $\mathfrak{g} \in \mathfrak{F}$ gezeigt werden, der Fixelement bei der Transformation T ist, und damit die Existenz und eindeutige Bestimmtheit einer Lösung des Anfangswertproblems für das Differentialsystem (III, 8, 9, 10):

Nach (IV, 4) ist $\mathfrak{f}_0 \in \mathfrak{F}$. Wir iterieren diesen Anfangsvektor und erhalten

$$\mathfrak{f}_1 = T\mathfrak{f}_0, \ \mathfrak{f}_2 = T\mathfrak{f}_1, \ldots \mathfrak{f}_r = T\mathfrak{f}_{r-1}, \ldots.$$

Dabei sind alle Vektoren $\mathfrak{f}_r \in \mathfrak{F}$.[1] Nun ist infolge (IV, 25)

$$\| T\mathfrak{f}_{r+s} - T\mathfrak{f}_r \| \leq \| T\mathfrak{f}_{r+1} - T\mathfrak{f}_r \| + \| T\mathfrak{f}_{r+2} - T\mathfrak{f}_{r+1} \| + \ldots + \| T\mathfrak{f}_{r+s} - T\mathfrak{f}_{r+s-1} \|$$
$$\leq (k + k^2 + \ldots + k^s) \| \mathfrak{f}_{r+1} - \mathfrak{f}_r \| \leq \frac{1-k^s}{1-k} k^{r+1} \| \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_0 \| .$$

Weiter ist

$$\| \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_0 \| \leq \text{const},$$

da die Komponentenfunktionen der Vektoren $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_0$ beschränkt sind. Da der Raum $\mathfrak{F}$ mit der benützten Norm vollständig ist, gilt wegen $k < 1$

$$\lim_{r \to \infty} \mathfrak{f}_r = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g} \in \mathfrak{F}.$$

Der Vektor $\mathfrak{g}$ ist ein Fixelement bei der Transformation T:

$$\mathfrak{g} = T\mathfrak{g}. \tag{IV, 31}$$

In Komponenten geschrieben mit

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} x^{\nu}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}) \\ u^j(\xi^{\mu}) \\ P_{j\nu}(\xi^{\mu}) \end{pmatrix}$$

lautet (IV, 31)

$$x^{\nu}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}) = \xi^{\nu} + \int_{\xi^0}^{x^0} \lambda^{\nu}_{(j)} [x^{\varkappa}_{(j)}(t, \xi^{\mu}), u^k(x^{\varkappa}_{(j)}(t, \xi^{\mu}))] \, dt, \tag{IV, 32}$$

$$u^j(\xi^{\mu}) = u^j_0 [x^{\varrho}_{(j)}(0, \xi^{\mu})] + \int_0^{\xi^0} \Phi^j [x^{\varkappa}_{(j)}(t, \xi^{\mu}), u^k(x^{\varkappa}_{(j)}(t, \xi^{\mu})), P_{k\lambda}(x^{\varkappa}_{(j)}(t, \xi^{\mu}))] \, dt, \tag{IV, 33}$$

$$P_{j\nu}(\xi^{\mu}) = P_{j\nu 0} [x^{\varrho}_{(j)}(0, \xi^{\mu})] + \int_0^{\xi^0} \Psi_{j\nu} [x^{\varkappa}_{(j)}(t, \xi^{\mu}), u^k(x^{\varkappa}_{(j)}(t, \xi^{\mu})), P_{k\lambda}(x^{\varkappa}_{(j)}(t, \xi^{\mu}))] \, dt. \tag{IV, 34}$$

Da $\mathfrak{g} \in \mathfrak{F}$ ist, haben seine Komponentenfunktionen die unter (a), (b), (c) für diese Funktionen angegebenen Eigenschaften α) mit δ), insbesondere also stetige partielle Ableitungen nach den ξ^{μ} und für $\xi^0 = 0$ die durch die Anfangsmannigfaltigkeit vorgegebenen Werte. Ist andererseits durch

$$\mathfrak{g}^* = \begin{pmatrix} x^{*\nu}_{(j)}(x^0, \xi^{\mu}) \\ u^{*j}(\xi^{\mu}) \\ P^*_{j\nu}(\xi^{\mu}) \end{pmatrix} \in \mathfrak{F}$$

irgendeine Lösung des Integralgleichungssystems (IV, 32, 33, 34) gegeben, dann ist $\mathfrak{g}^* \equiv \mathfrak{g}$. Denn aus

$$\mathfrak{g}^* = T\mathfrak{g}^*$$

folgt nach (IV, 25) und (IV, 31)

$$\| \mathfrak{g}^* - \mathfrak{g} \| = \| T\mathfrak{g}^* - T\mathfrak{g} \| \leq k \| \mathfrak{g}^* - \mathfrak{g} \|,$$

---

[1] Hier sind $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ Iterierte von $\mathfrak{f}_0$, in Ungl. (IV, 25) waren $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ beliebige Vektoren $\in \mathfrak{F}$.

also wegen $k < 1$

$$\| \mathfrak{g}^* - \mathfrak{g} \| = 0$$

und deshalb

$$\mathfrak{g}^* \equiv \mathfrak{g}\,.$$

Für einen beliebig gewählten, festen Punkt $(\xi^\varkappa) \in X$ sind die Funktionen von x^0

$$\begin{aligned} x^\nu &= x^\nu_{(j)}(x^0, \xi^\mu)\,, \\ u^j &= u^j(x^\mu_{(j)}(x^0, \xi^\varkappa))\,, \\ P_{j\nu} &= P_{j\nu}(x^\mu_{(j)}(x^0, \xi^\varkappa)) \end{aligned}$$

im Intervall $0 \leq x^0 \leq \xi^0$ differenzierbar (in den Randpunkten des Intervalls jedenfalls einseitig). Für einen beliebigen Punkt $x^0 = \tilde{\xi}^0$ des Intervalls $[0, \xi^0]$ erhält man mit der Bezeichnung $\tilde{\xi}^\nu_{(j)} = x^\nu_{(j)}(\tilde{\xi}^0, \xi^\mu)$ aus Gl. (IV, 32)

$$\left[\frac{d x^\nu_{(j)}(x^0, \xi^\mu)}{d x^0}\right]_{(x^0 = \tilde{\xi}^0)} = \lambda^\nu_{(j)}(\tilde{\xi}^\mu_{(j)}, u^k(\tilde{\xi}^\mu_{(j)}))\,,$$

aus Gl. (IV, 33)

$$\left[\frac{d u^j(x^\mu_{(j)}(x^0, \xi^\varkappa))}{d x^0}\right]_{(x^0 = \tilde{\xi}^0)} = \Phi^j(\tilde{\xi}^\mu_{(j)}, u^k(\tilde{\xi}^\mu_{(j)}), P_{k\lambda}(\tilde{\xi}^\mu_{(j)}))\,,$$

und aus Gl. (IV, 34)

$$\left[\frac{d P_{j\nu}(x^\mu_{(j)}(x^0, \xi^\varkappa))}{d x^0}\right]_{(x^0 = \tilde{\xi}^0)} = \Psi_{j\nu}(\tilde{\xi}^\mu_{(j)}, u^k(\tilde{\xi}^\mu_{(j)}), P_{k\lambda}(\tilde{\xi}^\mu_{(j)}))\,.$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} x^\nu &= x^\nu_{(j)}(x^0, \xi^\mu)\,, \\ u^j &= u^j(x^\mu_{(j)}(x^0, \xi^\varkappa))\,, \\ P_{j\nu} &= P_{j\nu}(x^\mu_{(j)}(x^0, \xi^\varkappa)) \end{aligned}$$

sind also Lösungen des Differentialsystems (III, 8, 9, 10), welche die Anfangswerte

$$\begin{aligned} x^\nu_{(j)}(\xi^0, \xi^\mu) &= \xi^\nu\,, \\ u^j(x^\mu_{(j)}(0, \xi^\varkappa)) &= u^j_0(x^\varrho_{(j)}(0, \xi^\varkappa))\,, \\ P_{j\nu}(x^\mu_{(j)}(0, \xi^\varkappa)) &= P_{j\nu 0}(x^\varrho_{(j)}(0, \xi^\varkappa)) \end{aligned}$$

annehmen. Ist andererseits

$$\mathfrak{g}^* = \begin{pmatrix} x^{*\nu}_{(j)}(x^0, \xi^\mu) \\ u^{*j}(\xi^\mu) \\ P^*_{j\nu}(\xi^\mu) \end{pmatrix} \in \mathfrak{F}$$

und sind die Funktionen

$$\begin{aligned} x^\nu &= x^{*\nu}_{(j)}(x^0, \xi^\mu), \\ u^j &= u^{*j}(x^{*\mu}_{(j)}(x^0, \xi^\varkappa)), \\ P_{j\nu} &= P^*_{j\nu}(x^{*\mu}_{(j)}(x^0, \xi^\varkappa)) \end{aligned}$$

Lösungen des Differentialsystems (III, 8, 9, 10), so folgt durch Integration, daß sie auch das Integralgleichungssystem (IV, 32, 33, 34) erfüllen und folglich eindeutig bestimmt sind.

Wir bemerken noch, daß die n-dimensionale Anfangsmannigfaltigkeit, gegeben durch die Funktionen

$$u_0^i(x^\varrho),\ p_{\nu 0}^i(x^\varrho),\ |x^\varrho| \leq S_x,\ x^0 = 0,$$

eine Integralmannigfaltigkeit des Systems der Gln. (III, 3, 4, 5, 6) ist: In der Hyperebene $x^0 = 0$ wurde entsprechend den Gln. (III, 4)

$$p_{\sigma 0}^i(x^\varrho) = \frac{\partial u_0^i(x^\varrho)}{\partial x^\sigma}$$

gesetzt. Die Funktionen $p_{00}^i(x^\varrho)$ haben wir so bestimmt, daß die Gln. (III, 3) erfüllt sind. Durch Differentiation der hierdurch entstehenden Identitäten folgen die Gln. (III, 5). Ferner sind die Funktionen $u_0^i(x^\varrho) \in C^2$, also sind infolge

$$\frac{\partial p_{\sigma 0}^i}{\partial x^\tau} = \frac{\partial p_{\tau 0}^i}{\partial x^\sigma}$$

auch die Gln. (III, 6) erfüllt.

Das Ergebnis dieses Kapitels formulieren wir im

Satz 3: Im Bereich $|x^\varrho| \leq S_x$ der Hyperebene $x^0 = 0$ sollen die Funktionen

$$\begin{aligned} u^k &= u_0^k(x^\varrho),\quad u_0^k(x^\varrho) \in C^2, \\ p_\sigma^k &= p_{\sigma 0}^k(x^\varrho) = \frac{\partial u_0^k(x^\varrho)}{\partial x^\sigma}, \\ p_0^k &= p_{00}^k(x^\varrho) \end{aligned}$$

eine n-dimensionale Integralmannigfaltigkeit des zum quasilinearen System (III, 1) gehörigen abgeschlossenen Differentialsystems darstellen, in einer Umgebung $\mathfrak{S}$ dieser Mannigfaltigkeit für dieses Differentialsystem die Voraussetzungen I, IIb, IV und V gelten und die Funktionen

$$\frac{\partial P_{k\nu 0}(x^\varrho)}{\partial x^\sigma} \in \mathrm{Lip}\,[x^\varrho] \text{ für } |x^\varrho| \leq S_x$$

sein. Dann hat das System von Integralgleichungen (IV, 32, 33, 34) genau einen Lösungsvektor

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} x_{(j)}^\nu(x^0, \xi^\mu) \\ u^j(\xi^\mu) \\ P_{j\nu}(\xi^\mu) \end{pmatrix} \in \mathfrak{F}.$$

Für jeden festen Punkt $(\xi^\mu) \in X$, $\xi^0 > 0$, sind die Funktionen

$$\begin{aligned} x^\nu &= x_{(j)}^\nu(x^0, \xi^\mu), \\ u^j &= u^j(x_{(j)}^\mu(x^0, \xi^\varkappa)), \\ P_{j\nu} &= P_{j\nu}(x_{(j)}^\mu(x^0, \xi^\varkappa)) \end{aligned}$$

eine Lösung des Systems (III, 8, 9, 10). Eine derartige Lösung ist eindeutig bestimmt.

V. EXISTENZ UND UNITÄT DER LÖSUNGEN DES ANFANGSWERTPROBLEMS FÜR DAS DIFFERENTIALSYSTEM (III, 3, 4, 5, 6)

Das für das Differentialsystem (III, 3, 4, 5, 6) gestellte Anfangswertproblem soll darin bestehen, eine $(n+1)$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit dieses Systems zu finden, welche die durch die Funktionen

$$u^k = u_0^k(x^\varrho), \, p_\sigma^k = \frac{\partial u_0^k(x^\varrho)}{\partial x^\sigma}, \, p_0^k = p_{00}^k(x^\varrho), \, |x^\varrho| \leq S_x, \, x^0 = 0$$

dargestellte n-dimensionale Integralmannigfaltigkeit enthält.

Für $(\xi^\mu) \in X$ ist $P_{j\nu}(\xi^\mu) \in C^1$ bezüglich der ξ^μ. Da nun nach den in Satz 3 angegebenen Voraussetzungen für $(x^\mu) \in X$, $(u^l) \in U(X)$

$$A_{ik}^0(x^\mu, u^l) \in C^1 \text{ und } |A_{ik}^0| \neq 0$$

gilt und die Funktionswerte $u^k(\xi^\mu) \in U(X)$ sind, folgt aus den Substitutionen (III, 7)

$$P_{j\nu}(\xi^\mu) = A_{jk}^0(\xi^\mu, u^l(\xi^\mu)) \, p_\nu^k$$

für $(\xi^\mu) \in X$ die eindeutige Bestimmtheit der Funktionen

$$p_\nu^k = p_\nu^k(\xi^\mu)$$

und $p_\nu^k(\xi^\mu) \in C^1$. Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^\nu &= x_{(j)}^\nu(x^0, \xi^\mu), \\ u^k &= u^k(x_{(j)}^\mu(x^0, \xi^\varkappa)), \\ p_\nu^k &= p_\nu^k(x_{(j)}^\mu(x^0, \xi^\varkappa)), \\ 0 &\leq x^0 \leq \xi^0, \, \xi^0 > 0, \end{aligned}$$

werden Kurvenstücke im (x^ν, u^k, p_ν^k)-Raum durch den Punkt $(\xi^\mu, u^k(\xi^\mu), p_\nu^k(\xi^\mu))$ dargestellt. Längs des j-ten Kurvenstückes gilt nach Satz 3

$$dx^\nu = \lambda_{(j)}^\nu \, dx^0,$$

$$dP_{j\nu} = \left\{\left(\frac{\partial A_{jk}^0}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_{jk}^0}{\partial u^l} p_\mu^l\right) \lambda_{(j)}^\mu \, p_\nu^k - B_{j\nu}\right\} dx^0,$$

bzw.

$$A_{jk}^0 \, dp_\nu^k + B_{j\nu} \, dx^0 = 0.$$

Damit ergibt sich wie bei Gl. (II, 8)

$$A_{jk}^\nu \, dp_\nu^k + B_{j\nu} \, dx^\nu = 0.$$

Dieser Spezialfall der Gl. (III, 5) besagt, daß längs dieses Kurvenstückes

$$dF_j\,[x^\nu_{(j)}\,(x^0,\xi^\mu),\,u^k\,(x^\mu_{(j)}\,(x^0,\xi^\varkappa)),\,p^k_\nu\,(x^\mu_{(j)}\,(x^0,\xi^\varkappa))] = 0$$

und somit

$$F_j\,[x^\nu_{(j)}\,(x^0,\xi^\mu),\,u^k\,(x^\mu_{(j)}\,(x^0,\xi^\varkappa)),\,p^k_\nu\,(x^\mu_{(j)}\,(x^0,\xi^\varkappa))] = \mathrm{const}$$

ist (const soll jetzt wieder irgendeine Konstante bedeuten). Der Wert der Konstanten ist Null. Denn für $x^0 = 0$ ist

$$F_j\,[x^\nu_{(j)}\,(0,\xi^\mu),\,u^k\,(x^\mu_{(j)}\,(0,\xi^\varkappa)),\,p^k_\nu\,(x^\mu_{(j)}\,(0,\xi^\varkappa))] = 0.$$

Also gilt für $x^0 = \xi^0,\ 0 < \xi^0 \leq \delta$,

$$F_j\,[\xi^\nu,\,u^k\,(\xi^\mu),\,p^k_\nu\,(\xi^\mu)] = 0.$$

Da (ξ^μ) ein beliebiger Punkt des Bereiches X mit $\xi^0 > 0$ sein kann, erfüllen somit die Funktionen

$$u^k = u^k\,(x^\mu),\ u^k\,(x^\mu) \in C^1;\ p^k_\nu = p^k_\nu\,(x^\mu),\ p^k_\nu\,(x^\mu) \in C^1$$

für $(x^\mu) \in X$ die Gln. (III, 3), da ihre Werte auch noch für $x^0 = 0$ Lösungen dieser Gleichungen sind. Damit befriedigen sie auch die zu (III, 3) äquivalenten Gln. (III, 1), da die Werte der x^μ und $u^k\,(x^\mu)$ in dem Bereich liegen, für den $|l^i_j| \neq 0$ ist.

Sollen die Funktionen $u^k\,(x^\mu)$ im Bereich X nun auch die Gln. (III, 4) erfüllen, so muß in X notwendig

$$\frac{\partial u^k\,(x^\mu)}{\partial x^\nu} \equiv p^k_\nu\,(x^\mu)$$

sein. Es genügt anzunehmen, daß in X für $x^0 > 0$

$$\frac{\partial u^k\,(x^\mu)}{\partial x^\sigma} \equiv p^k_\sigma\,(x^\mu),\ \sigma = 1, 2, \ldots n, \qquad \text{(V, 1)}$$

ist. Für $x^0 = 0$ gilt (V, 1) bereits. Nach Satz 3 gibt es für jeden Punkt $(\xi^\mu) \in X$, $\xi^0 > 0$, ein Kurvenstück

$$x^\nu = x^\nu_{(j)}\,(x^0,\xi^\mu),\ 0 \leq x^0 \leq \xi^0,$$

längs dem die Gln. (III, 9) gelten. Es ist aber auch jeder Punkt $(\xi^{*\mu})$ mit $\xi^{*0} = 0$, $|\xi^{*\varrho}| < S_x$ Ausgangspunkt eines derartigen Kurvenstücks, wie aus der Existenz und Unität der Lösungen des Systems

$$\frac{dx^\nu}{dx^0} = \lambda^\nu_{(j)}\,(x^\mu,\,u^k\,(x^\mu))$$

durch diesen Punkt folgt. Somit ist für $(x^\mu) \in X$, $|x^\varrho| < S_x$,

$$\frac{\partial u^j\,(x^\mu)}{\partial x^\nu}\,\lambda^\nu_{(j)}\,(x^\mu,\,u^k\,(x^\mu)) = p^j_\nu\,(x^\mu)\,\lambda^\nu_{(j)}\,(x^\mu,\,u^k\,(x^\mu)),$$

woraus man mit (V, 1)

$$p_0^j(x^\mu) = \frac{\partial u^j(x^\mu)}{\partial x^0}$$

erhält. Für Randpunkte $x^0 = 0$, $|x^\varrho| \leq S_x$ gilt diese Beziehung mit der in solchen Punkten erklärten Definition der partiellen Ableitungen nach x^0 infolge der Stetigkeit.

Sind nun die Gln. (III, 4) erfüllt, so gelten auch die durch Differentiation aus den Identitäten

$$F_j[x^\nu, u^k(x^\mu), p_\nu^k(x^\mu)] = 0$$

hervorgehenden Gln. (III, 5)

$$dF_j[x^\nu, u^k(x^\mu), p_\nu^k(x^\mu)] = 0.$$

Schließlich sind im Bereich X die Funktionen $p_\nu^k(x^\mu) \in C^1$, so daß wegen

$$\frac{\partial p_\nu^k(x^\mu)}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial p_\lambda^k(x^\mu)}{\partial x^\nu} \tag{V, 2}$$

auch die Gln. (III, 6) befriedigt werden.

Bei Gültigkeit der Beziehungen (V, 1) sind also die nach Satz 3 aus den Lösungen des Systems (III, 8, 9, 10) erhaltenen Funktionen

$$u^k = u^k(x^\mu), \quad p_\nu^k = p_\nu^k(x^\mu)$$

eine Lösung des Differentialsystems (III, 3, 4, 5, 6), die für $x^0 = 0$ die vorgegebenen Werte annimmt. Gibt es andererseits im betrachteten Gebiet $\mathfrak{G}$ eine Lösung

$$u^k = u^{*k}(x^\mu), \; p_\nu^k = p_\nu^{*k}(x^\mu), \; u^{*k}(x^\mu) \in C^2,$$

dieses Differentialsystems, so daß für $x^0 = 0$, $|x^\varrho| \leq S_x$

$$u^{*k}(0, x^\varrho) = u_0^k(x^\varrho)$$

ist, so gibt es auf der durch sie bestimmten $(n+1)$-dimensionalen Integralmannigfaltigkeit infolge Voraussetzung IV charakteristische Integrallinienelemente, die dem System (III, 8, 9, 10) genügen müssen. Infolge der eindeutigen Bestimmtheit der Lösungen dieses Systems ist in X

$$u^{*k}(x^\mu) \equiv u^k(x^\mu),$$
$$p_\nu^{*k}(x^\mu) \equiv p_\nu^k(x^\mu).$$

Satz 4: Gelten die Voraussetzungen von Satz 3 und ist für die aus den Lösungen des Systems (III, 8, 9, 10) erhaltenen Funktionen $u^k(x^\mu)$, $p_\nu^k(x^\mu)$ für $(x^\mu) \in X$, $x^0 > 0$,

$$p_\sigma^k(x^\mu) \equiv \frac{\partial u^k(x^\mu)}{\partial x^\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \ldots n,$$

dann ist im Bereich X $u^k(x^\mu) \in C^2$, $p_0^k(x^\mu) \equiv \frac{\partial u^k(x^\mu)}{\partial x^0}$, und die Funktionen $u^k = u^k(x^\mu)$, $p_\nu^k = p_\nu^k(x^\mu)$ stellen dort eine Lösung des Differentialsystems (III, 3, 4, 5, 6) dar, die für

$x^0 = 0$ die im Bereich $|x^\varrho| \leq S_x$ vorgegebenen Werte annimmt. Für jede in $\mathfrak{G}$ liegende Lösung $u^k = u^{*k}(x^\mu)$, $u^{*k}(x^\mu) \in C^2$, $p_\nu^k = p_\nu^{*k}(x^\mu)$ mit dieser Eigenschaft ist im Bereich X

$$u^k(x^\mu) \equiv u^{*k}(x^\mu),\; p_\nu^k(x^\mu) \equiv p_\nu^{*k}(x^\mu).$$

Aus der Gültigkeit der Gln. (III, 6) für die Funktionen $p_\nu^k(x^\mu)$ folgt ebenfalls die Gültigkeit der Gln. (III, 4). Denn infolge (V, 2) gibt es dann im Bereich X Funktionen $U^k(x^\mu)$, so daß

$$U^k(x^\mu) \in C^2,\quad \frac{\partial U^k(x^\mu)}{\partial x^\nu} = p_\nu^k(x^\mu)$$

ist. Längs der Kurvenstücke

$$x^\nu = x_{(j)}^\nu(x^0, \xi^\mu),\; 0 \leq x^0 \leq \xi^0,$$

gilt dann

$$dU^j - du^j = 0,$$

also

$$U^j(x_{(j)}^\nu(x^0, \xi^\mu)) - u^j(x_{(j)}^\nu(x^0, \xi^\mu)) = \text{const},$$

und falls

$$U^j(x_{(j)}^\nu(0, \xi^\mu)) = u_0^j(x_{(j)}^\nu(0, \xi^\mu))$$

ist, eindeutig

$$U^j(\xi^\nu) = u^j(\xi^\nu)$$

für jeden Punkt $(\xi^\nu) \in X$. Also ist (V, 1) erfüllt.

Die Gln. (III, 9a) wurden bei der Integration in Kapitel IV nicht benützt. Sie sind im Bereich X für jede Lösung

$$u^k = u^k(x^\mu),\; p_\nu^k = p_\nu^k(x^\mu)$$

des Systems (III, 3, 4, 5, 6) erfüllt. Wir nehmen nun an, daß in der Matrix (A_{jk}^0) außer den Diagonalelementen A_{jj}^0 nur noch die Elemente $A_{jk_j}^0$, $k_j \neq j$, nicht identisch null sind, alle übrigen aber identisch null sind und für die aus den Lösungen des Systems (III, 8, 9, 10) erhaltenen Funktionen

$$u^k = u^k(x^\mu),\; p_\nu^k = p_\nu^k(x^\mu)$$

auch die zu den Gln. (III, 9a) gehörigen Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u^{k_j}(x^\mu)}{\partial x^\nu} - p_\nu^{k_j}(x^\mu)\right)\lambda_{(j)}^\nu(x^\mu, u^k(x^\mu)) = 0 \tag{V, 3}$$

gelten. Dann sind in X die Funktionen

$$u^k = u^k(x^\mu),\; p_\nu^k = \frac{\partial u^k(x^\mu)}{\partial x^\nu} \tag{V, 4}$$

Lösungen des Systems (III, 3). Denn zunächst bestehen nach Obigem die Gleichungen

$$F_j\,[x^\nu,\, u^k\,(x^\mu),\, p_\nu^k\,(x^\mu)] = 0.$$

Nun ist in (III, 3)

$$A_{jk}^\nu\, p_\nu^k = (A_{jj}^0\, p_\nu^j + A_{jk_j}^0\, p_\nu^{k_j})\, \lambda_{(j)}^\nu.$$

Mit Voraussetzung (V, 3) ist für jeden festen Index j für die Funktionen $u^k = u^k\,(x^\mu)$, $p_\nu^k = p_\nu^k\,(x^\mu)$; $k = j,\, k_j$;

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^\nu}\, \lambda_{(j)}^\nu = p_\nu^k\, \lambda_{(j)}^\nu,$$

also ist auch

$$F_j\left[x^\nu,\, u^k\,(x^\mu),\, \frac{\partial u^k\,(x^\mu)}{\partial x^\nu}\right] = 0.$$

Die Funktionen (V, 4) erfüllen infolge $u^k\,(x^\mu) \in C^1$ ferner die Gln. (III, 4). Für $x^0 = 0$ nehmen die Funktionen (V, 4) die vorgeschriebenen Anfangswerte an.

Satz 5: Gelten die Voraussetzungen von Satz 3, sind im System (III, 3) von den Koeffizienten A_{jk}^0 außer den Koeffizienten A_{jj}^0 noch die Koeffizienten $A_{jk_j}^0$ nicht identisch null, alle übrigen aber identisch null, und gelten für die aus den Lösungen des Systems (III, 8, 9, 10) erhaltenen Funktionen $u^k = u^k(x^\mu)$, $p_\nu^k = p_\nu^k(x^\mu)$ die Gln. (V, 3), so sind in X die Funktionen $u^k = u^k\,(x^\mu), p_\nu^k = \dfrac{\partial u^k(x^\mu)}{\partial x^\nu}$ eine Lösung des Differentialsystems (III, 3, 4), welche die für $x^0 = 0$, $|x^\varrho| \leq S_\varkappa$ vorgegebenen Werte annimmt.

Die durch die aus einer Lösung des Systems (III, 8, 9, 9a, 10) erhaltenen Funktionen

$$\begin{aligned}
x^\nu &= x_{(j)}^\nu\,(x^0,\, \xi^\mu),\\
u^k &= u^k\,(x_{(j)}^\mu\,(x^0,\, \xi^\varkappa)),\\
p_\nu^k &= p_\nu^k\,(x_{(j)}^\mu\,(x^0,\, \xi^\varkappa)),\\
0 &\leq x^0 \leq \xi^0,\ 0 < \xi^0,\ (\xi^\nu) \in X,
\end{aligned}$$

dargestellten Kurvenstücke nennen wir CAUCHYsche Charakteristiken.

Im nichtanalytischen Fall kann bei nichtlinearen Elementarteilern der Matrizen

$$(a_{ik}^0\, \lambda^\mu - a_{ik}^\mu)$$

kein allgemeiner Satz über die Existenz von Lösungen des gestellten Anfangswertproblems für Systeme (III, 1) gelten, wie zwei Beispiele von O. PERRON [20] zeigen.

Schließlich sei zum Vergleich mit dem analytischen Fall [21] noch bemerkt, daß im Bereich $\mathfrak{G}$ das Geschlecht des Differentialsystems (III, 3, 4, 5, 6) $g = n + 1$ und der Charakter $s_{n+1} = 0$ ist.

VI. DIAGONALE UND DIAGONALISIERBARE SYSTEME (III, 3)

Wir nehmen an, daß für die Gln. (III, 3) die Matrix (A^0_{jk}) nur die Diagonalelemente enthält: $A^0_{jk} = 0$ für $j \neq k$. Wir können dann $A^0_{jj} = 1$ und $A^\nu_{jj} = \lambda^\nu_{(j)}$ setzen. An Stelle des Systems (III, 3, 4, 5, 6) tritt dann das System

$$\lambda^\nu_{(j)} p^j_\nu + H_j = 0, \tag{VI, 1}$$

$$du^j - p^j_\nu \, dx^\nu = 0, \tag{VI, 2}$$

$$d(\lambda^\nu_{(j)} p^j_\nu + H_j) = 0, \tag{VI, 3}$$

$$d \wedge (p^j_\nu \, dx^\nu) = 0. \tag{VI, 4}$$

Die Gleichungen des charakteristischen Systems vereinfachen sich für den vorliegenden Fall wesentlich: Die Gln. (III, 8) lauten

$$dx^\nu = \lambda^\nu_{(j)} \, dx^0, \tag{VI, 5}$$

die Gln. (III, 9a) können entbehrt werden; in den Gln. (III, 9) werden die Funktionen Φ^j unabhängig von den $P_{j\nu}$ bzw. p^j_ν, denn aus (VI, 1) folgt

$$p^j_\nu \lambda^\nu_{(j)} = - H_j,$$

also für die Gln. (III, 9)

$$du^j = - H_j \, dx^0. \tag{VI, 6}$$

(A^0_{jk}) ist eine Einheitsmatrix und die p^k_ν werden nicht substituiert. Die Gln. (III, 10) können entbehrt werden. Denn unabhängig hiervon läßt sich wie in Kapitel IV und unter den dort benützten Voraussetzungen für $\xi^0 > 0$ die Existenz und Unität der Lösungen

$$x^\nu = x^\nu_{(j)}(x^0, \xi^\mu),$$

$$u^j = u^j(x^\nu_{(j)}(x^0, \xi^\mu))$$

des Systems (VI, 5, 6) beweisen, so daß die Funktionen $x^\nu_{(j)}(x^0, \xi^\mu)$, $u^j(\xi^\mu)$ die unter (a) und (b) in Kapitel IV angegebenen Eigenschaften α) mit δ) besitzen. Damit folgt aber wie in Satz 5, daß die Funktionen

$$u^j = u^j(x^\mu), \; p^j_\nu = \frac{\partial u^j(x^\mu)}{\partial x^\nu}$$

Lösungen des Anfangswertproblems für das Differentialsystem (VI, 1, 2) sind. Es sind sogar die einzigen mit diesen Eigenschaften im betrachteten Bereich, wie aus der Unität der Lösungen des Systems (VI, 5, 6) folgt. Dabei können noch alle die $P_{j\nu}(x^\mu)$ betreffenden Differenzierbarkeits- und LIPSCHITZ-Bedingungen entbehrt werden, die nur für die unter (c) durchgeführten Beweise des Kapitels IV benötigt werden. Wir erhalten dann

Satz 6: Im Bereich $|x^\varrho| \leq S_x$ der Hyperebene $x^0 = 0$ seien die Funktionen $u^j = u_0^j(x^\varrho)$, $u_0^j(x^\varrho) \in C^1$ gegeben. In einer Umgebung $\mathfrak{G}$ der hierdurch im (x^ν, u^k)-Raum dargestellten Mannigfaltigkeit sollen die Funktionen $\lambda^\sigma_{(j)}(x^\mu, u^k)$, $H_j(x^\mu, u^k) \in C^1$, die Funktionen

$$\frac{\partial \lambda^\sigma_{(j)}(x^\mu, u^k)}{\partial x^\nu}, \quad \frac{\partial \lambda^\sigma_{(j)}(x^\mu, u^k)}{\partial u^l}, \quad \frac{\partial H_j(x^\mu, u^k)}{\partial x^\nu}, \quad \frac{\partial H_j(x^\mu, u^k)}{\partial u^l} \in \operatorname{Lip}\,[x^\mu, u^k]$$

und die Funktionen

$$\frac{\partial u_0^j(x^\varrho)}{\partial x^\sigma} \in \operatorname{Lip}\,[x^\varrho] \text{ für } |x^\varrho| \leq S_x$$

sein. Dann hat das System (VI, 5, 6) für jeden Punkt $(\xi^\mu) \in X$, $\xi^0 > 0$, genau eine Lösung

$$\begin{aligned} x^\nu &= x^\nu_{(j)}(x^0, \xi^\mu), \\ u^j &= u^j(x^\mu_{(j)}(x^0, \xi^\varkappa)), \\ 0 &\leq x^0 \leq \xi^0, \end{aligned}$$

für welche die Funktionen $x^\nu_{(j)}(x^0, \xi^\mu)$ bzw. $u^j(\xi^\mu)$ die unter (a) bzw. (b) in Kapitel IV angegebenen Eigenschaften haben. In X sind die Funktionen $u^j = u^j(x^\mu)$, $u^j(x^\mu) \in C^1$, $p^j_\nu = \frac{\partial u^j(x^\mu)}{\partial x^\nu}$ die eindeutig bestimmte Lösung des Differentialsystems (VI, 1, 2, 3, 4), die für $x^0 = 0$ die im Bereich $|x^\varrho| \leq S_x$ vorgegebenen Werte annimmt.

Bei den Gln. (VI, 3, 4) ist die äußere Differentialbildung gegebenenfalls im verallgemeinerten Sinn aufzufassen. Die früheren Voraussetzungen IIb und IV sind bereits durch die spezielle Wahl des Systems (VI, 1) erfüllt. Die Forderung einer Lipschitz-Bedingung für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_0^j(x^\varrho)}{\partial x^\sigma}$ war früher in der Forderung (IV, 1) enthalten.

Zu den diagonalen Systemen gehört auch die Jacobische Klasse von Systemen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung [22].

Obwohl die Gestalt der Systeme (VI, 1) sehr speziell erscheint, läßt sich eine umfangreiche Klasse von Systemen (III, 3) auf Systeme dieser Art zurückführen. Wir nehmen an, daß das System die Form

$$A^0_{jk}(x^\mu, u^l)\, \lambda^\nu_{(j)}(x^\mu, u^l)\, p^k_\nu + H_j(x^\mu, u^l) = 0$$

mit $\lambda^0_{(j)} = 1$ hat und in einem gewissen abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{G}$, $A^0_{jk}(x^\mu, u^l) \in C^1$ ist. In $\mathfrak{B}$ sollen m Funktionen $U_j(x^\mu, u^l)$ existieren, für die

$$U_j(x^\mu, u^l) \in C^1, \quad \frac{\partial U_j(x^\mu, u^l)}{\partial u^k} = A^0_{jk}(x^\mu, u^l) \tag{VI, 7}$$

gilt. Notwendig und bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{B}$ auch hinreichend hierfür ist bekanntlich, daß für alle Paare von Indizes i, k in $\mathfrak{B}$ die Beziehungen

$$\frac{\partial A^0_{jk}}{\partial u^i} = \frac{\partial A^0_{ji}}{\partial u^k} \tag{VI, 8}$$

gelten. Dies ist z. B. für halblineare Systeme (III, 3), bei denen die Koeffizienten A^0_{jk} von den u^l unabhängig sind, stets der Fall. Für die Gln. (III, 3, 4) schreiben wir dann unter Berücksichtigung von (II, 9)

$$\frac{\partial U_j(x^\mu, u^l)}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial x^\nu} \lambda^\nu_{(j)}(x^\mu, u^l) + H_j(x^\mu, u^l) = 0. \tag{VI, 9}$$

Infolge

$$dU_j(x^\mu, u^l) = \frac{\partial U_j(x^\mu, u^l)}{\partial x^\nu} dx^\nu + \frac{\partial U_j(x^\mu, u^l)}{\partial u^k} du^k$$

gilt weiter für jede Funktion $u^l = \varphi^l(x^\mu)$, $\varphi^l(x^\mu) \in C^1$ in $\mathfrak{B}$, die Identität

$$\frac{\partial U_j(x^\mu, \varphi^l(x^\mu))}{\partial x^\nu} \lambda^\nu_{(j)}(x^\mu, u^l) - \frac{\partial U_j(x^\mu, u^l)}{\partial x^\nu} \lambda^\nu_{(l)}(x^\mu, u^l)$$
$$\equiv \frac{\partial U_j(x^\mu, u^l)}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial x^\nu} \lambda^\nu_{(j)}(x^\mu, u^l). \tag{VI, 10}$$

Nun führen wir im Bereich $\mathfrak{B}$ an Stelle der u^l neue Koordinaten U_j ein durch

$$U_j = U_j(x^\mu, u^l) \tag{VI, 11}$$

und nehmen an, daß in $\mathfrak{B}$ die Determinante

$$\left| \frac{\partial U_j(x^\mu, u^l)}{\partial u^k} \right| \neq 0$$

ist. Entsprechen dann den vorgegebenen Anfangswerten $u_0^l(x^\varrho)$ nach (VI, 11) die Werte $U_{j0}(x^\varrho)$, so ist die Zuordnung der U_j zu den u^l in einer Umgebung dieser Werte umkehrbar eindeutig. Für die Funktionen

$$-\frac{\partial U_j(x^\mu, u^l)}{\partial x^\nu} \lambda^\nu_{(j)}(x^\mu, u^l) + H_j(x^\mu, u^l)$$

bzw. $\lambda^\nu_{(j)}(x^\mu, u^l)$ schreiben wir nach erfolgter Substitution (VI, 11) $C_j(x^\mu, U_l)$ bzw. $\Lambda^\nu_{(j)}(x^\mu, U_l)$.

Wir betrachten jetzt das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial U_j}{\partial x^\nu} \Lambda^\nu_{(j)}(x^\mu, U_l) + C_j(x^\mu, U_l) = 0. \tag{VI, 12}$$

Jeder Lösung

$$u^k = u^k(x^\mu), \; u^k(x^\mu) \in C^1,$$

des Systems (VI, 9) entspricht eindeutig eine Lösung

$$U_j = U_j(x^\mu, u^l(x^\mu)), \; U_j(x^\mu, u^l(x^\mu)) \in C^1,$$

des Systems (VI, 12) infolge der Identität (VI, 10) und der eindeutigen Substitution (VI, 11). Nun sei umgekehrt

$$U_j = U_j^*(x^\mu), \; U_j^*(x^\mu) \in C^1,$$

mit

$$U_j^*(0, x^\varrho) = U_{j0}(x^\varrho) \text{ für } x^0 = 0, \; |x^\varrho| \leq S_x$$

eine Lösung des Systems (VI, 12). Dann erhalten wir nach (VI, 11) aus den Gleichungen

$$U_j^*(x^\mu) = U_j(x^\mu, u^l)$$

in einer Umgebung der Anfangswerte in eindeutiger Weise Funktionen

$$u^k = u^{*k}(x^\mu),\ u^{*k}(x^\mu) \in C^1,$$

die infolge der Identität (VI, 10) eine Lösung des Systems (VI, 9) darstellen.

Gehen wir von den Gln. (VI, 12) zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} A^\nu_{(j)} P_{j\nu} + C_j &= 0, \\ dU_j - P_{j\nu}\, dx^\nu &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(VI, 13)}$$

über, so stellen die Gln. (VI, 13) ein diagonales System der Form (VI, 1) dar.

Die Vermutung ist naheliegend, daß in Verallgemeinerung der hier benützten Integrationsmethode in gewissen Fällen die Lösung eines speziellen Anfangswertproblems eines nicht zur hier betrachteten Klasse gehörigen linearen Differentialgleichungssystems

$$a^\nu_{ik} \frac{\partial u^k}{\partial x^\nu} + h_i = 0$$

dadurch erhalten werden kann, daß man längs der durch den Aufpunkt (ξ^μ) gehenden Kurven integriert, die durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$dx^0 : dx^1 \ldots . : dx^n = a^0_{ik} : a^1_{ik} \ldots . : a^n_{ik} \qquad \text{(VI, 14)}$$

gegeben sind.[1] Daß dies möglich ist, soll an folgendem einfachen Beispiel gezeigt werden:

Gesucht sind Lösungen $u^1(x^0, x^1, x^2)$, $u^2(x^0, x^1, x^2)$ des Systems

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^1}{\partial x^0} + 3\frac{\partial u^1}{\partial x^1} - \frac{\partial u^1}{\partial x^2} - \frac{\partial u^2}{\partial x^0} - \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - 4 &= 0, \\ \frac{\partial u^1}{\partial x^0} + \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^0} + 2\frac{\partial u^2}{\partial x^1} - \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + 1 &= 0, \end{aligned} \qquad \text{(VI, 15)}$$

die für $x^0 = 0$ die Werte

$$u^1_0(x^1, x^2) = x^1 + x^2,\ u^2_0(x^1, x^2) = 0$$

annehmen. Aus den Gln. (VI, 14) folgt

$$\begin{aligned} x^1_{(11)} &= 3(x^0 - \xi^0) + \xi^1, & x^2_{(11)} &= -x^0 + \xi^0 + \xi^2, \\ x^1_{(12)} &= x^0 - \xi^0 + \xi^1, & x^2_{(12)} &= -x^0 + \xi^0 + \xi^2, \\ x^1_{(21)} &= x^0 - \xi^0 + \xi^1, & x^2_{(21)} &= x^0 - \xi^0 + \xi^2, \\ x^1_{(22)} &= 2(x^0 - \xi^0) + \xi^1, & x^2_{(22)} &= -x^0 + \xi^0 + \xi^2. \end{aligned}$$

[1] Unter welchen Voraussetzungen sich nach diesem Prinzip durch Anwendung im kleinen (Differenzverfahren) Näherungslösungen des Systems finden lassen, scheint nicht untersucht zu sein.

Schreiben wir infolge (VI, 15)

$$du^1(x^0, 3(x^0 - \xi^0) + \xi^1, -x^0 + \xi^0 + \xi^2) - du^2(x^0, x^0 - \xi^0 + \xi^1, -x^0 + \xi^0 + \xi^2) = 4\,dx^0,$$

$$du^1(x^0, x^0 - \xi^0 + \xi^1, x^0 - \xi^0 + \xi^2) + du^2(x^0, 2(x^0 - \xi^0) + \xi^1, -x^0 + \xi^0 + \xi^2) = -dx^0$$

und integrieren wir jeden Summanden in diesem System formal von $x^0 = 0$ bis $x^0 = \xi^0$, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Anfangswerte für den Aufpunkt (ξ^0, ξ^1, ξ^2)

$$u^1(\xi^0, \xi^1, \xi^2) - u^2(x^0, \xi^1, \xi^2) = \quad 2\,\xi^0 + \xi^1 + \xi^2,$$

$$u^1(\xi^0, \xi^1, \xi^2) + u^2(\xi^0, \xi^1, \xi^2) = -3\,\xi^0 + \xi^1 + \xi^2.$$

Die sich hieraus ergebenden Funktionen

$$u^1(x^0, x^1, x^2) = -\frac{x^0}{2} + x^1 + x^2,\ u^2(x^0, x^1, x^2) = -\frac{5}{2}\,x^0$$

sind eine Lösung des Systems (VI, 15), die für $x^0 = 0$ die vorgegebenen Anfangswerte annimmt. Dies liegt an der speziellen Wahl der Anfangsdaten. Denn schreiben wir für das System (VI, 15) die Anfangswerte

$$u_0^1(x^1, x^2) = (x^1)^2,\ u_0^2(x^1, x^2) = 0$$

vor, so erhalten wir in gleicher Weise wie oben die Funktionen

$$u^{*1}(x^0, x^1, x^2) = \quad \frac{3\,x^0}{2} + \frac{1}{2}(-3x^0 + x^1)^2 + \frac{1}{2}(-x^0 + x^1)^2,$$

$$u^{*2}(x^0, x^1, x^2) = -\frac{5\,x^0}{2} - \frac{1}{2}(-3x^0 + x^1)^2 + \frac{1}{2}(-x^0 + x^1)^2.$$

Diese nehmen zwar für $x^0 = 0$ die vorgeschriebenen Anfangswerte an, sind jedoch keine Lösung des Systems (VI, 15).

LITERATUR

[1] M. Hamburger: Zur Theorie der Integration eines Systems von n linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen. Journ. f. Math. **81** (1876), 243–280.

[2] M. Hamburger: Zur Theorie der Integration eines Systems von n nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen. Journ. f. Math. **93** (1882), 188–214.

[3] M. Hamburger: Anwendung einer gewissen Determinantenrelation auf die Integration partieller Differentialgleichungen. Journ. f. Math. **100** (1887), 390–404.

[4] A. R. Forsyth: Theory of Differential Equations. Part IV, Vol. V, Cambridge 1906, 428 ff.

[5] Enzyklopädie d. Math. Wiss. Bd. II, 1, 382, 394.

[6] E. v. Weber: Grundzüge einer Integrationstheorie der Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen und beliebig vielen abhängigen Veränderlichen. Journ. f. Math. **118** (1897), 123–157.

[7] E. v. Weber: Theorie der Involutionssysteme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in beliebig vielen abhängigen und unabhängigen Variabeln. Math. Ann. **49** (1897), 543–572.

[8] E. v. Weber: C. R. Par. **123** (1896), 292.

[9] E. v. Weber: Résumé einer Integrationstheorie höherer partieller Differentialprobleme. Ber. Leipz. 1897, 329.

[10] Enzyklopädie d. Math. Wiss. Bd. II, 1, 395.

[11] E. Holmgren: Sur les systèmes linéares aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes à caractéristiques réelles et distinctes. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **5** (1909), 1–13.

[12] O. Perron: Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme im reellen Gebiet. Math. Z. **27** (1928), 549–564.

[13] R. Courant, P. Lax: On nonlinear partial differential equations with two independent variables. Comm. Pure and Appl. Math. **2** (1949), 255–273.

[14] É. Cartan: Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff. Ann. éc. norm. **16** (1899), 229–232.
Leçons sur les invariants intégraux. Paris 1922.

[15] É. Cartan: Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques. Paris 1945.

[16] E. Goursat: Leçons sur le problème de Pfaff. Paris 1922.

[17] E. Kähler: Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Leipzig, Berlin 1934.

[18] H. Reichardt: Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung. Berlin 1957.

[19] Zum Beisp. M. Thrall, L. Tornheim: Vector Spaces and Matrices. New York, 1957, S. 190.

[20] [12], S. 551, 552.

[21] Zum Beisp. [15], S. 69.

[22] C. G. J. Jacobi: Ges. Werke **4**, 7.