Abhandlungen
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
XXIX. Band, 3. Abhandlung

Die Biegungsflächen einer gegebenen Fläche

von

F. Lindemann

Vorgetragen am 5. Februar 1921

München 1921
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franzschen Verlags (J. Roth)

Auf Grund des Darboux'schen Satzes, daß die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, von der das Problem der Biegung abhängt, durch die Haupttangentenkurven der vorliegenden Fläche gegeben werden, hat man diese Kurven als Parameterkurven besonders bevorzugt, dadurch aber nur in besonderen Fällen (zumal bei der Verbiegung des Rotationsparaboloids) bemerkenswerte Resultate gewonnen. Näher liegt es, die Minimalkurven als Parameterkurven einzuführen, denn sie bleiben bekanntlich bei der Biegung invariant. Im folgenden werden deshalb zunächst diese Kurven allgemein eingeführt, was durch Gleichungen geschieht, die auch schon Bour aufgestellt, aber nicht benutzt hatte.

Die Untersuchung darüber, welchen Einfluß orthogonale Transformationen auf diese Gleichungen ausüben, führt dann zu einer Methode, um aus jeder Fläche unendlich viele Biegungsflächen abzuleiten und zwar durch bloße Quadraturen; dabei werden bei jedem Schritte zwei willkürliche Konstante eingeführt. Indem diese Konstanten selbst wieder als Funktionen der Variabeln aufgefaßt werden, gelingt es die Aufgabe auf eine Reihe von Quadraturen zurückzuführen, nachdem die Differentialgleichung der Minimalkurven der gegebenen Fläche als gelöst vorausgesetzt wird. Das gewonnene und in den Gleichungen (83) enthaltene Resultat ist nachträglich leicht zu bestätigen; man könnte also diese Gleichungen anschreiben zusammen mit den Gleichungen (76) und (79) und dann zeigen, daß alle Bedingungen erfüllt sind; d. h. man könnte alle Entwicklungen bis zum § 9 streichen, wenn es nur auf das Resultat und nicht auf den heuristischen Weg ankommt.

Zur Erläuterung werden überall bekannte Beispiele eingefügt. In den letzten Paragraphen werden besondere Probleme bezeichnet, die mit der Biegung zusammenhängen und historisch von Bedeutung sind.

§ 1. Die Minimalkurven als Parameterkurven.

Nach Analogie mit den Enneper'schen Formeln für Minimalflächen, machen wir, wenn α und β die Parameter der Minimalkurven einer beliebigen Fläche bedeuten, für die Koordinaten der Punkte dieser Fläche den folgenden Ansatz:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \int[\varphi_1 U d\alpha + \psi_1 V d\beta], \\ y &= \int[\varphi_2 U d\alpha + \psi_2 V d\beta], \\ z &= \int[\varphi_3 U d\alpha + \psi_3 V d\beta], \end{aligned}$$

wo mit U, V, φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3 Funktionen von α und β bezeichnet seien. Sollen die unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke vollständige Differentiale sein, so müssen die drei Bedingungen

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta}U+\varphi_i\frac{\partial U}{\partial\beta}=\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}V+\psi_i\frac{\partial V}{\partial\alpha}\qquad\text{für } i=1,2,3 \tag{2}$$

erfüllt sein. Dann bedeuten α, β in der Tat die Parameter der Minimalkurven, falls die Funktionen φ_i und ψ_i noch den Bedingungen

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2=0,\qquad \psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2=0 \tag{3}$$

genügen. Hieraus folgt weiter:

$$\Sigma\varphi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}=0,\quad \Sigma\varphi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta}=0,\quad \Sigma\psi_i\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}=0,\quad \Sigma\psi_i\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta}=0 \tag{4}$$

und mittels dieser Relationen erhält man aus (2):

$$\begin{aligned}
&V\Sigma\varphi_i\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\Sigma\varphi_i\psi_i=0,\\
&U\Sigma\psi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta}+\frac{\partial U}{\partial\beta}\Sigma\varphi_i\psi_i=0.\\
&U\Sigma\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta}=V\Sigma\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\Sigma\psi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha},\\
&V\Sigma\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta}=U\Sigma\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta}\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta}+\frac{\partial U}{\partial\beta}\Sigma\varphi_i\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta}.
\end{aligned}\tag{5}$$

Von diesen vier Gleichungen sind die beiden letzten Gleichungen (5) infolge der beiden ersten Gleichungen (5) von einander abhängig.

Setzt man nämlich den Wert von $\frac{\partial V}{\partial\alpha}$ aus der ersten in die dritte Gleichung ein, so ergibt sich:

$$U\cdot\Sigma\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta}\cdot\Sigma\varphi_i\psi_i=V\cdot\left[\Sigma\varphi_i\psi_i\cdot\Sigma\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}-\Sigma\psi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}\cdot\Sigma\varphi_i\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}\right], \tag{6}$$

und ebenso aus der zweiten und vierten Gleichung durch Elimination von $\frac{\partial U}{\partial\beta}$;

$$V\cdot\Sigma\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta}\cdot\Sigma\varphi_i\psi_i=U\left[\Sigma\varphi_i\psi_i\cdot\Sigma\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta}-\Sigma\varphi_i\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta}\cdot\Sigma\psi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta}\right]. \tag{7}$$

Diese beiden Gleichungen aber werden infolge der Bedingungen (3) mit einander identisch. Letztere Bedingungen können wir nämlich, da es wegen der zur Verfügung stehenden Funktionen U und V auf einen gemeinsamen Faktor der Funktionen φ_i und ψ_i nicht ankommt, in allgemeinster Weise durch den Ansatz befriedigen:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1=\cos\lambda, &&\varphi_2=\sin\lambda, &&\varphi_3=i,\\
&\psi_1=\cos\mu, &&\psi_2=\sin\mu, &&\psi_3=-i,
\end{aligned}\tag{8}$$

wenn λ und μ Funktionen von α, β bezeichnen. Dann wird:

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
&\Sigma\varphi_i\psi_i = \cos\lambda\cos\mu + \sin\lambda\sin\mu + 1 = \text{cosin}\,(\lambda-\mu) + 1,\\
&\Sigma\varphi_i\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha} = \sin(\lambda-\mu)\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}, \qquad \Sigma\varphi_i\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta} = \sin(\lambda-\mu)\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\beta},\\
&\Sigma\psi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha} = \sin(\mu-\lambda)\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}, \qquad \Sigma\psi_i\frac{\partial\varphi_i}{\delta\beta} = \sin(\mu-\lambda)\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}.\\
&\Sigma\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta} = \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}, \qquad \Sigma\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha} = \frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\frac{\partial\mu}{\partial\beta},\\
&\Sigma\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha} = \text{cosin}\,(\lambda-\mu)\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}, \qquad \Sigma\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta}\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta} = \text{cosin}\,(\lambda-\mu)\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}.
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Werte in (6) und (7) ein, so gehen beide Gleichungen (nach Streichung eines beiderseits auftretenden Faktors $1 + \text{cosin}\,(\lambda-\mu)$ über in die einfache Relation:

$$
(10)\qquad V\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = U\frac{\partial\lambda}{\partial\beta},
$$

und, wenn zur Abkürzung

$$
(11)\qquad \lambda-\mu = \omega
$$

gesetzt wird, so ergeben die beiden ersten Gleichungen (5):

$$
(12)\qquad \frac{\partial\lg V}{\partial\alpha} = -\frac{\sin\omega}{1+\text{cosin}\,\omega}\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial\lg U}{\partial\beta} = \frac{\sin\omega}{1+\text{cosin}\,\omega}\frac{\partial\lambda}{\partial\beta},
$$

also durch Vergleichung mit (10):

$$
\frac{\partial\lg V}{\partial\alpha}\cdot V = -\frac{\partial\lg U}{\partial\beta}\cdot U \quad\text{oder}\quad \frac{\partial V}{\partial\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial\beta}.
$$

Die in (1) auftretenden Funktionen U und V lassen sich folglich durch eine Funktion Ω mittels der Gleichungen

$$
(13)\qquad U = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}, \qquad V = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}
$$

ausdrücken. Wir setzen im folgenden

$$
(14)\qquad \Omega_1 = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}, \qquad \Omega_2 = \frac{\partial\Omega}{\partial\beta};
$$

dann erscheinen die Gleichungen (12) in der Form

$$
\frac{\partial\lg\Omega_2}{\partial\alpha} = -\text{tg}\,\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial\lg\Omega_1}{\partial\beta} = \text{tg}\,\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}
$$

$$
= \text{tg}\,\frac{\omega}{2}\cdot\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}+\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right).
$$

Es ist folglich:

$$(15)\qquad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = -\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial \lg \Omega_2}{\partial \alpha},\qquad \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = -\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial \lg \Omega_1}{\partial \beta},\ \text{und ebenso:}$$

$$(15a)\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial \lg \Omega_2}{\partial \alpha},\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = +\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial \lg \Omega_1}{\partial \beta}$$

also, wenn man die erste Gleichung (15) nach β, die zweite nach α differentiert:

$$(16)\qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\,\frac{\partial \lg \Omega_1}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\,\frac{\partial \lg \Omega_2}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\,\partial \beta}.$$

Durch diese Differentialgleichung, in welcher Ω_1 und Ω_2 durch (13) und (14), ω durch (11) gegeben werden, sind die Funktionen ω und Ω an einander gebunden. Ist ω bekannt, so ist dies für Ω eine partielle Gleichung dritter Ordnung; ist umgekehrt Ω gegeben, so bestimmt sich ω durch eine partielle Gleichung zweiter Ordnung. Sind Ω und ω bekannt, so wird μ aus (15) und sodann λ aus (11) gefunden. Es ist λ zu μ konjugiert imaginär, ω rein imaginär und Ω ebenfalls rein imaginär. Die Formeln für die Darstellung einer beliebigen Fläche durch ihre Minimalkurven werden, wenn man noch Ω durch $-iW$ und in (1) z durch $-z$ ersetzt:

$$(17)\qquad \begin{gathered} x = i\int\left[\frac{\partial W}{\partial \alpha}\operatorname{cosin}\lambda\, d\alpha - \frac{\partial W}{\partial \beta}\operatorname{cosin}\mu\, d\beta\right],\quad y = i\int\left[\frac{\partial W}{\partial \alpha}\sin\lambda\, d\alpha - \frac{\partial W}{\partial \beta}\sin\mu\, d\beta\right], \\ z = \int\left[\frac{\partial W}{\partial \alpha}\, d\alpha + \frac{\partial W}{\partial \beta}\,\partial\beta\right] = W + \text{Const.} \end{gathered}$$

Die Funktion W genügt derselben Differentialgleichung (16), wie die Funktion Ω; dieselbe wird:

$$(18)\qquad \begin{gathered} \sin\omega\left[\frac{\partial W}{\partial \alpha}\frac{\partial W}{\partial \beta}\left(\frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^2\partial \beta}\frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha\partial \beta^2}\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\partial \beta}\left\{\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)^2\right\}\right] \\ -\frac{\partial W}{\partial \alpha}\frac{\partial W}{\partial \beta}\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\partial \beta}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta}\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right) = 2\sin^2\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\partial \beta}\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)^2\left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)^2. \end{gathered}$$

Man überzeugt sich leicht, daß infolge der aufgestellten Gleichungen der Ausdruck $\operatorname{cosin}\lambda\cdot W_\alpha\cdot d\alpha = \operatorname{cosin}\mu\cdot W_\beta\cdot d\beta$ in der Tat ein vollständiges Differential ist. Soll allgemein

$$P W_\alpha\, d\alpha + Q W_\beta\, d\beta$$

ein solches Differential sein, so ergibt sich

$$(18a)\qquad (P - Q)\, W_{\alpha\beta} = Q_\alpha W_\beta - P_\beta W_\alpha\,.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{cosin}\lambda, & Q &= -\operatorname{cosin}\mu, \\ \lambda_\beta W_\alpha &= \varphi\cdot W_{\alpha\beta}, & \mu_\alpha W_\beta &= \psi\cdot W_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

so ergibt sich, falls $W_{\alpha\beta}$ nicht gleich Null ist:

$$\cos\lambda + \cos\mu = \varphi \sin\lambda + \psi \sin\mu\,, \tag{18b}$$

und wenn $\varphi = -\psi = \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$ gemäß (11) gesetzt wird, so ist diese Bedingung identisch erfüllt, indem beide Seiten gleich $2\cos\frac{1}{2}(\lambda-\mu)\cdot\sin\frac{1}{2}(\lambda+\mu)$ werden.

Nachträglich bemerkte ich, daß schon Bour[1]) die Gleichungen (17) aufgestellt und für W die unten folgende Gleichung (36) abgeleitet hat. Er macht aber von diesen Gleichungen keinen weiteren Gebrauch, er sagt nur, daß er auf die Integration der Gleichung (36) später zurückkommen werde, was aber nicht geschehen zu sein scheint.

Auch Bonnet führt die Minimalkurven einer Fläche als Parameterkurven ein und kommt zu folgenden Formeln[2]):

$$\begin{aligned}
dx &= i\,(m^2 + n^2)\,d\alpha + i\,(m'^2 + n'^2)\,d\beta\,,\\
dy &= (m^2 - n^2)\,d\alpha + (m'^2 - n'^2)\,d\beta\,,\\
dz &= 2\,m\,n\,d\alpha + 2\,m'\,n'\,d\beta\,,
\end{aligned}$$

deren Integrabilitätsbedingungen zu der Gleichung[3])

$$\varphi\,(rt - s^2) - 2\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}qr - 2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}pt + 4pq\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0\,, \tag{18c}$$

führen, wo $i\varphi = mn' - nm'$ und wo p, q, r, s, t die Differentialquotienten einer Funktion ζ bedeuten, aus der m und m' durch die Gleichungen

$$m^2 = p = \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\,, \qquad m'^2 = q = \frac{\partial\zeta}{\partial\beta}$$

bestimmt werden; es ist ferner $\varphi^2 = F$, wenn F die Gaußsche Fundamentalgröße bezeichnet. Bonnet verwendet seine Gleichungen nur für einige besondere Fälle.

§ 2. Die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie.

Die sechs Fundamentalgrößen der Flächentheorie bezeichnen wir in üblicher Weise mit E, F, G, D, D', D''. Es ist dann für die Variablen α, β

$$E = 0,\quad G = 0,\quad F = \Big[1 + \cos(\lambda-\mu)\Big]\frac{\partial W}{\partial\alpha}\frac{\partial W}{\partial\beta} = 2\cdot\cos^2\frac{\omega}{2}\cdot W_\alpha W_\beta\,. \tag{19}$$

---

[1]) Journal de l'Ecole polytechnique, tome 22, 1862, p. 13 ff.
[2]) Vgl. Journal de l'Ecole polytechnique, tome 25, 1867.
[3]) Vgl. auch Darboux, Leçons sur la Théorie générale des surfaces, tom. 3, p. 261, wo diese Gleichung als besonderer Fall einer allgemeineren erhalten wird.

Ferner:

$$D = \Sigma \pm x_{\alpha\alpha} y_\alpha z_\beta = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial W}{\partial \beta} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \left[1 + \cosin(\lambda - \mu)\right] = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \cdot F,$$

$$D'' = \Sigma \pm x_{\beta\beta} y_\alpha z_\beta = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)^2 \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \left[1 + \cosin(\lambda - \mu)\right], = -\frac{\partial W}{\partial \beta} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \cdot F,$$

(20)

$$D' = \Sigma \pm x_{\alpha\beta} y_\alpha z_\beta = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial W}{\partial \beta} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \left[1 + \cosin(\lambda - \mu)\right] = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \cdot F,$$

$$= -\frac{\partial W}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)^2 \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[1 + \cosin(\lambda - \mu)\right] = -\frac{\partial W}{\partial \beta} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \cdot F,$$

und hieraus in Übereinstimmung mit Gleichung (10) und (13), wo Ω durch $-iW$ zu ersetzen ist:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = -\frac{\partial W}{\partial \beta} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha}. \tag{21}$$

Aus (20) ergibt sich:

$$DD'' - D'^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)^3 \left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)^3 \left[1 + \cosin(\lambda - \mu)\right]^2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} - \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right),$$

und hier ist auf der rechten Seite nach (11) und (15):

$$\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} - \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \omega_\alpha \omega_\beta - \cotg \frac{\omega}{2} \cdot \left(\frac{\omega_\alpha}{W_\alpha} + \frac{\omega_\beta}{W_\beta}\right).$$

Andererseits ist nach der berühmten Gauß'schen Formel:

$$DD'' - D'^2 = F \cdot (F_\alpha \cdot F_\beta - F \cdot F_{\alpha\beta}) = -W_\alpha W_\beta \cdot F^2 \cdot (\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha).$$

Setzt man hierin den Wert von F_α, F_β und $F_{\alpha\beta}$ aus (19) ein und vergleicht die beiden Ausdrücke für $DD'' - D'^2$, so ergibt sich wieder die Differentialgleichung (16) bzw. (18) zwischen W und ω.

Die sogenannten Codazzi'schen Gleichungen ergeben hier:

$$F\left(\frac{\partial D'}{\partial \alpha} - \frac{\partial D}{\partial \beta}\right) + D \frac{\partial F}{\partial \beta} - 2D' \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

(22)

$$F\left(\frac{\partial D'}{\partial \beta} - \frac{\partial D''}{\partial \alpha}\right) + D'' \frac{\partial F}{\partial \alpha} - 2D' \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0.$$

Setzt man in die erste obige Werte (20) ein, so wird:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right) F - \frac{\partial W}{\partial \alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \tag{23}$$

oder wenn man statt λ mittels (11) und (15a) die Funktion ω einführt:

$$(24) \qquad \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\left[F\frac{\partial}{\partial \alpha}(W_\alpha W_\beta) - F_\alpha W_\alpha W_\beta\right] = F\cdot\omega_\alpha\cdot W_\alpha W_\beta\,,$$

und die Gleichung wird zur Identität, wenn man ω mit Hilfe des in (19) gegebenen Wertes von F eliminiert. Entsprechendes gilt für die zweite Gleichung (22).

Die Differentialgleichung der Haupttangentenkurven ist:

$$D\,d\alpha^2 + 2\,D'\,d\alpha\,d\beta + D''\,d\beta^2 = 0$$

oder:

$$(25) \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha}\,d\lambda\,d\alpha - \frac{\partial W}{\partial \beta}\,d\mu\,d\beta = 0$$

und die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$D''\,d\beta^2 - D\,d\alpha^2 = 0$$

oder:

$$(26) \qquad \frac{\partial W}{\partial \beta}\,\frac{\partial \mu}{\partial \beta}\,d\beta^2 + \frac{\partial W}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\,d\alpha^2 = 0\,.$$

Für die mittlere Krümmung und das Krümmungsmaß findet man:

$$(27) \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2\,D'}{F^2} = -2\,\frac{W_\alpha \lambda_\beta}{F} = 2\,\frac{W_\beta\,\mu_\alpha}{F} = \frac{2\,W_{\alpha\beta}}{\sin\omega\cdot W_\alpha W_\beta}\,.$$

$$(28) \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{DD'' - D'^2}{F^4} = -\frac{W_\alpha W_\beta\,(\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha)}{F^2} = \frac{\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha}{F\cos^2\dfrac{\omega}{2}}\,.$$

Die Differentialgleichung der geodätischen Linie wird:

$$(29) \qquad F\,\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} + F'_\beta\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 - F'_\alpha\,\frac{d\beta}{d\alpha} = 0\,,$$

worin F, F'_α, F'_β aus (19) einzusetzen sind.

Das sphärische Bild der Fläche ist gegeben durch die Gleichungen:

$$\Delta\cdot X = A, \qquad \Delta\cdot Y = B, \qquad \Delta\cdot Z = C,$$

wo:

$$A = y_\alpha z_\beta - y_\beta z_\alpha = \quad i\,W_\alpha W_\beta\,(\sin\lambda + \sin\mu) \quad = \quad 2\,i\,W_\alpha W_\beta\,\sin\frac{\lambda+\mu}{2}\,\cos\frac{\lambda-\mu}{2}$$

$$B = z_\alpha x_\beta - z_\beta x_\alpha = -\,i\,W_\alpha W_\beta\,(\cos\lambda + \cos\mu) = -\,2\,i\,W_\alpha W_\beta\,\cos\frac{\lambda+\mu}{2}\cdot\cos\frac{\lambda-\mu}{2}$$

$$C = x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha = -\,W_\alpha W_\beta\,\sin(\lambda-\mu) \quad = -\,2\,W_\alpha W_\beta\,\sin\frac{\lambda-\mu}{2}\cdot\cos\frac{\lambda-\mu}{2}$$

$$\Delta^2 = A^2 + B^2 + C^2 = -F^2 = -W_\alpha^2 W_\beta^2\,(1+\cos\omega)^2 = -4\,W_\alpha^2 W_\beta^2\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^4,$$

also:

$$X = \frac{\sin\dfrac{\lambda+\mu}{2}}{\cos\dfrac{\lambda-\mu}{2}}, \qquad Y = -\frac{\cos\dfrac{\lambda+\mu}{2}}{\cos\dfrac{\lambda-\mu}{2}}, \qquad Z = i\,\frac{\sin\dfrac{\lambda-\mu}{2}}{\cos\dfrac{\lambda-\mu}{2}} = i\operatorname{tg}\frac{\lambda-\mu}{2}\,.$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den unten in den Gleichungen (50) aufgestellten für die Darstellung der Kugel durch ihre Minimalgeraden läßt erkennen, daß die Gleichungen $\lambda = \text{Const.}$ und $\mu = \text{Const.}$ auf der gegebenen Fläche diejenigen Kurven darstellen, welche bei der sphärischen Abbildung in die Minimalgeraden der Bildkugel übergehen.

§ 3. **Die Biegung einer Fläche.**

Bei Biegung einer Fläche bleiben die Minimalkurven derselben bekanntlich invariant. Es wird sich deshalb empfehlen, das Problem der Biegung mit Hilfe der Darstellung der Flächen durch ihre Minimalkurven, d. h. auf Grund der Formeln (17) in Angriff zu nehmen. Sind dann $E = 0$, $G = 0$, $F = F(\alpha, \beta)$ die drei Gauß'schen Fundamentalgrößen erster Ordnung einer gegebenen Fläche, so handelt es sich darum, die Coordinaten x, y, z einer ihrer Biegungsflächen vermöge der Gleichungen (17) so als Funktionen von α, β darzustellen, daß die Relation (19), d. h.

$$2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha} \frac{\partial W}{\partial \beta} = F(\alpha, \beta) \tag{30}$$

erfüllt wird und daß zwischen den Funktionen W und ω zugleich die Gleichung (18) besteht.

Eliminieren wir aus beiden Gleichungen ω, so ergibt sich eine Gleichung zwischen W und F in folgender Weise. Aus (19) erhalten wir durch logarithmisches Differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} + \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\beta} - \frac{\partial \lg F}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha} + \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} - \frac{\partial \lg F}{\partial \beta}, \end{aligned} \tag{31}$$

Gleichungen, die sich auf die Gleichungen (22) zurückführen lassen; also durch Addition bzw. Multiplikation:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cdot (W_\beta \omega_\alpha + W_\alpha \omega_\beta) W_\alpha W_\beta &= W_{\alpha\alpha} W_\beta^2 + 2 W_{\alpha\beta} W_\alpha W_\beta + W_{\beta\beta} W_\alpha^2 - \\ &\quad - W_\alpha W_\beta^2 \frac{\partial \lg F}{\partial \alpha} - W_\beta W_\alpha^2 \frac{\partial \lg F}{\partial \beta}, \\ \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \cdot W_\alpha^2 W_\beta^2 \omega_\alpha \omega_\beta &= \left(W_{\alpha\alpha} W_\beta + W_{\alpha\beta} W_\alpha - W_\alpha W_\beta \frac{F_\alpha}{F} \right) \\ &\quad \cdot \left(W_{\alpha\beta} W_\beta + W_{\beta\beta} W_\alpha - W_\alpha W_\beta \frac{F_\beta}{F} \right). \end{aligned} \tag{32}$$

Es wird somit:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \left[W_\alpha W_\beta \omega_\alpha \omega_\beta \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - W_{\alpha\beta} (\omega_\alpha W_\beta + \omega_\beta W_\alpha) \right] \\ = W_{\alpha\alpha} W_{\beta\beta} - W_{\alpha\beta}^2 + W_\alpha W_\beta \frac{F_\alpha F_\beta}{F^2} - W_{\alpha\alpha} W_\beta \frac{F_\beta}{F} - W_{\beta\beta} W_\alpha \frac{F_\alpha}{F}. \end{aligned} \tag{33}$$

Durch nochmaliges Differenzieren der Gleichungen (31) findet man ferner:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} W_\alpha^2 W_\beta^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = - W_\alpha^2 W_\beta^2 \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha\, \partial \beta} - \frac{1}{2} \frac{\omega_\alpha \omega_\beta}{\operatorname{cosin}^2 \frac{\omega}{2}} W_\alpha^2 W_\beta^2$$
$$+ W_\alpha W_\beta (W_{\alpha\alpha\beta} W_\beta + W_{\beta\beta\alpha} W_\alpha) - W_{\alpha\beta}(W_\alpha^2 W_{\beta\beta} + W_\beta^2 W_{\alpha\alpha}).$$

Infolge dieser Relation nimmt die Gleichung (18) folgende Form an:

$$(34) \qquad - W_{\alpha\beta}(\omega_\alpha W_\beta + \omega_\beta W_\alpha) = - \sin \omega \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha\, \partial \beta} W_\alpha W_\beta - \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \cdot \omega_\alpha \omega_\beta W_\alpha W_\beta .$$

Multiplizieren wir beiderseits mit $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ und beachten, daß nach (19)

$$(35) \qquad \sin \omega \cdot \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = 1 - \operatorname{cosin} \omega = 2 - \frac{F}{W_\alpha W_\beta}$$

zu setzen ist, so ergibt sich unter Anwendung von (33):

$$(36) \qquad \begin{aligned} & W_{\alpha\alpha} W_{\beta\beta} - W_{\alpha\beta}^2 + W_\alpha W_\beta \frac{F_\alpha F_\beta}{F^2} - W_{\alpha\alpha} W_\beta \frac{F_\beta}{F} - W_{\beta\beta} W_\alpha \frac{F_\alpha}{F} \\ & = F \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha\, \partial \beta} - 2 W_\alpha W_\beta \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha\, \partial \beta} . \end{aligned}$$

Wie zu erwarten war, ist diese Gleichung für W identisch mit jener Differentialgleichung zweiter Ordnung, der die drei rechtwinkligen Koordinaten eines Flächenpunktes genügen müssen, wenn sie aus den Fundamentalgrößen E, F, G bestimmt werden sollen, wobei hier $E = 0$ und $G = 0$ zu nehmen ist. Man kann den Inhalt der unsere Fläche darstellenden Gleichungen (17) somit dahin aussprechen, daß sie lehren, aus einer bekannten Lösung der Gleichung (36), zwei weitere Lösungen durch Quadratur abzuleiten, so daß alle drei eine Fläche mit den Fundamentalgrößen $E = 0$, $G = 0$, $F =$ geg. Funktion darstellen.

Daß zwei derartige weitere Lösungen durch Quadraturen zu finden sind, war auch sonst bekannt.[1])

Wie wir die Gleichung (36) durch Elimination von ω aus (18) und (19) bzw. (30) fanden, so kann man durch eine Elimination von W eine Differentialgleichung zwischen ω und F aufstellen. Man hätte zu dem Zwecke die Größen $W_{\alpha\beta}$, $W_{\alpha\alpha}$, $W_{\beta\beta}$ aus den Gleichungen (28) und (31) zu berechnen und in (36) einzusetzen. Es scheint sich aber kein übersichtliches Resultat zu ergeben.

§ 4. **Simultane Differentialgleichungen für die Koordinaten** x, y, z.

Sind E, F, G gegeben, so genügen die Koordinaten x, y, z eines Punktes der Fläche bekanntlich einer Differentialgleichung 2. Ordnung, die man auf folgende Weise findet. Nach Gauß bestehen für die zweiten Differentialquotienten die Gleichungen:

[1]) Vgl. z. B. Bianchi, Differentialgeometrie, 2. Aufl. S. 203.

$$(EG-F^2)\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = A\cdot D + (Gx_u - Fx_v)\,\tfrac{1}{2}\,E_u + (Ex_v - Fx_u)\,(F_u - \tfrac{1}{2}\,E_v),$$

$$\text{(36a)}\qquad (EG-F^2)\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = AD'' + (Gx_u - Fx_v)\,(F_v - \tfrac{1}{2}\,G_u) + (Ex_v - Fx_u)\,\tfrac{1}{2}\,G_u,$$

$$(EG-F^2)\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = AD' + (Gx_u - Fx_v)\,\tfrac{1}{2}\,E_v + (Ex_v - Fx_u)\,\tfrac{1}{2}\cdot G_u,$$

wo A, B, C und $\varDelta$ dieselbe Bedeutung haben sollen, wie am Schluß von § 2.

Bildet man hieraus den Ausdruck $DD'' - D'^2$, so wird (wenn $\varDelta = EG - F^2$):

$$\begin{aligned}(DD''-D'^2)\cdot A^2 = {} & \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\cdot\varDelta - \tfrac{1}{2}\,E_u\,(Gx_u - Fx_v) - (F_u - \tfrac{1}{2}\,E_v)\,(Ex_v - Fx_u)\right] \\ & \cdot\left[\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\varDelta - \tfrac{1}{2}\,G_v\,(Ex_v - Fx_u) - (F_v - \tfrac{1}{2}\,G_u)\,(Gx_u - Fx_v)\right] \\ & - \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,\varDelta - \tfrac{1}{2}\,E_v\,(Gx_u - Fx_v) - \tfrac{1}{2}\,G_u\,(Ex_v - Fx_u)\right]^2\end{aligned}$$

und auf der linken Seite ist:

$$A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}^2 = \varDelta - Gx_u^2 - Ex_v^2 + 2\,Fx_u x_v.$$

Da nun nach der Gaußschen Formel $D\cdot D'' - D'^2$ auf E, F, G zurückgeführt werden kann, so ist damit die gesuchte Differentialgleichung gewonnen. Sie wird auch von y und z befriedigt.

Ersetzt man in (36a) x durch y, so ist auf den rechten Seiten A durch B zu ersetzen.

Die drei Gleichungen (36a) entstehen aus den Identitäten

$$\begin{aligned} &S\,x_u\,x_{uu} = \tfrac{1}{2}\,E_u, && S\,x_u\,x_{uv} = \tfrac{1}{2}\,E_v, && S\,x_u\,x_{vv} = F_v - \tfrac{1}{2}\,G_u, \\ &S\,x_v\,x_{uu} = F_u - \tfrac{1}{2}\,E_v, && S\,x_v\,x_{uv} = \tfrac{1}{2}\,G_u, && S\,x_v\,x_{vv} = \tfrac{1}{2}\,G_v, \\ &S\,A\,x_{uu} = D, && S\,A\,x_{uv} = D', && S\,A\,x_{vv} = D'', \end{aligned}$$

und erscheinen daher zunächst in der Form:

$$\text{(36c)}\qquad \varDelta\,x_{uu} = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{2}\,E_u & y_u & z_u \\ F_u - \tfrac{1}{2}\,E_v & y_v & z_v \\ D & B & C \end{vmatrix} = AD - \varDelta_{x1},$$

$$\varDelta\,x_{vv} = AD'' - \varDelta_{x3}, \qquad \varDelta\,x_{uv} = AD' - \varDelta_{x2},$$

wo:

$$\text{(36d)}\qquad \varDelta_{x1} = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{2}\,E_u & E & F \\ F_u - \tfrac{1}{2}\,E_v & F & G \\ 0 & x_u & x_v \end{vmatrix}, \qquad \varDelta_{x3} = \begin{vmatrix} F_v - \tfrac{1}{2}\,G_u & E & F \\ \tfrac{1}{2}\,G_v & F & G \\ 0 & x_u & x_v \end{vmatrix},$$

$$\varDelta_{x2} = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{2}\,E_v & E & F \\ \tfrac{1}{2}\,G_u & F & G \\ 0 & x_u & x_v \end{vmatrix}.$$

Ebenso ist:

$$\Delta y_{uu} = BD - \Delta_{y1}, \qquad \Delta y_{uv} = BD' - \Delta_{y2}, \tag{36e}$$
$$\Delta y_{vv} = BD'' - \Delta_{y3}.$$

Aus den beiden Gleichungssystemen (36 c) und (36 d) erhalten wir:

$$\begin{aligned}(\Delta x_{uu} + \Delta_{x1})(\Delta y_{vv} + \Delta_{y3}) + (\Delta x_{vv} + \Delta_{x3})(\Delta y_{uu} + \Delta_{y1})\\ - 2(\Delta x_{uv} + \Delta_{x2})(\Delta y_{uv} + \Delta_{yv}) = 2AB(DD'' - D'^2),\end{aligned} \tag{36f}$$

und hier ist

$$AB = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y_u & y_v \\ x_u & E & F \\ x_v & F & G \end{vmatrix}$$
$$= (y_u x_v + y_v x_u) F - y_u x_u G - y_v x_v E,$$

während wir für x allein hatten[1]):

$$\begin{aligned}(\Delta x_{uu} + \Delta_{x1})(\Delta x_{vv} + \Delta_{x3}) - (\Delta x_{uv} - \Delta_{x2})^2\\ = (DD'' - D'^2)(\Delta - G x_u^2 - E x_u^2 + 2 F x_u x_v).\end{aligned} \tag{36g}$$

Wir schreiben die Gleichungen (36 g) und (36 f) in der Form:

$$\{x, x\} = \Delta(DD'' - D'^2), \qquad \{x, y\} = 0.$$

Da auch y der Gleichung

$$\{y, y\} = \Delta(DD'' - D'^2)$$

genügt, so ist offenbar:

$$\begin{aligned}\{ax + by,\ ax + by\} &= a^2\{x, x\} + ab\{x, y\} + b^2\{y, y\},\\ &= (a^2 + b^2)\cdot(DD'' - D'^2)\Delta.\end{aligned}$$

Die Koordinaten x, y, z genügen also als Funktionen beliebiger Parameter u, v den Gleichungen:

$$\begin{aligned}\{x, x\} = \{y, y\} = \{z, z\} = (DD'' - D'^2)\cdot\Delta\\ \{x, y\} = 0, \quad \{y, z\} = 0, \quad \{z, x\} = 0\end{aligned} \tag{36h}$$

und hierin ist:

$$\begin{aligned}\{x, x\} &= (\Delta x_{uu} + \Delta_{x1})(\Delta x_{vv} + \Delta_{x3}) - (\Delta x_{uv} - \Delta_{x2})^2\\ &\quad + (DD'' - D'^2)(E x_v^2 + G x_u^2 - 2 F x_u x_v)\\ \{x, y\} &= (\Delta x_{uu} + \Delta_{x1})(\Delta y_{vv} + \Delta_{y3}) + (\Delta y_{uu} + \Delta_{y1})(\Delta x_{vv} + \Delta_{x3})\\ &\quad - 2(\Delta x_{uv} + \Delta_{x2})(\Delta y_{uv} + \Delta_{y2})\\ &\quad + (DD'' - D'^2)[x_u y_u G + x_v y_v E - F(x_u y_v + x_v y_u)],\end{aligned} \tag{36i}$$

worin der Ausdruck $DD'' - D'^2$ nach der bekannten Gauß'schen Formel einzusetzen ist.

---

[1]) Darboux erwähnt (Leçons, t. 3, p. 253), daß er diese Gleichung in seinen 1872 erschienenen Mémoires sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques aufgestellt habe. Die elementare Ableitung des Textes ist nach Enneper's Vorlesung aus dem Winter 1871/2 gegeben; Enneper schrieb die Gleichung Bour zu, doch scheint sich das nur auf den besondern Fall $E = 0$, $G = 0$ zu beziehen.

Die lineare Kombination $ax+by+cz$ genügt infolge dessen der Gleichung:

(36 k) $$\{ax+by+cz,\ ax+by+cz\} = (a^2+b^2+c^2)(DD''-D'^2)\,\Delta.$$

Denken wir uns die Parameter α, β der Minimalkurven eingeführt, so wird:

$$\begin{aligned}\{x,x\} &= F^2\,[(Fx_{uu}-F_u x_u)(Fx_{vv}-F_v x_v) - F^2 x_{uv}^2 + 2(FF_{uv}-F_uF_v)x_u x_v] \\ &= F^2\,[F^2(x_{uu}x_{vv}-x_{uv}^2) - FF_u x_{vv}x_u - FF_v x_{uu}x_v + F_uF_v x_u x_v - 2FF_{uv}x_u x_v] \\ \{x,y\} &= F^2\,[F^2(x_{uu}y_{vv}+x_{vv}y_u - 2x_{uv}y_{uv}) - FF_u(x_{vv}y_u+y_{vv}x_u) \\ &\quad - FF_v(x_{uu}y_v+x_{vv}y_u) + (x_u y_v + x_v y_u)(2F_{uv}F+F_uF_v)],\end{aligned}$$

wo nun u und v durch α und β zu ersetzen sind. Die erste Gleichung (36 h) wird dann:

$$\begin{aligned}F\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2\right) - F\frac{\partial F}{\partial\beta}\frac{\partial x^2}{\partial\alpha^2}\frac{\partial x}{\partial\beta} - F\frac{\partial F}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}\frac{\partial x}{\partial\alpha} \\ + \frac{\partial F}{\partial\alpha}\frac{\partial F}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + 2F\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} \\ = F^2\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta} - F\frac{\partial F}{\partial\alpha}\frac{\partial F}{\partial\beta},\end{aligned}$$

und damit identisch mit der Gleichung (18) für W. Ist also W eine Lösung der Gleichung (18), so genügen die beiden durch (17) definierten Funktionen x und y den Gleichungen:

(37) $$\{x,x\} = \{y,y\} = F^3(FF_{\alpha\beta}-F_\alpha F_\beta),\ \{x,y\} = 0.$$

Ebenso sind die Gleichungen erfüllt:

(37 a) $$\{x,z\} = F^3(FF_{\alpha\beta}-F_\alpha F_\beta),\quad \{y,z\} = 0;\quad \{x,y\} = 0.$$

§ 5. Die Rotationsflächen.

Insbesondere sei eine Rotationsfläche durch die Gleichungen

(38) $$x = r\cdot\text{cosin}\,\varphi,\quad y = r\cdot\sin\varphi,\quad z = f(r)$$

gegeben; dann wird

(38 a) $$ds^2 = (1+f'(r)^2)\,dr^2 + r^2 d\varphi^2 = 4r^2\,d\alpha\,d\beta,$$

wenn α, β die Parameter der Minimalkurven bedeuten:

$$\begin{aligned}2\,d\alpha &= d\varphi + i\sqrt{1+f'^2}\,\frac{dr}{r}, \\ 2\,d\beta &= d\varphi - i\sqrt{1+f'^2}\,\frac{dr}{r}, \\ d\varphi = d\alpha + d\beta,&\quad d\alpha - d\beta = i\sqrt{1+f'^2}\,\frac{dr}{r}.\end{aligned}$$

Es hängt also r allein von $\alpha-\beta$ ab, und φ kann gleich $\alpha+\beta$ gesetzt werden, so daß:

(38b) $$x=\operatorname{cosin}(\alpha+\beta)\cdot F_1(\alpha-\beta),\quad y=\sin(\alpha+\beta)\cdot F_1(\alpha-\beta),\quad z=\Phi(\alpha-\beta),$$

und, wenn wir die vollständigen Differentiale einführen:

(39) $$\begin{aligned} x &= \int[\{\operatorname{cosin}(\alpha+\beta)F_1'(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)F_1(\alpha-\beta)\}\,d\alpha \\ &\quad -\{\operatorname{cosin}(\alpha+\beta)F_1'(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)F_1(\alpha-\beta)\}\,d\beta], \\ y &= \int[\{\sin(\alpha+\beta)F_1'(\alpha-\beta)+\operatorname{cosin}(\alpha+\beta)F_1(\alpha-\beta)\}\,d\alpha \\ &\quad -\{\sin(\alpha+\beta)F_1'(\alpha-\beta)-\operatorname{cosin}(\alpha+\beta)F_1(\alpha-\beta)\}\,d\beta], \\ z &= \int[\Phi'(\alpha-\beta)\,d\alpha-\Phi'(\alpha-\beta)\,d\beta]=\Phi(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

Dabei ist:

(39a) $$F_1^2+F_1'^2+\Phi'^2=0.\text{[1]}$$

Diese Gleichungen sind auf die Form (17) zu bringen. Hier ist $W=\Phi(\alpha-\beta)$ gegeben; es ist also:

(39b) $$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial\alpha}=-\frac{\partial W}{\partial\beta},\quad \frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}=\frac{\partial^2 W}{\partial\beta^2}=-\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial\beta},\quad \frac{\partial^3 W}{\partial\alpha^2\partial\beta}=-\frac{\partial^3 W}{\partial\alpha\,\partial\beta^2} \\ =\Phi'(\alpha-\beta)\qquad\qquad =\Phi''(\alpha-\beta)\qquad\qquad =-\Phi'''(\alpha-\beta), \end{aligned}$$

und die Gleichung (18) wird:

(40) $$\begin{aligned} -2\sin\omega\cdot[\Phi'''(\alpha-\beta)\cdot\Phi'(\alpha-\beta)-\Phi''(\alpha-\beta)^2]-\Phi''(\alpha-\beta)\,\Phi'(\alpha-\beta)\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right) \\ =2\sin^2\frac{\omega}{2}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,\Phi'(\alpha-\beta)^2. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Funktionen λ und μ dienen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} U\operatorname{cosin}\lambda &= \operatorname{cosin}u\cdot F_1'(v)-\sin u\cdot F_1(v), & V\operatorname{cosin}\mu &= \operatorname{cosin}u\cdot F_1'(v)+\sin u\,F_1(v), \\ U\sin\lambda &= \sin u\cdot F_1'(v)+\operatorname{cosin}u\cdot F_1(v), & V\sin\mu &= \sin u\cdot F_1'(v)-\operatorname{cosin}u\,F_1(v), \end{aligned}$$

wenn

(41) $$u=\alpha+\beta,\qquad v=\alpha-\beta$$

gesetzt wird. Hieraus ergibt sich:

(42) $$\begin{aligned} \operatorname{tg}\lambda &= \frac{F_1+F_1'\operatorname{tg}u}{-F_1\operatorname{tg}u+F_1'},\qquad \operatorname{tg}\mu=\frac{-F_1+F_1'\operatorname{tg}u}{F_1'+F_1\operatorname{tg}u}, \\ \sin\lambda &= \frac{F_1+F_1'\operatorname{tg}u}{\sqrt{F_1^2+F_1'^2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2u}}=\operatorname{cosin}(w-u), \\ \cos\lambda &= \frac{-F_1\operatorname{tg}u+F_1'}{\sqrt{F_1^2+F_1'^2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2u}}=\sin(w-u), \\ \sin\mu &= \operatorname{cosin}(w+u),\qquad \operatorname{cosin}\mu=\sin(w+u), \end{aligned}$$

[1] Ist umgekehrt Φ gegeben und soll F bestimmt werden, so ist dies eine vielfach behandelte Differentialgleichung; vergl. Darboux, Théorie générale des surfaces, t. 4, Note VI.

wobei

$$\cos w = \frac{F_1}{\sqrt{F_1^2 + F_1'^2}}, \qquad \sin w = \frac{F_1'}{\sqrt{F_1^2 + F_1'^2}} \tag{43}$$

gesetzt ist, w also eine gegebene Funktion von $v = \alpha - \beta$ bezeichnet.

Die Gleichungen (17) werden für eine Rotationsfläche:

$$\begin{aligned} x &= i \int [\Phi'(\alpha-\beta) \cdot \sin(u-w)\, d\alpha + \Phi'(\alpha-\beta) \sin(w+u)\, d\beta] \\ &= \int [(F_1' \cdot \cos u - F_1 \cdot \sin u)\, d\alpha - (F_1' \cos u + F_1 \sin u)\, d\beta], \\ y &= i \int [\Phi'(\alpha-\beta) \cdot \cos(u-w)\, d\alpha + \Phi'(\alpha-\beta) \cos(w+u)\, d\beta] \\ &= \int [(F_1 \cdot \cos u + F_1' \sin u)\, d\alpha + (F_1 \cos u - F_1' \sin u)\, d\beta], \\ z &= \Phi(\alpha-\beta), \end{aligned} \tag{44}$$

wo die Funktion w durch (43) definiert und die Funktion $F_1(\alpha-\beta)$ mit $\Phi(\alpha-\beta)$ durch die Relation (39a) verbunden ist. Die durch (11) definierte Funktion ω berechnet sich aus (42), nämlich:

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos(\lambda - \mu) = \sin(u-w)\sin(u+w) + \cos(u-w)\cos(u+w) \\ &= \cos 2w, \qquad \text{also } \omega = 2w, \end{aligned} \tag{45}$$

ist also Funktion allein von $\alpha - \beta$. Dieser Wert von ω gibt eine Lösung der Differentialgleichung (40), und zwar wird

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2 F_1 \cdot F_1'}{F_1^2 - F_1'^2}, \qquad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{F_1'}{F_1}. \tag{46}$$

Aus (43), (45) und (15a) folgt:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = \frac{F_1^2 + F_1 F_1''}{F_1^2 + F_1'^2} = \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\lg \frac{\partial W}{\partial \alpha}\right), \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = -\frac{F_1 F_1'' - F_1'^2}{F_1^2 + F_1'^2}, \tag{47}$$

und es ist nach (39a) und (46):

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\lg \frac{\partial W}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial \lg \Phi'(\alpha-\beta)}{\partial \beta} = -\frac{\Phi''}{\Phi'} = \frac{F_1 F_1' + F_1' F_1''}{F_1^2 + F_1'^2},$$

so daß die Gleichung (47) in der Tat mit (15a) übereinstimmt.

Die Fundamentalgrößen werden:

$$\begin{aligned} F &= 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \cdot W_\alpha \cdot W_\beta = 2 F_1^2 \\ D &= D'' = 2 F_1^2 \cdot \Phi' \cdot \frac{F_1 F_1'' - 2 F_1'^2 - F_1^2}{F_1^2 + F_1'^2} \\ D' &= F \cdot W_\alpha \cdot \lambda_\beta = -2 \Phi' \cdot F_1^2 \cdot \frac{F_1^2 + F_1 F_1''}{F_1^2 + F_1'^2}. \end{aligned} \tag{48}$$

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien wird daher:

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0 \quad \text{oder} \quad d\alpha + d\beta = 0 \quad \text{und} \quad d\alpha - d\beta = 0,$$

wie es sein muß. Diejenige der Haupttangentenkurven wird:

$$(F_1 F_1'' - 2 F_1'^2 - F_1^2)(d\alpha^2 + d\beta^2) + 2(F_1^2 + F_1 F_1'')\, d\alpha\, d\beta = 0,$$

oder wenn wieder $u = \alpha + \beta$, $v = \alpha - \beta$ gesetzt wird:

$$F_1 F_1'' du^2 - F_1^2 dv^2 - F_1'^2 (du^2 + dv^2) = 0,$$

also durch Quadratur:

(49) $$u = \int \sqrt{\frac{F_1^2 + F_1'^2}{F_1 F_1'' - F_1'^2}}\, dv.$$

Handelt es sich z. B. um eine Kugel von Radius 1, so ist in (38)

$$f(r) = \sqrt{1 - r^2}$$

zu nehmen, und es wird:

$$\alpha - \beta = \frac{i}{2} \lg \frac{1 - \sqrt{1 - r^2}}{1 + \sqrt{1 - r^2}}, \quad r = F_1(\alpha - \beta) = \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad \Phi(\alpha - \beta) = i \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

und aus (43):

$$\cos w = \cos(\alpha - \beta), \qquad \sin w = \sin(\alpha - \beta), \qquad w = \alpha - \beta$$

und also aus (44):

(50) $$\begin{aligned} x &= -\int \left[\frac{\sin 2\beta}{\cos^2(\alpha - \beta)}\, d\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2(\alpha - \beta)}\, d\beta\right] = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}, \\ y &= -\int \left[\frac{\cos 2\beta}{\cos^2(\alpha - \beta)}\, d\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2(\alpha - \beta)}\, d\beta\right] = -\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}, \\ z &= i \int \left[\frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha - \beta)} - \frac{d\beta}{\cos^2(\alpha - \beta)}\right] = i\, \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin

$$p = \operatorname{tg}\alpha, \qquad q = \operatorname{tg}\beta,$$

so erhält man die übliche Darstellung der Kugel durch ihre Minimalgeraden in der Form:

(51) $$x = \frac{1 + pq}{1 - pq}, \qquad y = -\frac{p + q}{1 - pq}, \qquad z = i\, \frac{p - q}{1 - pq}.$$

Im Beispiele der Kugel ist also:

(52) $$\begin{gathered} W = i \operatorname{tg}(\alpha - \beta), \quad \lambda = \left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right), \quad \mu = \frac{\pi}{2} - 2\alpha, \quad \omega = 2\alpha - 2\beta, \\ F = \frac{2}{\cos^2(\alpha - \beta)} = 2 F_1^2, \qquad F_1 = \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)}. \end{gathered}$$

§ 6. Verbiegung von Rotationsflächen auf Rotationsflächen.

Da nach (48) die Fundamentalgröße F sich auf die Funktion $F_1(\alpha - \beta)$ reduziert, so sind alle Rotationsflächen auf einander abwickelbar, bei denen F_1 denselben Wert hat; dieselben können sich dann nur durch die Funktion Φ unterscheiden, wobei nach (39)

$$\Phi' = i \sqrt{F_1^2 + F_1'^2}.$$

Um aber alle Funktionen Φ zu finden, die auf dieselbe Fundamentalgröße F führen, müssen wir auf die Differentialgleichung (36) zurückgehen:

$$\Phi'^2 \left(\frac{F'}{F}\right)^2 - 2\,\Phi'' \cdot \Phi' \cdot \frac{F'}{F} = (F + 2\,\Phi'^2)\left(\frac{F'^2}{F^2} - \frac{F''}{F}\right)$$

oder:

$$\frac{d\,\Phi'^2}{dv} \cdot \frac{F'}{F} + \Phi'^2 \left(\frac{F'^2}{F^2} - 2\,\frac{F''}{F}\right) = -F\left(\frac{F'^2}{F^2} - \frac{F''}{F}\right),$$

eine linerare Differentialgleichung der Form

$$\frac{d\,\zeta}{d\,v} + V \cdot \zeta = V_1,$$

wo

$$V = \frac{F'}{F} - 2\,\frac{F''}{F'}, \qquad V_1 = -F\left(\frac{F'}{F} - \frac{F''}{F'}\right),$$

also:

$$\Phi'^2 = e^{-\int V dv}\,(C + \int e^{\int V dv} \cdot V_1 \cdot dv), \qquad v = \alpha - \beta,$$

$$= \frac{F'^2}{F}\left[C - \int\left(\frac{F}{F'} - \frac{F'' \cdot F^2}{F'^3}\right) dv\right] = C\,\frac{F'^2}{F} - \frac{1}{2}\,F \tag{53}$$

und, wenn wieder $F = 2\,F_1^2$ genommen wird:

$$\Phi'^2 = 2\,F_1'^2 \cdot C - F_1^2, \tag{53 a}$$

so daß sich für $C = -\frac{1}{2}$ wieder die gegebene Rotationsfläche ergibt. Da F_1 als gegeben gedacht wird, so kann die gesuchte Rotationsfläche aus den Gleichungen (44) bestimmt werden.

Setzt man

$$\alpha' = a\alpha, \quad \beta' = a\beta, \quad F_2(\alpha' - \beta') = a\,F_1(a\alpha' - a\beta'), \quad a \cdot \Phi_2(\alpha' - \beta') = \Phi(a\alpha' - a\beta') \tag{53 b}$$

so wird:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\alpha'}\right)^2 = \frac{2\,C}{a^4}\,F_2'^2 - \frac{1}{a^2}\,F_2^2;$$

man erhält also für $2\,C = -a^2$ die frühere Relation (53):

$$\Phi_2'^2 = -F_2'^2 - F_2^2$$

und die auf eine gegebene Rotationsfläche abwickelbaren Flächen werden:

$$x = \operatorname{cosin}\frac{\alpha' + \beta'}{a} \cdot F_1(a\alpha' - a\beta'), \qquad y = \sin\frac{\alpha' + \beta'}{a} \cdot F_1(a\alpha' - a\beta')$$

$$\begin{aligned} z = \Phi_2(\alpha' - \beta) &= i\int\sqrt{F_2'^2 + F_2^2}\;d(\alpha' - \beta') \\ &= i\int\sqrt{a^2 F_1'(a\alpha' - a\beta')^2 + \frac{1}{a^2}\,F_1(a\alpha' - a\beta')^2}\;d(\alpha' - \beta'). \end{aligned} \tag{54}$$

Diese Gleichungen enthalten eine willkürliche Konstante a, sind deshalb ebenso allgemein wie obige Gleichungen (53). Man kommt zu der Form (54) auch direkt durch folgende Überlegung.

Eine Fläche bleibt ungeändert, wenn man die Parameter α, β durch beliebige Funktionen A, B dieser Parameter ersetzt. Für eine auf die gegebene Fläche abwickelbare Rotationsfläche, bei der F_1 durch F_2 ersetzt wird, muß daher auch der Ansatz gelten:

$$ds^2 = 2\,F\,d\alpha\,d\beta = 4\,F_2^2\,d\alpha\,d\beta = 4\,A'\,B'\,F_1\,(A-B)^2\,d\alpha\,d\beta\,.$$

Hier soll links F_2 eine Funktion von $\alpha-\beta$ sein; es ist also

$$A = a\alpha\,, \qquad\qquad B = a\beta$$

zu setzen, wo a eine reelle Konstante bezeichnet, folglich:

$$F_2\,(\alpha-\beta) = a\,F_1\,(a\alpha - a\beta)\,,$$

wodurch wir zu den Gleichungen (54) zurückgekehrt sind.

Setzt man

$$u = \frac{1}{a}\,(\alpha' + \beta')\,, \qquad\qquad v = a\,(\alpha' - \beta')\,,$$

so ergeben sich hier die folgenden Beziehungen:

$$\operatorname{tg}\lambda_1 = \frac{F_1(v) + a\,F_1'(v)\cdot\operatorname{tg}u}{a\,F_1'(v) - F_1(v)\operatorname{tg}u}\,, \qquad \operatorname{cosin}\lambda_1 = \frac{a\,F_1'\cdot\operatorname{cosin}u - F_1\cdot\sin u}{\sqrt{a^2\,F_1'^2 + F_1^2}}\,,$$

$$\sin\lambda_1 = \frac{a\,F_1'\sin u + F_1\operatorname{cosin}u}{\sqrt{a^2\,F_1'^2 + F_1^2}}\,, \qquad \operatorname{tg}\omega_1 = \frac{-2\,a\,F_1\,F_1'}{a^2\,F_1'^2 - F_1^2}\,,$$

$$\operatorname{tg}\omega = a\,\frac{F_1'}{F_1}\,, \qquad \frac{\partial\lambda_1}{\partial\beta} = -\operatorname{cotg}\frac{\omega_1}{2}\cdot\frac{(W_1)_{\alpha\beta}}{(W_1)\,\alpha} = \frac{1}{a}\,\frac{a^2\,F_1\,F_1' + F_1'^2}{a^2\,F_1'^2 + F_1^2}\,.$$

$$\operatorname{cosin}\mu_1 = -\frac{F_1\sin u + a\,F_1'\operatorname{cosin}u}{\sqrt{a^2\,F_1'^2 + F_1^2}}\,, \qquad \sin\mu_1 = \frac{F_1\operatorname{cosin}u - a\,F_1'\sin u}{\sqrt{a^2\,F_1'^2 + F_1^2}}\,,$$

$$\operatorname{cosin}\omega_1 = \frac{a^2\,F_1'^2 - F_1^2}{a^2\,F_1'^2 + F_1^2}\,, \qquad \sin\omega_1 = \frac{-2\,a\,F_1\,F_1'}{a^2\,F_1'^2 + F_1^2}\,.$$

Mit Hilfe dieser Werte ist die Parameterdarstellung der Fläche nach den Formeln (17) aufzustellen.

Die Rotationsflächen konstanten positiven Krümmungsmaßes sind auf die Kugel abwickelbar. Wählt man das Krümmungsmaß gleich Eins, so findet man sie also aus den Gleichungen (50) bzw. (52) in der Gestalt:

(55)
$$x = a\,\frac{\operatorname{cosin}\dfrac{\alpha+\beta}{a}}{\operatorname{cosin}a\,(\alpha-\beta)}\,, \qquad y = -a\,\frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{a}}{\operatorname{cosin}a\,(\alpha-\beta)}\,,$$

$$z = i\,a\int\sqrt{a^2 + (1-a^2)\operatorname{cosin}^2 a v}\;\frac{dv}{\operatorname{cosin}^2 a v}\,, \qquad v = \alpha-\beta\,.$$

Führt man die Variabeln $u = \alpha + \beta$, $v = \alpha - \beta$ ein, so entstehen die bekannten Formeln.

Die Rotationsflächen konstanter negativer Krümmung erhält man ebenso aus den Gleichungen für die Rotationsfläche der Traktrix, nämlich:

$$x = r \cos\varphi\,, \qquad y = r \sin\varphi\,, \qquad z = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2}\right) - \sin\delta = f(r)\,,$$

wo

$$r = \cos\delta\,.$$

Es wird:

$$f'(r) = -\operatorname{tg}\delta, \quad r = \frac{1}{i(\alpha-\beta)}, \quad z = -\int \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\,dr = \int \sqrt{1+v^2}\,\frac{dv}{v^2}, \quad v = \alpha - \beta.$$

Die Rotationsfläche der Traktrix, bezogen auf die Minimalkurven, wird somit durch folgende Formeln dargestellt:

$$x = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{i(\alpha-\beta)}, \quad y = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{i(\alpha-\beta)}, \quad z = \Phi(\alpha-\beta) = \int \sqrt{1+v^2}\,\frac{dv}{v^2}, \tag{56}$$

ferner nach (42) und (45):

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = -\frac{1}{\alpha-\beta}, \qquad \operatorname{tg}\lambda = \frac{\alpha-\beta - \operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+1},$$

$$u - w = \alpha + \beta - \frac{\omega}{2} = \alpha + \beta + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right),$$

und somit:

$$\begin{aligned} x &= i\int \frac{\sqrt{1+v^2}}{v^2}\left[\sin\left(u + \operatorname{arctg}\frac{1}{v}\right)d\alpha + \sin\left(u - \operatorname{artg}\frac{1}{v}\right)d\beta\right], \\ y &= i\int \frac{\sqrt{1+v^2}}{v^2}\left[\cos\left(u + \operatorname{artg}\frac{1}{v}\right)d\alpha + \cos\left(u - \operatorname{artg}\frac{1}{v}\right)d\beta\right], \\ z &= -\frac{\sqrt{1+v^2}}{v} + \lg\left(v + \sqrt{1+v^2}\right). \end{aligned} \tag{57}$$

§ 7. Einfluss einer Koordinatentransformation.

Bedeuten a_i, b_i, c_i die neun Koeffizienten einer orthogonalen Transformation, die also durch die Gleichungen

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z\,, \qquad y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2 z\,, \qquad z_1 = a_3 x + b_3 y + c_3 z \tag{58}$$

gegeben sei, so wird aus einer Fläche eine kongruente Fläche entstehen. Haben Ω, Λ, M, w für die neue Fläche dieselbe Bedeutung wie W, λ, μ, ω für die gegebene Fläche, so wird man versucht sein die folgenden Gleichungen anzusetzen:

$$x_1 = i\int\left[\cos \Lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} d\alpha - \cos \mathrm{M} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} d\beta\right], \quad y_1 = i\int\left[\sin \Lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} d\alpha - \sin \mathrm{M} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} d\beta\right], \tag{59}$$
$$z_1 = \int\left[\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} d\beta\right],$$

wobei zwischen Ω, Λ, M, w dieselben Beziehungen bestehen sollten wie zwischen W, λ, μ, ω. Dieser Ansatz ist aber nicht zulässig. Infolge der Gleichungen (1) und (17) würde sich nämlich ergeben:

$$\begin{aligned} i \cos \Lambda \cdot \Omega_\alpha &= L_1 \cdot W_\alpha, & -i \cos \mathrm{M} \cdot \Omega_\beta &= M_1 \cdot W_\beta, \\ i \sin \Lambda \cdot \Omega_\alpha &= L_2 \cdot W_\alpha, & -i \sin \mathrm{M} \cdot \Omega_\beta &= M_2 \cdot W_\beta, \\ \Omega_\alpha &= L_3 \cdot W_\alpha, & \Omega_\beta &= M_3 \cdot W_\beta, \end{aligned} \tag{59a}$$

wenn

$$L_k = i\, a_k \cos \lambda + i\, b_k \sin \lambda + c_k, \qquad M_k = -i\, a_k \cos \mu - i\, b_k \sin \mu + c_k \tag{60}$$
$$\text{für} \quad i = \sqrt{-1}, \qquad k = 1, 2, 3$$

gesetzt wird. Zwischen W, L_3 und M_3 müßten also die Gleichungen erfüllt werden:

$$\frac{\partial L_3 W_\alpha}{\partial \beta} = \frac{\partial M_3 W_\beta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{L_1 W_\alpha}{\cos \Lambda}\right) = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{M_1 W_\alpha}{\cos \mathrm{M}}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{L_2 W_\alpha}{\sin \Lambda}\right) = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{M_2 W_\alpha}{\sin \mathrm{M}}\right). \tag{61}$$

Infolge der obigen Gleichungen (15) und (15a) wird die erste dieser Relationen in der Tat zur Identität, und die beiden anderen lassen sich auf die erste mit Hilfe der sogleich für $\cos \Lambda$, $\sin \Lambda$, $\cos \mathrm{M}$, $\sin \mathrm{M}$ aufzustellenden Formeln reduzieren.

Auch sonst führt der Ansatz (59) zu Widersprüchen. Aus ihm würde sich nämlich ergeben:

$$\operatorname{tg} \Lambda = \frac{L_2}{L_1}, \qquad \frac{1}{\cos^2 \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} = \frac{i\, a_3 \cos \lambda - i\, b_3 \sin \lambda - c_3}{L_1^2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \beta}, \tag{62}$$
$$\cos \Lambda = -i \frac{L_1}{L_3}, \ \sin \Lambda = -i \frac{L_2}{L_3}, \ \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} = \frac{c_3 - i\, a_3 \cos \lambda + i\, b_3 \sin \lambda}{L_3^2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \beta},$$

entsprechend für M bei Vertauschung von i mit $-i$,

$$\begin{aligned} [1 + \cos(\Lambda - \mathrm{M})]\, \Omega_\alpha \Omega_\beta &= (1 + \cos w)\, \Omega_\alpha \Omega_\beta = (1 + \cos \omega)\, W_\alpha W_\beta \\ [1 - \cos w]\, \Omega_\alpha \Omega_\beta &= [2 L_3 M_3 - (1 + \cos \omega)]\, W_\alpha W_\beta, \end{aligned} \tag{63}$$

wobei die Relationen

$$\begin{aligned} L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = 0, &\qquad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = 0, \\ L_1 M_1 + L_2 M_2 + L_3 M_3 &= 1 + \cos \omega = L_3 M_3\, (1 + \cos w) \end{aligned} \tag{64}$$

zu berücksichtigen sind. Wir stellen diese Formeln zu späterem Gebrauche hier zusammen. Nun sollte nach (15a) sich ergeben:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} = \operatorname{cotg} \frac{w}{2} \cdot \frac{\Omega_{\alpha\beta}}{\Omega_\alpha},$$

oder:

$$\frac{c_3 - i a_3 \cos\lambda + i b_3 \sin\lambda}{L_3^2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\omega}{2 L_3 M_3 - 1 - \cos\omega}} \left[i \frac{b_3 \cos\lambda - a_3 \sin\lambda}{L_3} + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \right]; \tag{65}$$

und man überzeugt sich leicht an einem Beispiele, daß diese Gleichung im allgemeinen nicht erfüllt ist. Es gibt indessen Ausnahmen. Nimmt man z. B. $a_3 = b_1 = c_2 = 1$ und alle anderen Koeffizienten gleich Null, so werden beide Seiten der Gleichung (65) nach Multiplikation mit $\cos^2\lambda \cdot \cos\omega$ gleich $\sin\frac{\lambda+\mu}{2}$; ebenso nach Multiplikation mit $\sin^2\lambda \cdot \cos\omega$ gleich $\cos\frac{\lambda+\mu}{2}$, wenn man nur $a_2 = c_1 = a_3$ von Null verschieden und gleich 1 annimmt. Allgemeiner kann man $c_3 = 1$, $a_3 = 0$, $b_3 = 0$, $a_1 = b_2 = \cos\varphi$, $a_2 = -b_1 = \sin\varphi$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ nehmen, ohne die Gleichung (65) zu stören. Dieser Fall entspricht der Drehung der Fläche um die Z-Achse, die man auch dadurch darstellt, daß man in (17) die aus (15) und (15a) zu bestimmenden Funktionen λ und μ um dieselbe additive reelle Konstante ändert.

Transformiert man die Relation (15a) mittelst der Formeln (59a), so erhält man die entsprechende Gleichung zwischen den Funktionen Λ, M, Ω, w $(= \Lambda - \mathrm{M})$. Aus den Gleichungen (62) findet man durch Auflösung:

$$\cos\lambda = \frac{a_1 \cos\Lambda + a_2 \sin\Lambda + i a_3}{c_1 \cos\Lambda + c_2 \sin\Lambda + i c_3}, \quad \sin\lambda = \frac{b_1 \cos\Lambda + b_2 \sin\Lambda + i b_3}{c_1 \cos\Lambda + c_2 \sin\Lambda + i c_3},$$

also:

$$L_3 = c_3 \left[(1+i)(c_1 \cos\Lambda + c_2 \sin\Lambda) + (1-i)\, c_3 \right],$$
$$M_3 = c_3 \left[(1-i)(c_1 \cos\mathrm{M} + c_2 \sin\mathrm{M}) + (1+i)\, c_3 \right].$$

Diese Werte hätte man in die folgende Gleichung einzusetzen:

$$\frac{L_3^2}{c_3 - i a_3 \cos\lambda + i b_3 \sin\lambda} \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial\beta} = \sqrt{\frac{(1 + \cos w)\, L_3 M_3}{2 - L_3 M_3 (1 + \cos w)}} \left[\frac{\Omega_{\alpha\beta}}{\Omega_\alpha} + \frac{i a_3 \cos\lambda - i b_3 \sin\lambda}{L_3^2} \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} \right].$$

Es geht hieraus hervor, daß die Gleichungen (15) und (15a) in bezug auf orthogonale Transformationen keinen invarianten Charakter haben.

§ 8. Aufstellung unendlich vieler Biegungsflächen einer gegebenen Fläche.

Ist eine Fläche gegeben, so stellen wir die Koordinaten ihrer Punkte zunächst in Form der Gleichungen (17) dar, was nach Integration der Differentialgleichung ihrer Minimalkurven stets möglich ist. Nach § 4 haben wir dadurch drei Lösungen der partiellen Gleichung (36) gewonnen. Aus der dritten Lösung $(z = W)$ werden die beiden anderen mittelst der Formeln (15) und (15a) gewonnen. Wenden wir aber diese Formeln auf eine lineare Kombination der drei Lösungen an, wie sie in § 7 vorlag, d. h. gehen wir von einer Lösung

$$W_1 = \int \left[(i a \cos\lambda + i b \sin\lambda + c)\, W_\alpha\, d\alpha - (i a \cos\mu + i b \sin\mu - c)\, W_\beta\, d\beta \right]$$

aus, wo zwischen den Konstanten a, b, c die Relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \tag{66}$$

erfüllt sei, und bestimmen wir eine Funktion ω_1 durch die Gleichungen

$$(1 + \operatorname{cosin} \omega_1) \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} \frac{\partial W_1}{\alpha \beta} = (1 + \operatorname{cosin} \omega) \frac{\partial W}{\partial \alpha} \frac{\partial W}{\partial \beta},$$

ferner die Funktionen λ_1, μ_1 durch die Gleichungen (15) und (15a), d. h.

$$\omega_1 = \lambda_1 - \mu_1$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \beta} \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} = \operatorname{cotg} \frac{\omega_1}{2} \cdot \frac{\partial^2 W_1}{\partial \alpha \partial \beta}, \qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha} \frac{\partial W_1}{\partial \beta} = - \operatorname{cotg} \frac{\omega_1}{2} \cdot \frac{\partial^2 W_1}{\partial \alpha \partial \beta},$$

und setzen dann

$$\begin{aligned} x_1 &= i \int \left[\operatorname{cosin} \lambda_1 \cdot \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} d\alpha - \operatorname{cosin} \mu_1 \frac{\partial W_1}{\partial \beta} d\beta \right], \\ y_1 &= i \int \left[\sin \lambda_1 \cdot \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} d\alpha - \sin \mu_1 \, i \frac{\partial W_1}{\partial \beta} d\beta \right], \\ z_1 &= \int \left[\frac{\partial W_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial W_1}{\partial \beta} d\beta \right] = W_1, \end{aligned} \tag{67}$$

so genügen diese drei Funktionen nach § 4 den Differentialgleichungen:

$$\begin{gathered} \{x_1, x_1\} = \{y_1, y_1\} = \{z_1, z_1\} = F^3 \left(F \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) \\ \{x_1, y_1\} = 0, \qquad \{y_1, z_1\} = 0, \qquad \{z_1, x_1\} = 0 \end{gathered} \tag{68}$$

und es ist identisch:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \alpha}\right)^2 = 0, \qquad \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \beta}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} \frac{\partial y_1}{\partial \beta} + \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} \frac{\partial z_1}{\partial \beta} = F.$$

Die Größen x_1, y_1, z_1 sind also die Koordinaten eines Punktes einer Fläche, für welche α, β die Parameter der Minimalkurven sind und die auf die gegebene Fläche abwickelbar ist. Die neue Fläche hängt von den drei Konstanten a, b, c ab, zwischen denen die Relation (66) besteht, und nach den Untersuchungen in § 7 kann sie nur in ganz besonderen Fällen mit der gegebenen Fläche kongruent sein.

Auf diese neue Fläche kann dasselbe Verfahren nochmals angewandt werden, und so kann man aus jeder Fläche unendlich viele andere Flächen ableiten, die alle auf einander abwickelbar sind, und bei jedem Schritte werden zwei neue willkürliche Konstante eingeführt.

Für das Beispiel der Kugel haben wir

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{\operatorname{cosin} (\alpha - \beta)} [a \operatorname{cosin} (\alpha + \beta) + b \sin (\alpha + \beta) + i c \sin (\alpha - \beta)] \\ &= \frac{1}{\operatorname{cosin} (\alpha - \beta)} [\varrho \operatorname{cosin} (\alpha + \beta - \delta) + i c \sin (\alpha - \beta)], \end{aligned}$$

wenn
$$a = \varrho \cos\delta\,, \qquad b = \varrho \sin\delta\,, \qquad c^2 + \varrho^2 = 1.$$

Sei ferner wieder $u = \alpha + \beta$, $v = \alpha - \beta$, und nach (32), $\lambda = \frac{\pi}{2} - 2\beta$, $\mu = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, so wird:
$$\frac{\partial W_1}{\partial \alpha} = \frac{-\varrho \sin(2\beta - \delta) + i c}{\cos^2 v}\,, \qquad \frac{\partial W_1}{\partial \beta} = \frac{-\varrho \sin(2\alpha - \delta) - i c}{\cos^2 v}\,,$$
$$\frac{\partial \lg \dfrac{\partial W_1}{\partial \alpha}}{\partial \beta} = 2\,\frac{\varrho \cos(u - \delta) + i c \sin v}{\cos v \cdot [\varrho \sin(2\beta - \delta) - i c]}\,,$$
$$\cos^2 \frac{\omega_1}{2} = \frac{\cos^2 v}{[\varrho \sin(2\beta - \delta) - i c]\,[\varrho \sin(2\alpha - \delta) + i c]}\,,$$
$$\sin^2 \frac{\omega_1}{2} = \frac{\varrho^2 \cos(2\alpha - \delta)\cos(2\beta - \delta) + c^2 + i\varrho c\,[\cos(2\alpha - \delta) - \cos(2\beta - \delta)] - \cos^2 v}{[\varrho \sin(2\beta - \delta) - i c]\,[\varrho \sin(2\alpha - \delta) + i c]}\,,$$
$$(69) \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \beta} = \frac{\varrho \sin(u - \delta) + i c \sin v}{\varrho \sin(2\beta - \delta) - i c} \cdot \frac{-2}{\sqrt{R}}\,,$$
wo
$$R = (\varrho \sin(2\beta - \delta) - i c)\,(\varrho \sin(2\alpha - \delta) + i c) - \cos^2 v\,,$$
entsprechend für μ_1. Ist insbesondere $\varrho = 0$, $\delta = 0$, $c = 1$, so wird:
$$W_1 = i \operatorname{tg}(\alpha - \beta)\,, \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \beta} = -2 = -\frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha}\,,$$
und man findet
$$x_1 = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}\,, \qquad y_1 = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}\,, \qquad z_1 = i \operatorname{tg}(\alpha - \beta)\,;$$
in diesem besonderen Falle führt das Verfahren also zur Kugel zurück. Ist dagegen $c = 0$ und $\varrho = 1$, so wird
$$R = \cos(2\beta - \delta)\cos(2\alpha - \delta) - \cos^2 v = \tfrac{1}{2}\,[\cos(2u - 2\delta) + \cos(2v) - 1 - \cos(2v)]$$
$$= -\sin^2(u - \delta)\,,$$
also
$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \beta} = \frac{2i}{\cos(2\beta - \delta)}\,, \qquad \lambda_1 = -i \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta + \frac{1}{2}\delta\right).$$

Nun ist
$$\cos \lambda_1 = \cos(i \lg \operatorname{tg} \vartheta) = \frac{1}{2}\left(e^{\lg \operatorname{tg} \vartheta} + e^{-\lg \operatorname{tg} \vartheta}\right) = \frac{1}{\sin(2\vartheta)}\,,$$
$$\sin \lambda_1 = \sin(i \lg \operatorname{tg} \vartheta) = \frac{i}{2}\left(e^{\lg \operatorname{tg} \vartheta} - e^{-\lg \operatorname{tg} \vartheta}\right) = -i \operatorname{cotg}(2\vartheta)\,.$$

Es kann unbeschadet der Allgemeinheit $\delta = 0$ genommen werden; dann findet man aus (17):

$$x_1 = i \operatorname{tg}(\alpha - \beta), \qquad y_1 = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}, \qquad z_1 = W_1 = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)},$$

also auch wieder die Kugel, wie es nach den Erörterungen in § 7 sein muß. Im allgemeinen aber wird durch die Funktionen λ_1 und W_1 eine neue Fläche konstanter Krümmung bestimmt.

§ 9. Die allgemeine Lösung des Problems der Biegung.

Wir kehren zu den Gleichungen (59a) zurück, in denen die Funktionen Λ, M, Ω wieder mittels dreier Funktionen L_1, L_2, L_3 bezw. M_1, M_2, M_3 durch die Funktionen λ, μ, W ausgedrückt seien, wobei aber jetzt die Größen a, b, c nicht Konstante, sondern Funktionen von α, β bedeuten mögen, die den bekannten Relationen zwischen den Koeffizienten einer orthogonalen Transformation genügen, so daß wieder, wie in (64):

$$\begin{gathered} L_1^2 + L_1^2 + L_3^2 = 0, \qquad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = 0, \\ L_1 M_1 + L_2 M_2 + L_3 M_3 = 1 + \cos\omega. \end{gathered} \tag{70}$$

Es sind dann die Größen x_1, y_1, z_1 wieder die Koordinaten der Punkte einer Fläche, sobald unter den Integralzeichen in (59) vollständige Differentiale stehen. Dazu ist nötig, daß die erste Gleichung (61) und die entsprechenden für L_1 und L_2 erfüllt sind, so daß die drei Gleichungen (vgl. den Schluß in § 1):

$$\begin{gathered} W_\alpha \frac{\partial L_1}{\partial \beta} - W_\beta \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + W_{\alpha\beta}(L_1 - M_1) = 0, \\ W_\alpha \frac{\partial L_2}{\partial \beta} - W_\beta \frac{\partial M_2}{\partial \alpha} + W_{\alpha\beta}(L_2 - M_2) = 0, \\ W_\alpha \frac{\partial L_3}{\partial \beta} - W_\beta \frac{\partial M_3}{\partial \alpha} + W_{\alpha\beta}(L_3 - M_3) = 0, \end{gathered} \tag{71}$$

erfüllt sein müssen, oder infolge der Gleichungen (15) und (15a):

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \beta} + L_1 \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \cdot \lambda_\beta\right) W_\alpha - \left(\frac{\partial M_1}{\partial \alpha} - M_1 \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \cdot \mu_\alpha\right) W_\beta = 0, \\ \left(\frac{\partial L_2}{\partial \beta} + L_2 \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \cdot \lambda_\beta\right) W_\alpha - \left(\frac{\partial M_2}{\partial \alpha} - M_2 \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \cdot \mu_\alpha\right) W_\beta = 0, \\ \left(\frac{\partial L_3}{\partial \beta} + L_3 \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \cdot \lambda_\beta\right) W_\alpha - \left(\frac{\partial M_3}{\partial \alpha} - M_3 \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \cdot \mu_\alpha\right) W_\beta = 0. \end{gathered} \tag{72}$$

Durch Multiplikation mit L_1, L_2, L_3 bezw. M_1, M_2, M_3 und Benutzung der Gleichungen (70) folgt weiter:

$$L_1 \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + L_2 \frac{\partial M_2}{\partial \alpha} + L_3 \frac{\partial M_3}{\partial \alpha} = \sin\omega \cdot \mu_\alpha ,$$

$$(73) \qquad M_1 \frac{\partial L_1}{\partial \beta} + M_2 \frac{\partial L_2}{\partial \beta} + M_3 \frac{\partial L_3}{\partial \beta} = -\sin\omega \cdot \lambda_\beta ,$$

ferner aus der dritten Gleichung:

$$\Sigma L_i \frac{\partial M_i}{\partial \alpha} + \Sigma M_i \frac{\partial L_i}{\partial \alpha} = -\sin\omega \cdot (\lambda_\alpha - \mu_\alpha) ,$$

$$\Sigma L_i \frac{\partial M_i}{\partial \beta} + \Sigma M_i \frac{\partial L_i}{\partial \beta} = -\sin\omega \; (\lambda_\beta - \mu_\beta) ,$$

so daß sich auch die weiteren Gleichungen ergeben:

$$(74) \qquad \Sigma M_i \frac{\partial L_i}{\partial \alpha} = -\sin\omega \cdot \lambda_\alpha , \qquad \Sigma L_i \frac{\partial M_i}{\partial \beta} = \sin\omega \cdot \mu_\beta .$$

Die ersten beiden Gleichungen (70) erfüllen wir identisch durch die Substitution:

$$(75) \qquad \begin{aligned} L_1 &= R \cdot \cos\Phi , & L_2 &= R \cdot \sin\Phi , & L_3 &= i R , \\ M_1 &= R' \cdot \cos\Psi , & M_2 &= R' \cdot \sin\Psi , & M_3 &= -i R' . \end{aligned}$$

Dann wird die dritte Gleichung (70):

$$(76) \qquad RR' \, (1 + \cos(\Phi - \Psi)) = 1 + \cos(\lambda - \mu) ,$$

und die Gleichungen (73) bezw. (74) werden:

$$(77) \qquad \begin{aligned} RR'_\alpha \, [1 + \cos(\Phi - \Psi)] &+ RR'\Psi_\alpha \sin(\Phi - \Psi) = \sin\omega \cdot \mu_\alpha , \\ RR'_\beta \, [1 + \cos(\Phi - \Psi)] &+ RR'\Psi_\beta \sin(\Phi - \Psi) = \sin\omega \cdot \mu_\beta , \\ R_\alpha R' \, [1 + \cos(\Phi - \Psi)] &- RR'\Phi_\alpha \sin(\Phi - \Psi) = -\sin\omega \cdot \lambda_\alpha , \\ R_\beta R' \, [1 + \cos(\Phi - \Psi)] &- RR'\Phi_\beta \sin(\Phi - \Psi) = -\sin\omega \cdot \lambda_\beta . \end{aligned}$$

Von diesen vier Gleichungen ist die dritte eine Folge der ersten, die vierte eine Folge der zweiten vermöge der dritten Gleichung (70), die mit (76) identisch ist. Setzen wir zur Abkürzung:

$$(78) \qquad \mathfrak{W}' = \tfrac{1}{2} \mathfrak{W} , \qquad \omega' = \tfrac{1}{2} \omega ,$$

so werden die Gleichungen (77):

$$(79) \qquad \begin{aligned} \Psi_\alpha &= \left[\mu_\alpha \cdot \operatorname{tg} \omega' - \frac{\partial \lg R'}{\partial \alpha} \right] \operatorname{cotg} \mathfrak{W}' , & \Psi_\beta &= \left[\mu_\beta \cdot \operatorname{tg} \omega' - \frac{\partial \lg R'}{\partial \beta} \right] \operatorname{cotg} \mathfrak{W}' , \\ \Phi_\alpha &= \left[\lambda_\alpha \cdot \operatorname{tg} \omega' + \frac{\partial \lg R}{\partial \alpha} \right] \operatorname{cotg} \mathfrak{W}' , & \Phi_\beta &= \left[\lambda_\beta \cdot \operatorname{tg} \omega' + \frac{\partial \lg R}{\partial \beta} \right] \operatorname{cotg} \mathfrak{W}' . \end{aligned}$$

Die doppelte Berechnung von $\Phi_{\alpha\beta}$ aus den beiden letzten Gleichungen führt zu folgendem Resultate:

$$\Phi_{\alpha\beta} \cdot \operatorname{tg} \mathfrak{W}' + \Phi_\alpha \frac{\mathfrak{W}'_\beta}{\cos^2 \mathfrak{W}'} = \lambda_{\alpha\beta} \cdot \operatorname{tg} \omega' + \lambda_\alpha \frac{\omega'_\beta}{\cos^2 \omega'} + \frac{\partial^2 \lg R}{\partial \alpha \, \partial \beta} ,$$

$$\Phi_{\alpha\beta} \cdot \operatorname{tg} \mathfrak{W}' + \Phi_\beta \frac{\mathfrak{W}'_\alpha}{\cos^2 \mathfrak{W}'} = \lambda_{\alpha\beta} \cdot \operatorname{tg} \omega' + \lambda_\beta \frac{\omega'_\alpha}{\cos^2 \omega'} + \frac{\partial^2 \lg R}{\partial \alpha \, \partial \beta} ,$$

also durch Subtraktion:

$$\frac{\Phi_\alpha \mathfrak{W}'_\beta - \Phi_\beta \mathfrak{W}'_\alpha}{\cos^2 \mathfrak{W}'} = \frac{\lambda_\alpha \omega'_\beta - \lambda_\beta \omega'_\alpha}{\cos^2 \omega'} . \tag{80}$$

Der Zähler der linken Seite ist gleich $\frac{-1}{2}(\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha)$, der der rechten Seite gleich $\frac{-1}{2}(\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha)$. Zufolge der obigen Formeln (19) und (28) ist die rechte Seite gleich dem Krümmungsmaße der gegebenen Fläche, multipliziert in die Fundamentalgröße F; und da Φ, Ψ, $\mathfrak{W}'$ für die Biegungsfläche dieselbe Bedeutung haben wie λ, μ, ω' für die gegebene Fläche, so sagt Gleichung (80) nichts anderes aus, als daß das Krümmungsmaß beider Flächen identisch ist. Dieselbe Gleichung ergibt sich aus den ersten beiden Gleichungen (71).

Die beiden Integralitätsbedingungen der Gleichungen (79) sind folglich identisch erfüllt, denn die Gleichung (80) ist von der Gleichung (76), die als erfüllt vorausgesetzt wird, nicht verschieden, da das Krümmungsmaß nur von F abhängt und nach (76) die Fundamentalgröße F für beide Flächen dieselbe ist. Letztere lautet jetzt infolge von (78):

$$r \cdot \cos \mathfrak{W}' = \cos \omega' , \tag{81}$$

wenn noch

$$R = r \cdot e^{i\varphi} , \qquad R' = r \cdot e^{-i\varphi} \tag{81 a}$$

gesetzt wird.

Das gewonnene Resultat hätte vorausgesehen werden können. Die Gleichungen (79) nämlich sind identisch mit (77), bezw. (73) und (74) und letztere lassen sich in der Form

$$L_1 K_1 + L_2 K_2 + L_3 K_3 = 0 , \qquad M_1 K_1 + M_2 K_2 + M_3 K_3 = 0$$

schreiben, wenn mit K_1, K_2, K_3 die linken Seiten der Gleichungen (71) oder (72) bezeichnet werden. Hierzu kommt die dritte Gleichung (70), d. h. $K_3 = 0$, so daß:

$$L_1 K_1 + L_2 K_2 = 0 \quad \text{und} \quad M_1 K_1 + M_2 K_2 = 0 ,$$

also auch:

$$K_1 = 0 , \qquad K_2 = 0 ,$$

denn die Determinante

$$L_1 M_2 - L_2 M_1 = R R' \sin(\Phi - \Psi)$$

kann im allgemeinen nicht verschwinden. Die Gleichungen (73) und (74) sind also in der Tat eine Folge der Gleichungen (79), und die Gleichungen (74) waren aus der dritten Gleichung (70) gewonnen, die sich nun umgekehrt durch vorstehende Rechnung als Integrabilitätsbedingung der Gleichung (79) ergibt. Sollte $\Phi = \Psi$ sein, so würde auch $\lambda = \mu$ folgen und dann wäre nach (28) das Krümmungsmaß gleich Null.

Man kann die Zurückführung der Gleichung (80) auf diese Gleichung (81) auch in folgender Weise direkt erkennen. Oben waren die Gleichungen (79) zuerst beiderseits mit $\operatorname{tg} \mathfrak{W}'$ multipliziert und sodann differenziert. Berechnet man die Werte $\Psi_{\alpha\beta}$ und $\Phi_{\alpha\beta}$ direkt, so ergeben sich die beiden Relationen:

$$\text{(81a)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\operatorname{cotg} \mathfrak{W}'}{\operatorname{cosin}^2 \omega^1} \cdot (\mu, \omega') - \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\sin^2 \mathfrak{W}'} \cdot (\mu, \mathfrak{W}') + \frac{1}{\sin^2 \mathfrak{W}'} [(\lg r, \mathfrak{W}') - i (\varphi, \mathfrak{W}')] = 0 , \\ &\frac{\operatorname{cotg} \mathfrak{W}'}{\operatorname{cosin}^2 \omega'} \cdot (\lambda, \omega') - \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\sin^2 \mathfrak{W}'} \cdot (\lambda, \mathfrak{W}') - \frac{1}{\sin^2 \mathfrak{W}'} [(\lg r, \mathfrak{W}') + i (\varphi, \mathfrak{W}')] = 0 , \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung z. B. $\mu_\alpha \omega'_\beta - \mu_\beta \omega'_\alpha = (\mu, \omega')$ gesetzt ist, und hieraus durch Subtraktion bezw. Addition (da $\lambda - \mu = \omega = 2\omega'$):

$$\text{(81b)} \qquad \begin{aligned} &\operatorname{tg} \omega' \cdot (\omega', \mathfrak{W}') + (\lg r, \mathfrak{W}') = 0 , \\ &\operatorname{cosin} \mathfrak{W}' \cdot \sin \mathfrak{W}' \cdot (\lambda + \mu, \omega') - \operatorname{cosin} \omega' \cdot \sin \omega' \cdot (\lambda + \mu, \mathfrak{W}') - 2 i \operatorname{cosin} \omega' \cdot \operatorname{cosin} \omega' \cdot (\varphi, \mathfrak{W}') = 0. \end{aligned}$$

Nun findet man aus (81):

$$\text{(81c)} \qquad (r, \mathfrak{W}') = - \frac{\sin \omega'}{\operatorname{cosin} \mathfrak{W}'} \cdot (\omega', \mathfrak{W}') ;$$

und somit geht die erste Gleichung (81b) über in

$$(\omega', \mathfrak{W}') \cdot \left[\operatorname{tg} \omega' - \frac{1}{r} \frac{\sin \omega'}{\operatorname{cosin} \mathfrak{W}'} \right] = 0 ,$$

und hier verschwindet die zweite Klammer infolge von (81), so daß die erste Gleichung (81b) erfüllt ist. Aus den ersten beiden Gleichungen (79) erhalten wir unter Benutzung der ersten Gleichung (81a):

$$\text{(81d)} \qquad \begin{aligned} (\Psi, \mathfrak{W}') &= [(\mu, \mathfrak{W}') \operatorname{tg} \omega' - (\lg r - i \varphi, \mathfrak{W}')] \operatorname{cotg} \mathfrak{W}' \\ &= \frac{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}'}{\operatorname{cosin}^2 \omega'} \cdot (\mu, \omega') = \frac{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}'}{2 \operatorname{cosin}^2 \omega'} \cdot (\mu, \lambda) . \end{aligned}$$

Denselben Wert findet man für $(\Phi, \mathfrak{W}')$; es ist also:

$$(\Phi + \Psi, \mathfrak{W}') = [(\lambda + \mu, \mathfrak{W}') \operatorname{tg} \omega' + 2 i (\varphi, \mathfrak{W}')] \operatorname{cotg} \mathfrak{W}' = \frac{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}'}{\operatorname{cosin}^2 \omega'} \cdot (\mu, \lambda) .$$

Diese Gleichung aber ist wegen der Relation $(\lambda + \mu, \omega') = (\mu, \lambda)$ mit der zweiten Gleichung (81b) identisch. Die beiden Integrabilitätsbedingungen (81a) reduzieren sich also auf die eine Gleichung (81), auf die auch (80) zurückgeführt wurde.

Zur Bestimmung der vier Funktionen Φ, Ψ, R, R' haben wir also die Gleichung (81) und die vier Gleichungen (79). Von letzteren war wegen (81) bezw. (76) die dritte eine Folge der ersten und die vierte eine Folge der zweiten. Es brauchen also nur die zweite und dritte Gleichung beibehalten zu werden. Wegen der erfüllten Integrabilitätsbedingungen ist aber auch die zweite eine Folge der ersten und die vierte eine Folge der dritten, so daß nur eine der vier Gleichungen (79) etwas neues aussagt. Diese Gleichungen sind aus den drei Gleichungen (71) durch zwei lineare Kombinationen gewonnen. Es muß daher noch eine der letzteren Gleichungen hinzugefügt werden. Wir wählen die dritte. Dieselbe wird infolge von (75):

$$\text{(82)} \qquad R_\beta W_\alpha + R'_\alpha W_\beta + (R + R') W_{\alpha\beta} = 0 .$$

Diese Gleichung läßt sich in mehreren anderen Formen schreiben; durch die Substitution (81a) wird z. B.:

(82 a) $$e^{2\varphi i}\left[\left(\frac{\partial \lg r}{\partial \beta}+i\varphi_\beta\right)W_\alpha+W_{\alpha\beta}\right]+\left(\frac{\partial \lg r}{\partial \alpha}-i\,\varphi_\alpha\right)W_\beta+W_{\alpha\beta}=0,$$

und infolge von (15) und (15a), wenn $W_{\alpha\beta}$ nicht Null ist:

$$e^{2\varphi i}\left[\frac{\partial \lg r}{\partial \beta}+i\varphi_\beta+\lambda_\beta \operatorname{tg}\omega'\right]W_\alpha+\left[\frac{\partial \lg r}{\partial \alpha}-i\varphi_\alpha-\mu_\alpha \operatorname{tg}\omega'\right]W_\beta=0,$$

eine Gleichung, die auch in den folgenden Formen geschrieben werden kann:

$$e^{2\varphi i}\cdot\Phi_\beta\cdot W_\alpha+\Psi_\alpha W_\beta=0,$$

oder:

$$\mu_\alpha\cdot\frac{\partial r e^{\varphi i}}{\partial \beta}-\lambda_\beta\cdot\frac{\partial r e^{-\varphi i}}{\partial \alpha}+r\lambda_\beta\mu_\alpha\left(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}\right)\operatorname{tg}\omega'=0,$$

oder endlich, wenn man

$$R=U+i\,V,\qquad R'=U-i\,V$$

setzt:

(82 b) $$U_\beta W_\alpha+U_\alpha W_\beta+i\,(V_\beta W_\alpha-V_\alpha W_\beta)+2\,UW_{\alpha\beta}=0.$$

Sei also zur Abkürzung:

$$\Omega=i\,(U_\beta W_\alpha+U_\alpha W_\beta+2\,UW_{\alpha\beta}),$$

und denken wir U als Funktion von α, β willkürlich gegeben, so ist auch Ω als Funktion von α, β bekannt, und V bestimmt sich aus der Gleichung:

(82 c) $$V_\beta W_\alpha-V_\alpha W_\beta=\Omega.$$

Die Gleichungen der Charakteristiken sind

$$\frac{-d\alpha}{W_\beta}=\frac{d\beta}{W_\alpha}=\frac{dV}{\Omega}$$

und ein Integral derselben:

(82 d) $$W(\alpha,\beta)=a,$$

sodann das zweite:

(82 e) $$V=-\int\frac{\Omega\cdot d\alpha}{W_\beta}+b,$$

wo a und b Konstante bezeichnen. Bei der Integration ist β aus (82 d) als Funktion von α und a zu betrachten und nach der Integration ist a durch $W(\alpha,\beta)$ zu ersetzen. Das allgemeine Integral ergibt sich, wenn man b gleich einer Funktion von a setzt und sodann a aus den Gleichungen (82 d) und (82 e) eliminiert. Doch genügt uns hier das vollständige Integral (82 e), in dem schon die willkürliche Funktion U enthalten ist; denn, wenn man Ω durch $\Omega_1+W_\beta\cdot\psi'(W)\cdot W_\alpha$ ersetzt, so wird eine neue Funktion V in der Form

$$V_1=-\int\frac{\Omega_1\,d\alpha}{W_\beta}-\psi(W)+\text{Const.}$$

gefunden, also eine Lösung, die sich ebenso ergibt, wenn man in (82 e) die Konstante $b=-\psi(a)$ setzt.

Die Bestimmung aller Biegungsflächen einer gegebenen Fläche ist hierdurch, sobald man die Parameter ihrer Minimalkurven eingeführt hat, auf eine Reihe von Quadraturen zurückgeführt, und die Koordinaten der Punkte der allgemeinen Biegungsfläche der durch die Gleichungen (17) gegebenen Fläche sind dann:

$$\begin{aligned} x_1 &= \int [re^{i\varphi} \cdot \operatorname{cosin} \Phi \cdot W_\alpha \cdot d\alpha + re^{-i\varphi} \operatorname{cosin} \Psi \cdot W_\beta \cdot d\beta], \\ y_1 &= \int [re^{i\varphi} \sin \Phi \cdot W_\alpha \cdot d\alpha + re^{-i\varphi} \sin \Psi \cdot W_\beta \cdot d\beta], \\ z_1 &= i \int [re^{i\varphi} \cdot W_\alpha \cdot d\alpha - re^{-i\varphi} \cdot W_\beta \cdot d\beta]. \end{aligned} \tag{83}$$

Um diese zu finden, hat man die gegebene Fläche durch ihre Minimalkurven in der Form (17) darzustellen, was die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erfordert; dann sind λ, μ, W, ω als Funktion von α, β bekannt; die entsprechenden Größen Φ, Ψ, r, φ der Biegungsfläche bestimmen sich sodann in der geschilderten Weise durch mehrere Quadraturen.

Das Entsprechen von Φ, Ψ, W zu λ, μ, ω tritt auch darin hervor, daß sich z. B. die erste und vierte Gleichung (79) in der Form

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha &= -\operatorname{cotg} \frac{\mathfrak{W}}{2} \cdot \frac{\partial \lg (re^{-i\varphi} W_\beta)}{\partial \alpha}, \\ \Phi_\beta &= \quad \operatorname{cotg} \frac{\mathfrak{W}}{2} \cdot \frac{\partial \lg (r \cdot e^{i\varphi} W_\alpha)}{\partial \beta}, \end{aligned} \tag{83a}$$

schreiben lassen, also genau in der Form (15), bezw. (15a); denn für die Biegungsfläche wird die Funktion W durch die Funktion

$$z_1 = i \int [re^{i\varphi} \cdot W_\alpha d\alpha - re^{-i\varphi} W_\beta d_\beta] \tag{83b}$$

ersetzt. Die Gleichungen (79) bezw. (83a) bleiben ungeändert, wenn man Φ mit λ, Ψ mit μ, W mit ω, r mit r^{-1} und φ mit $-\varphi$ vertauscht; dieser Vertauchung entspricht die Rückkehr von der Biegungsfläche zur ursprünglichen Fläche.

Der ursprüngliche Ansatz, nach welchem die Koeffizienten a_k, b_k, c_k in den Ausdrücken L_1, L_2, L_3 zu bestimmen gewesen wären, ist im vorstehenden zurückgetreten, da die Funktionen L_i direkt berechnet werden konnten und nun die Bestimmung jener Koeffizienten überflüssig ist.

Nachdem die Gleichungen (83) gewonnen sind, ist nachträglich leicht einzusehen, daß sie das Problem lösen. Erstens nämlich stellen sie eine Fläche dar, da infolge der Gleichungen (79) und (82) unter dem Integralzeichen vollständige Differentiale stehen. Zweitens sind die Bedingungen

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \alpha}\right)^2 = 0, \qquad \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \beta}\right)^2 = 0$$

infolge der Gleichungen (79) identisch erfüllt, und drittens besteht nach (76) die Gleichung:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \beta} + \frac{\partial z_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z_1}{\partial \beta} = F = 2\, W_\alpha W_\beta \cdot \operatorname{cosin}^2 \frac{\lambda - \mu}{2}.$$

§ 10. Die Differentialgleichungen des Problems.

Die Gleichungen (83) liefern die allgemeine Lösung der in (36) gegebenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn eine Lösung W derselben bekannt ist; insbesondere kann der Ausdruck (83b) als eine solche Lösung gelten. Diese Funktion z_1 genügt zunächst der Gleichung, welche aus (36) entsteht, wenn man F durch F^* ersetzt, nämlich:

$$(84)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 z_1}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial\beta^2} - \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2 + \frac{\partial z_1}{\partial\alpha}\frac{\partial z_1}{\partial\beta}\frac{\partial \lg F^*}{\partial\alpha}\frac{\partial \lg F^*}{\partial\beta} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial\alpha^2}\frac{\partial z_1}{\partial\beta}\frac{\partial \lg F^*}{\partial\beta} \\ &- \frac{\partial^2 z_1}{\partial\beta^2}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial\alpha}\frac{\partial \lg F^*}{\partial\alpha} + 2\,\frac{\partial z_1}{\partial\alpha}\frac{\partial z_1}{\partial\beta}\frac{\partial^2 \lg F^*}{\partial\alpha\,\partial\beta} = F^*\cdot\frac{\partial^2 \lg F^*}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \end{aligned}$$

wobei

$$(84\,\text{a})\quad F^* = 2\,R R' \operatorname{cosin}^2 \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)\cdot\frac{\partial W}{\partial\alpha}\frac{\partial W}{\partial\beta}$$

gesetzt wird und $\Phi - \Psi$ mit F^* durch die Gleichung zusammenhängt, welche aus (16) durch die angegebenen Vertauschungen entsteht, nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{cotg}\mathfrak{W}'\cdot\frac{\partial \lg R\,W_\alpha}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\operatorname{cotg}\mathfrak{W}'\cdot\frac{\partial \lg R'\,W_\beta}{\partial\alpha}\right) = 2\,\frac{\partial^2\mathfrak{W}'}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Nun war aber nach (76) $F^* = F$; es genügt also z_1 auch der Gleichung, welche aus (84) entsteht, wenn man F^* durch F ersetzt. Ist folglich W eine partikulare Lösung der Gleichung (36), so ist die allgemeine Lösung durch die Funktion

$$z_1 = i\int [R\,W_\alpha\,d\alpha - R'\,W_\beta\,d\beta]$$

gegeben, sobald R und R' der Gleichung (82) genügen und durch die Gleichungen (79) und (76) mit den Funktionen Φ, Ψ, λ, μ zusammenhängen.

Setzt man in (84):

$$\frac{\partial z_1}{\partial\alpha} = i\,R W_\alpha, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial\beta} = -\,i R' W_\beta,$$

so ergibt sich zwischen R und R' die Beziehung:

$$(84\,\text{b})\quad \begin{aligned} &R_\alpha R'_\beta W_\alpha W_\beta + R R'_\beta W_{\alpha\alpha} W_\beta + R_\alpha R' W_{\beta\beta} W_\alpha - R_\beta R'_\alpha W_\alpha W_\beta \\ &- R R'_\alpha W_\beta W_{\alpha\beta} - R_\beta R' W_\alpha W_{\alpha\beta} - R_\alpha R' W_\alpha W_\beta F'_\beta - R R'_\beta W_\alpha W_\beta F'_\alpha \\ &= F F'_{\alpha\beta}\,(1 - R R'), \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung $F' = \lg F$ gesetzt wird. Die Funktionen R und R' sind also an einander allein durch die Bedingung gebunden, daß in dem Ausdrucke für z_1 unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential steht, d. h. durch die Gleichung (82), außerdem aber mit W durch die Gleichung (84b) verkettet, die eine Folge der übrigen Gleichungen sein muß.

Wir betrachten als Beispiel die Flächen, welche auf eine Ebene abwickelbar sind. Da sie das Krümmungsmaß Null haben, ist nach (28): $(\lambda, \mu) = 0$, also μ eine Funktion von λ, ferner nach (80) auch $(\Phi, \Psi) = 0$, also Ψ eine Funktion von Φ, ferner $F = \text{Const.}$, also nach (36):

$$(85)\quad W_{\alpha\alpha} W_{\beta\beta} - W_{\alpha\beta}^2 = 0,$$

ferner nach (19):

(86) $$W_\alpha W_\beta \cos^2 \omega' = \text{Const.} = C,$$

und durch Differentiation:

(86 a) $$W_{\alpha\alpha} W_\beta + W_\alpha W_{\alpha\beta} = \frac{2\,C \sin \omega'}{\cos^3 \omega'} \cdot \omega'_\alpha, \qquad W_{\alpha\beta} W_\beta + W_\alpha W_{\beta\beta} = \frac{2\,C \sin \omega'}{\cos^3 \omega'} \cdot \omega'_\beta,$$

folglich:

(86 b) $$(\omega', W_\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad (\omega', W_\beta) = 0,$$

d. h. W_α und W_β sind einzeln Funktionen von ω':

(87) $$W_\alpha = \psi(\omega'), \qquad W_\beta = \psi_1(\omega'),$$

(87 a) $$\psi'_1(\omega')\,\omega'_\alpha = \psi'(\omega')\,\omega'_\beta.$$

Dies ist eine partielle Gleichung erster Ordnung für ω', welche ergibt:

(88) $$\alpha\,\psi'_1(\omega') + \beta\,\psi'(\omega') = \chi(\omega'),$$

wo χ eine weitere willkürliche Funktion bezeichnet und wo nach (86)

$$\psi(\omega') \cdot \psi_1(\omega') \cdot \cos^2 \omega' = C.$$

Durch die Gleichungen (87) und (88) sind W und ω' als Funktionen von α, β definiert; λ und μ ergeben sich dann aus (15) und (15 a), wobei die Beziehung $\lambda - \mu = 2\,\omega'$ zu beachten ist. Es ist W bestimmt durch

$$W = \int [\psi(\omega')\,d\alpha + \psi_1(\omega')\,d\beta]$$

und hier steht wegen (87 a) unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential. Für die Biegungsflächen haben wir nach (82) R und R' aus der Gleichung

(89) $$R_\beta\,\psi(\omega') + R'_\alpha\,\psi_1(\omega') + (R + R')\,\psi'(\omega')\,\omega'_\beta = 0$$

zu bestimmen, was nach den Entwicklungen von § 9 geschehen kann; dabei ist

(90) $$R R' W_\alpha W_\beta \cos^2 \mathfrak{W}' = C = W_\alpha W_\beta \cos^2 \omega'.$$

Hier sind wegen (83 b) $R W_\alpha$ und $R' W_\beta$ partielle Differentialquotienten einer Funktion z_1 und diese muß der Gleichung (84) genügen, welche sich wegen $F^* =$ Konst. auf

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \alpha^2}\,\frac{\partial^2 z_1}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right)^2 = 0$$

reduziert. Für $R W_\alpha$ und $R' W_\beta$ bestehen also dieselben Gleichungen, wie oben unter (87) für W_α und W_β; d. h. diese Ausdrücke sind Funktionen einer Funktion $\mathfrak{W}$ (die an Stelle von ω tritt); und folglich ist

$$(R W_\alpha,\ R' W_\beta) = 0,$$

oder entwickelt:

$$R R' (W_\alpha, W_\beta) + W_\alpha R' (R, W_\beta) + W_\beta R (W_\alpha, R') + W_\alpha W_\beta (R, R') = 0.$$

Diese Gleichung aber ist für unseren Fall mit obiger Gleichung (84 b) identisch.

Eine weitere Eigenschaft der Differentialgleichung (36) ist dadurch gegeben, daß sie ungeändert bleibt, wenn man α durch eine Funktion A von α und β durch eine Funktion B von β und $F(\alpha, \beta)$ durch $F(A, B)\, A' B'$ ersetzt, wie aus der geometrischen Bedeutung hervorgeht.

Durch Aufstellung aller Biegungsflächen einer gegebenen Fläche ist auch die Lösung anderer Differentialgleichungen gegeben, auf die das Problem zurückgeführt werden kann. Es gilt dies insbesondere von der Gleichung:

$$\varrho' \varrho'' \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + (\varrho' + \varrho'') \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0\,,$$

auf welche Weingarten das Problem zurückgeführt hat[1]) und in der ϱ', ϱ'' die Krümmungsradien der gegebenen Fläche bezeichnen, während u, v die Parameter von Kurvensystemen sind, durch die das Quadrat des Linienelementes auf die Form

$$ds^2 = du^2 + 2p\, du\, dv + 2q\, dv^2$$

gebracht wird. Zur Einführung dieser Parameter ist zuvor eine gewöhnliche Differentialgleichung zu lösen, durch welche u, v auf α, β zurückgeführt werden.

§ 11. **Die Biegungsflächen der Ebene.**

Um alle auf die Ebene abwickelbaren Flächen zu erhalten, genügt es, von einer solchen auszugehen. Wir wählen den geraden Kreiszylinder mit dem Radius a, dargestellt durch die Gleichungen

$$x = a \cos(\alpha + \beta), \qquad y = a \sin(\alpha + \beta), \qquad z = i a (\alpha - \beta) = W$$

$$d s^2 = 4 a^2\, d\alpha\, d\beta = 2 F\, d\alpha\, d\beta = 4 \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} \cos^2 \frac{\lambda - \mu}{2} \cdot d\alpha\, d\beta\,.$$

Bei Anwendung der Formeln von § 5 hat man $F_1 = a$, also $\Phi = i a (\alpha - \beta)$ zu setzen und:

$$\operatorname{tg} \lambda = -\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} \mu\,, \quad \cos w = 1\,, \quad \sin w = 0\,, \quad w = 0\,,$$

$$\lambda = \mu = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\,,$$

und nach (44):

$$x = \int [-a \sin(\alpha + \beta)\, d\alpha - a \sin(\alpha + \beta)\, d\beta]\,,$$

$$y = \int [-a \cos(\alpha + \beta)\, d\alpha - a \cos(\alpha + \beta)\, d\beta]\,, \qquad z = i a (\alpha - \beta).$$

Da hier $W_{\alpha\beta} = 0$ und $W_\alpha = -W_\beta$ ist, so folgt aus (82):

$$R = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\,, \qquad R' = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\,, \tag{91}$$

wenn Ω eine reelle Funktion von α und β bezeichnet, also aus (81)

$$\cos \omega' = \cos \frac{\Phi - \Psi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Omega_\alpha \Omega_\beta}}\,.$$

---

[1]) Comptes rendus t. CXII, 1891; vgl. Darboux, a. a. O. t. 4, p. 308 ff.

Hierdurch ist $\Phi - \Psi = \mathfrak{W}$ bestimmt, und die Gleichungen (79) werden:

$$\Psi_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\partial \lg \Omega_\alpha}{\partial \alpha} \operatorname{cotg} \mathfrak{W}', \qquad \Psi_\beta = -\frac{1}{2}\frac{\partial \lg \Omega_\alpha}{\partial \beta} \operatorname{cotg} \mathfrak{W}',$$

$$\Phi_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg \Omega_\beta}{\partial \alpha} \operatorname{cotg} \mathfrak{W}', \qquad \Phi_\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg \Omega_\beta}{\partial \beta} \operatorname{cotg} \mathfrak{W}'.$$

In der Gleichung (84 b) wird infolge von (91):

$$\Omega_{\alpha\alpha}\,\Omega_{\beta\beta} - \Omega_{\alpha\beta}^2 = 0,$$

in Übereinstimmung mit (85). Da hier $\omega' = 0$ ist, so ergibt sich aus (90):

(92) $$\Omega_\alpha\,\Omega_\beta \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}' = C;$$

es können folglich dieselben Betrachtungen Platz greifen, wie oben im Anschlusse an Gleichung (86); d. h. ersetzt man in (86 a) W durch Ω, ω' durch $\mathfrak{W}'$, so ergibt sich, daß Ω_α und Ω_β Funktionen von $\mathfrak{W}'$ sind,

(93) $$\Omega = \int [\psi(\mathfrak{W}')\,d\alpha + \psi_1(\mathfrak{W}')\,d\beta],$$

wobei

(93 a) $$\begin{gathered} \psi(\mathfrak{W}') \cdot \psi_1(\mathfrak{W}') \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}' = 2\,a^2, \\ \alpha\,\psi_1'(\mathfrak{W}') + \beta\,\psi'(\mathfrak{W}') = \chi(\mathfrak{W}'), \end{gathered}$$

wenn ψ und χ willkürliche Funktionen bezeichnen. Damit sind die in § 10 aufgestellten Gleichungen wieder gewonnen. Dort wurden sie erhalten, indem wir von der Forderung eines verschwindenden Krümmungsmaßes ausgingen. Jetzt ergeben sie sich als Folge unserer allgemeinen Lösung des Problems, die Biegungsflächen einer gegebenen Fläche (hier des geraden Kreiszylinders) anzugeben; aber sie erscheinen doch als ein Ausnahmefall dieser allgemeinen Formeln. Nach letzteren nämlich sind R und R' allein an die Gleichung (82) gebunden, und diese ergibt hier das in (91) gegebene Resultat; aber im Falle des Kreiszylinders bleibt Ω nicht willkürlich, sondern infolge von (92) sind Ω_α und Ω_β Funktionen einer Funktion $\mathfrak{W}'$ von α und β, und dies bedingt die weitere Einschränkung der Funktion Ω, wie sie in (93) und (93 a) erhalten wurde. Diese Ausnahme kann offenbar auch nur dann eintreten, wenn die Fundamentalgröße F gleich einer Konstanten ist.

Als Beispiel nehmen wir die Fläche der Tangenten der gemeinen Schraubenlinie auf dem Zylinder mit Radius a, dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = a \operatorname{cosin}\varphi - r\sin\varphi \cdot \sin\gamma, \qquad y = a\sin\varphi + r\operatorname{cosin}\varphi\cdot\sin\gamma,$$

$$z = a\cdot\varphi\cdot\operatorname{cotg}\gamma + r\operatorname{cosin}\gamma,$$

also

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{a}{\sin\gamma}\,d\varphi + dr\right)^2 + r^2\sin^2\gamma\,d\varphi^2 \\ &= [(A+Br)\,d\varphi + dr]\,[(A-Br)\,d\varphi + dr], \end{aligned}$$

wenn

$$A = \frac{a}{\sin\gamma}, \qquad B = i\sin\gamma.$$

Wir setzen:

$$\sqrt{2}\,d\alpha = d\varphi + \frac{dr}{A+Br}, \qquad \sqrt{2}\,d\beta = d\varphi + \frac{dr}{A-Br},$$

$$\sqrt{2}\,\alpha = \varphi + \frac{1}{B}\lg(A+Br), \qquad \sqrt{2}\,\beta = \varphi - \frac{1}{B}\lg(A-Br),$$

$$\sqrt{2}\,(\alpha-\beta) = \frac{1}{B}\lg(A+Br)(A-Br),$$

$$ds^2 = 2\,(A^2-B^2r^2)\,d\alpha\,d\beta = 2\,e^{\sqrt{2}(\alpha-\beta)B}\,d\alpha\,d\beta = d\alpha'\,d\beta',$$

wenn: $\sqrt{2}\,B\alpha = \lg(\sqrt{2}\,B\alpha')$, $\sqrt{2}\,B\beta = -\lg(\sqrt{2}\,B\beta')$, und hieraus:

$$B^2r^2 = A^2 - 2B^2\alpha'\beta', \qquad 2\varphi = \frac{1}{B}\lg\frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{1}{B}\lg\frac{A+Br}{A-Br}.$$

Es wird so, wenn wieder α, β statt α', β' geschrieben wird:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha'} = \left[\frac{1}{B\alpha'} + \left(\frac{1}{A+Br} + \frac{1}{A-Br}\right)\frac{\partial r}{\partial \alpha'}\right]\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cosin}\gamma\,\frac{\partial r}{\partial \alpha'},$$

$$= \frac{1}{B\alpha'}\operatorname{cotg}\gamma + \left(\frac{2A}{A^2-B^2r^2}\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cosin}\gamma\right)\frac{\partial r}{\partial \alpha'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \beta'} = \frac{-1}{B\beta'}\operatorname{cotg}\gamma + \left(\frac{2A}{A^2-B^2r^2}\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cosin}\gamma\right)\frac{\partial r}{\partial \beta'}.$$

Nun sollten Ω_α, Ω_β Funktionen einer Funktion von α und β sein; in der Tat wird, wenn man $\lg\alpha' = \mathfrak{a}$, $\lg\beta' = \mathfrak{b}$ setzt:

$$\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{a}} = \Omega_{\mathfrak{a}} = \text{Funktion von } e^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \beta} = \Omega_{\mathfrak{b}} = \text{Funktion von } e^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}},$$

wie es sein sollte. Es ist nur zu beachten, daß aus den Gleichungen (86 b) allgemein hätte geschlossen werden können:

$$W_\alpha = \psi(\omega')\cdot A, \qquad W_\beta = \psi_1(\omega')\cdot B,$$

wo A und B Funktionen bezw. von α und β bedeuten. Es braucht dies aber kaum betont zu werden, da das Einführen dieser Funktionen an der geometrischen Bedeutung nichts ändert. Die Funktion $\Phi-\Psi$ hat man aus der Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha'}\frac{\partial z}{\partial \beta'}\operatorname{cosin}^2\frac{\Phi-\Psi}{2} = 1$$

zu berechnen, und sodann Φ, Ψ aus (79) durch Quadraturen zu bestimmen.

§ 12. Die Biegungsflächen der Minimalflächen.

Für die (durch die Bedingung $R_1 + R_2 = 0$ charakterisierten) Minimalflächen findet man aus (27): $W_{\alpha\beta} = 0$. Nach (15) und (15a) ist jetzt λ eine Funktion von α allein, μ eine Funktion von β allein; man kann also setzen:

$$W = A + B\,, \qquad \lambda = 2\,\alpha\,, \qquad \mu = 2\,\beta\,, \tag{94}$$

wo A und B bezw. Funktionen allein von α und allein von β bezeichnen. Die Formeln (17) geben dann:

$$(95)\qquad \begin{aligned} x &= i\int\Big[\cos 2\,\alpha\cdot A'\,d\alpha - \cos 2\,\beta\cdot B'\,d\beta\Big],\\ y &= i\int\Big[\sin 2\,\alpha\cdot A'\,d\alpha - \sin 2\,\beta\cdot B'\cdot d\beta\Big], \qquad z = A + B. \end{aligned}$$

Man leitet hieraus leicht die bekannten Enneper'schen Formeln ab, die auch Weierstrass aufgestellt hat.

Die Differentialgleichung (82) wird hier:

$$A'\,\frac{\partial R}{\partial\beta} + B'\,\frac{\partial R'}{\partial\alpha} = 0 \qquad \text{oder:} \qquad \frac{\partial R}{\partial B} = -\frac{\partial R'}{\partial A}$$

also:

$$R = \frac{\partial P(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\cdot\frac{1}{A'} = P_A\,, \qquad R' = -\frac{\partial P(\alpha\beta)}{\partial\beta}\cdot\frac{1}{B'} = -P_B\,, \tag{96}$$

wenn $P(\alpha,\beta)$ eine willkürliche Funktion von α, β bezeichnet, also nach (81):

$$\cos \mathfrak{W}' = \cos\frac{1}{2}(\Phi - \Psi) = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sqrt{-P_A P_B}}\,,$$

sodann aus (79), da $\lambda_\beta = 0$, $\mu_\alpha = 0$ ist:

$$(97)\qquad \begin{aligned} \Phi &= -i\int\frac{\partial\lg P_A}{\partial\beta}\,\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sqrt{P_A P_B + \cos^2(\alpha-\beta)}}\,d\beta\\ &= -i\int\Big[2\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta) + \frac{\partial\lg P_A}{\partial\alpha}\Big]\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sqrt{P_A P_B + \cos^2(\alpha-\beta)}}\cdot d\alpha\,,\\ \Psi &= i\int\frac{\partial\lg P_B}{\partial\alpha}\,\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sqrt{P_A P_B + \cos^2(\alpha-\beta)}}\,d\alpha\\ &= i\int\Big[2\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta) - \frac{\partial\lg P_B}{\partial\beta}\Big]\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sqrt{P_A P_B + \cos^2(\alpha-\beta)}}\cdot d\beta\,. \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Punkte der allgemeinsten Biegungsfläche der Minimalfläche (95) sind dodann nach (83):

$$
(98)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= \int\left[\frac{\partial P}{\partial \alpha}\cdot\operatorname{cosin}\Phi\cdot d\alpha - \frac{\partial P}{\partial \beta}\cdot\operatorname{cosin}\Psi\cdot d\beta\right],\\
y_1 &= \int\left[\frac{\partial P}{\partial \alpha}\cdot\sin\Phi\cdot d\alpha - \frac{\partial P}{\partial \beta}\sin\Psi\cdot d\beta\right],\\
z_1 &= i\int\left[\frac{\partial P}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial P}{\partial \beta}\,d\beta\right],
\end{aligned}
$$

wo Φ und Ψ durch (97) definiert sind; dabei bedeutet P eine rein imaginäre Funktion von α und β. Wählt man insbesondere, wenn c eine Konstante bezeichnet,

$$P = e^{ic} A - e^{-ic} B, \qquad \text{also } P_A = e^{ic},\ P_B = -e^{-ic},$$

so ergeben sich die Bonnet'schen Biegungsflächen der Minimalfläche (95), die selbst wieder Minimalflächen sind, in der bekannten Form:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= i\int[e^{ic}\cdot\operatorname{cosin}2\alpha\cdot A'\,d\alpha - e^{-ic}\operatorname{cosin}2\beta\cdot B'\,d\beta],\\
y_1 &= i\int[e^{ic}\sin2\alpha\cdot A'\,d\alpha - e^{-ic}\sin2\beta\,.\,B'\,d\beta],\\
z_1 &= \int[e^{ic}A'\,d\alpha + e^{-ic}B'\,d\beta],
\end{aligned}
$$

indem hier Φ und Ψ aus den in (97) an dritter Stelle angegebenen Integralen zu berechnen sind.

Wählt man z. B. $W = -ia\,(\alpha-\beta)$, wo a eine Konstante bedeutet, so geben die Gleichungen (95):

$$
\begin{aligned}
x &= a\int[\operatorname{cosin}2\alpha\,d\alpha + \operatorname{cosin}2\beta\,d\beta] = -a\cdot\operatorname{cosin}(\alpha+\beta)\operatorname{cosin}(\alpha-\beta),\\
y &= a\int[\sin2\alpha\,d\alpha + \sin2\beta\,d\beta] = a\sin(\alpha+\beta)\operatorname{cosin}(\alpha-\beta),\\
z &= -ia\,(\alpha-\beta).
\end{aligned}
$$

Es ist dies eine Rotationsfläche, bei der in den Formeln (38b) $F_1(\alpha-\beta) = a\operatorname{cosin}(\alpha-\beta)$ gesetzt ist, wenn man noch x mit $-x$ vertauscht, und folglich $\Phi' = -ia$; die Gleichung der Meridiankurven ist

$$x^2 + y^2 = a^2\operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta)\,,$$

also:
$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{\frac{z}{a}}\right):$$

die Rotationsfläche der Kettenlinie. Die allgemeinsten Biegungsflächen des Katenoids sind daher durch die Gleichungen (98) dargestellt, wenn man in (97) A durch $-ia\alpha$, B durch $ia\beta$ ersetzt.

Die Biegungsflächen des Katenoids sind bekanntlich die Evolutenflächen der Flächen konstanter mittlerer Krümmung und der Flächen von negativem konstantem Krümmungsmaße (vgl. § 13).

§ 13. Die Biegungsflächen der Kugel.

Hier ist nach (52), $\lambda = \frac{\pi}{2} - 2\beta$, $\mu = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, $W = i\,\mathrm{tg}\,(\alpha - \beta)$. Die Differentialgleichung (82) wird:

$$\frac{\partial R}{\partial \beta} - \frac{\partial R'}{\partial \alpha} - 2\,(R + R')\,\mathrm{tg}\,(\alpha - \beta) = 0\,,$$

also wenn $R = G\,(\alpha, \beta)$ beliebig gegeben ist:

$$\frac{\partial R'}{\partial \alpha} + 2\,R' \cdot \mathrm{tg}\,(\alpha - \beta) = G_\beta - 2\,G \cdot \mathrm{tg}\,(\alpha - \beta)\,,$$

woraus R' durch Quadratur bestimmt wird. Um symmetrisch zu verfahren, und um sogleich R' zu R konjugiert zu finden, geht man von (82b) aus; man hat

$$R = U + i\,V, \qquad R' = U - i\,V$$

zu setzen; dann ergibt sich:

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{\partial U}{\partial \alpha} + i\left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) - 2\,U \cdot \mathrm{tg}\,(\alpha - \beta) = 0\,.$$

Hieraus bestimmt sich U, wenn V beliebig gegeben ist, oder umgekehrt. Nimmt man z. B. $V = 0$, so kann U gleich einer Funktion $f\,(\alpha - \beta)$ von dem einen Argumente $\alpha - \beta$ werden; und f bestimmt sich durch die Bedingung:

$$f'\,(\alpha - \beta) + f \cdot \mathrm{tg}\,(\alpha - \beta) = 0\,,$$

also $f = C\,\mathrm{cosin}\,(\alpha - \beta)$, wo C eine Konstante bezeichnet. Wählt man $U = 0$, so bleibt nur die Bedingung $V_\alpha + V_\beta = 0$, d. h. V kann eine beliebige Funktion $f\,(\alpha - \beta)$ werden.

Die schon in § 6 behandelten Rotationsflächen konstanter Krümmung erhalten wir nach der allgemeinen Methode des § 9 in folgender Weise: Die Kugel mit Radius 1 sei durch die Gleichungen (51), d. h.

$$x = \frac{\mathrm{cosin}\,(\alpha + \beta)}{\mathrm{cosin}\,(\alpha - \beta)}, \qquad y = \frac{\sin\,(\alpha + \beta)}{\mathrm{cosin}\,(\alpha - \beta)}, \qquad z = i\,\mathrm{tg}\,(\alpha - \beta)$$

dargestellt, so daß: $\lambda = \frac{\pi}{2} - 2\beta$, $\mu = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, $\omega' = \frac{1}{2}\,(\lambda - \mu) = \alpha - \beta$. Bedeutet a eine Konstante, und setzt man

$$u = \frac{\alpha + \beta}{a}, \qquad v = \alpha - \beta\,,$$

so war nach § 6 die zugehörige Rotationsfläche:

$$x_1 = a\,\frac{\mathrm{cosin}\,u}{\mathrm{cosin}\,v}, \qquad y_1 = a\,\frac{\sin u}{\mathrm{cosin}\,v}, \qquad z_1 = i\int \sqrt{a^2 + (1 - a^2)\,\mathrm{cosin}^2\,v}\;\frac{d\,v}{\mathrm{cosin}^2\,v}$$

und es soll sein:

$$\frac{\partial x_1}{\partial a} = \frac{\cos u \cdot \sin v - a \cdot \sin u \cdot \cos v}{\cos^2 v} = R \cos \Phi \cdot \frac{\partial z}{\partial a} = R \cos \Phi \cdot \frac{i}{\cos^2 v},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial a} = \frac{a \cdot \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v}{\cos^2 v} = R \sin \Phi \cdot \frac{\partial z}{\partial a} = R \sin \Phi \cdot \frac{i}{\cos^2 v},$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial a} = \frac{i}{\cos^2 v} \sqrt{a^2 + (1-a^2)\sin^2 v} = i R \frac{\partial z}{\partial a} = -R \frac{1}{\cos^2 v}.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt:

$$\text{(94)} \qquad \operatorname{tg} \Phi = \frac{a + \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} v - a \operatorname{tg} u}, \qquad -R^2 = a^2 + (1-a^2)\cos^2 v,$$

und letzterer Wert stimmt mit der dritten Gleichung überein, so daß

$$R = -i\sqrt{a^2 + (1-a^2)\cos^2 v}, \quad R' = i\sqrt{a^2 + (1-a^2)\cos^2 v}, \quad r^2 = a^2 + (1-a^2)\cos^2 v.$$

Es ist jetzt $\mathfrak{W}' = \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)$ aus der Gleichung (82), d. h.

$$\sqrt{a^2 + (1-a^2)\cos^2 v} \cdot \cos \mathfrak{W}' = \cos(\alpha - \beta) = \cos v$$

zu berechnen, und es ergibt sich

$$\operatorname{cotg} \mathfrak{W}' = \frac{1}{a} \operatorname{cotg} v.$$

Ferner findet man aus der ersten Gleichung (94) durch Differentiation:

$$\Phi_a = \frac{a^2 - 1}{a} \frac{\cos^2 v}{a^2 + (1-a^2)\sin^2 v}.$$

Nach den allgemeinen Formeln (79) soll man haben, (da $\lambda_a = 0$):

$$\Phi_a = \frac{\partial \lg R}{\partial a} \cdot \operatorname{cotg} \mathfrak{W}',$$

und beide Resultate stimmen in der Tat vollkommen überein.

Die Bestimmung aller Flächen konstanter Krümmung führt man bekanntlich sonst auf die Differentialgleichung

$$\text{(94 a)} \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \sin \omega$$

zurück, wo u, v die Parameter der Krümmungslinien bedeuten. Um die Koordinaten der Flächenpunkte zu finden, hat man dann noch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu integrieren. Es hängen dann E und G einfach von ω ab und es ist $F = 0$. Jenes System liefert zunächst die Richtungscosinus der Normalen und aus ihnen findet man x, y, z durch Quadraturen. Die Integration der Gleichung (94 a) hätte nun so zu erfolgen, daß man zuerst die Differentialgleichung der Krümmungskurven auf der Fläche (83) löst und dann E, G durch u, v ausdrückt.

Auf die Gleichung (94 a) führt man nach Enneper[1]) auch die Bestimmung derjenigen Flächen zurück, die sich so biegen lassen, daß Krümmungslinien in Krümmungslinien übergehen.

[1]) Math. Annalen, Bd. 2, 1870; vgl. auch Bonnet, Journal de l'Ecole polytechnique, cah. 42 und Adam, Bulletin de la Société mathématique, t. 23, S. 195.

§ 14. **Unendlich kleine Verbiegungen.**

Die in § 9 gegebene allgemeine Lösung des Problems der Biegung gibt auch von selbst die Lösung des Problems der unendlich kleinen Biegungen einer Fläche. Zu dem Zwecke haben wir zu setzen:

$$x_1 = x + \varepsilon\xi, \qquad y_1 = y + \varepsilon\eta, \qquad z_1 = z + \varepsilon\zeta,$$
$$\Phi = \lambda + \varepsilon\Lambda, \qquad \Psi = \mu + \varepsilon M, \qquad R = i + \varepsilon Q, \qquad R' = -i + \varepsilon Q',$$

und erhalten dann an Stelle der obigen mit gleichen Nummern bezeichneten Gleichungen:

$$(76^*) \qquad \Lambda - M = i(Q' - Q)\operatorname{cotg}\frac{\lambda-\mu}{2},$$

$$(79^*) \qquad \begin{aligned} M_\alpha \cdot \operatorname{tg}\omega' + \frac{\Lambda - M}{2}\,\frac{\mu_\alpha}{\operatorname{cosin}^2\omega'} &= i\,Q'_\alpha, \\ M_\beta \cdot \operatorname{tg}\omega' + \frac{\Lambda - M}{2}\,\frac{\mu_\beta}{\operatorname{cosin}^2\omega'} &= i\,Q'_\beta, \\ \Lambda_\alpha \cdot \operatorname{tg}\omega' + \frac{\Lambda - M}{2}\,\frac{\lambda_\alpha}{\operatorname{cosin}^2\omega'} &= -i\,Q_\alpha, \\ \Lambda_\beta \cdot \operatorname{tg}\omega' + \frac{\Lambda - M}{2}\,\frac{\lambda_\beta}{\operatorname{cosin}^2\omega'} &= -i\,Q_\beta, \end{aligned}$$

$$(82^*) \qquad W_\alpha Q_\beta + W_\beta Q'_\alpha + W_{\alpha\beta}(Q + Q') = 0.$$

Die Funktionen Q und Q' sind also an dieselbe Bedingung gebunden, wie oben die Funktionen R und R'. Aus ihnen findet man $\Lambda - M$ und dann aus (79*) durch Quadraturen die Funktionen Λ und M. So ergibt sich

$$(95) \qquad \begin{aligned} \xi &= \int[(Q\operatorname{cosin}\lambda - i\,\Lambda\cdot\sin\lambda)\,W_\alpha\,d\alpha + (Q'\operatorname{cosin}\mu + i\,M\sin\mu)\,W_\beta\,d\beta], \\ \eta &= \int[(Q\sin\lambda + i\,\Lambda\cdot\operatorname{cosin}\lambda)\,W_\alpha\,d\alpha + (Q'\sin\mu - i\,M\operatorname{cosin}\mu)\,W_\beta\,d\beta], \\ \zeta &= i\int[(Q\,W_\alpha\,d\alpha - Q'\,W_\beta\,d\beta]. \end{aligned}$$

Sind p und q die Parameter der Haupttangentenkurven, so wird das Problem sonst zurückgeführt auf eine Differentialgleichung der Form[1]):

$$(96) \qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial p\,\partial q} = k\cdot\Theta,$$

wo k eine bekannte Funktion von p, q bedeutet, welche sich aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial p\,\partial q} = (k+f)\sqrt{K}$$

bestimmt, wenn f die betr. Fundamentalgröße des sphärischen Bildes der gegebenen Fläche bezeichnet und K durch die Relation

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} = -K^2\cdot f$$

bestimmt wird. Auch die allgemeine Lösung der Gleichung (96) ist durch die vorstehenden Entwicklungen auf Quadraturen zurückgeführt, sobald die Differentialgleichung der Minimalkurven integriert ist.

---

1) Vgl. Darboux, Théorie générale des surfaces, tom. IV, S. 19 ff., sowie eine Abhandlung des Verfassers, die am 2. Juli der bayer. Akademie mitgeteilt wurde und in den Sitzungsberichten erscheinen wird.

§ 15. Die Weingarten'schen Flächen.

Als Weingarten'sche Flächen bezeichne ich diejenigen, zwischen deren Krümmungsradien ϱ, ϱ' eine Relation besteht. Stellt man diese mit Weingarten in der Form

$$\varrho = \Theta(k), \qquad \varrho' = \Theta(k) - k \cdot \Theta'(k)$$

dar, so wird bekanntlich das Quadrat des Linienelementes der einen Schale der Krümmungszentra-Fläche in der Form

$$ds_1^2 = \Theta'(k)^2\, dk^2 + k^2\, d\varphi^2$$

erhalten, und diese Form entspricht nach (38a) der Rotationsfläche

(97) $$x = r \operatorname{cosin} \varphi, \qquad y = r \sin \varphi, \qquad z = f(r),$$

wenn $$k = r, \qquad 1 + f'(r)^2 = \Theta'(k)^2$$

gemacht wird. Alle zugehörigen Evolutenflächen sind so auf eine durch die Funktion $\Theta(k)$ oder $f(r)$ bestimmte Rotationsfläche abwickelbar. Umgekehrt werden alle Weingarten'schen Flächen aus den Biegungsflächen der Rotationsflächen als Evolventenflächen in bekannter Weise erhalten.

Sind u und v die Parameter der Krümmungslinien einer Weingarten'schen Fläche, so muß die partielle Gleichung zweiter Ordnung

(98) $$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k\,\Theta''}{\Theta'^2}\frac{\partial k}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Theta'}{k^2}\frac{\partial k}{\partial v}\right) = \frac{1}{k\,\Theta'}$$

integriert werden, um k als Funktion von u und v zu bestimmen; und dann ergeben sich die Koordinaten der Punkte der Weingarten'schen Fläche durch Quadraturen.

Da man nach § 9 alle Biegungsflächen der Fläche (97) kennt, so ist auch die Integration der Gleichung (98) auf Quadraturen zurückgeführt, sobald man noch u, v durch α, β ausgedrückt hat. Die geodätische Linie $\varphi = \text{Const.}$ der benutzten Biegungsfläche gibt dabei direkt eine Krümmungslinie der abgeleiteten Evolventenfläche; die andere Krümmungslinie wird durch die andere Schale der Evolutenfläche geliefert.

Für Rotationsflächen ist in (82b) nach § 5 die Funktion W durch die Funktion $\Phi(\alpha - \beta)$ zu ersetzen, die wir hier (um eine Verwechslung mit der in § 9 gebrauchten Funktion Φ zu vermeiden) $\chi(\alpha - \beta)$ nennen wollen. So erhalten wir aus (82b)

$$\chi'(\alpha-\beta)\,[U_\beta - U_\alpha - i\,(V_\beta + V_\alpha)] - 2\,U\chi''(\alpha-\beta) = 0,$$

oder, wenn wir die neuen Variabeln

$$u = \alpha + \beta, \qquad i\,v = \alpha - \beta$$

einführen:

$$\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u} - i\,U\,\frac{\chi''}{\chi'} = 0,$$

also, wenn U willkürlich gegeben wird:

$$V = \int \left(i\,U\,\frac{\chi''}{\chi'} - \frac{\partial U}{\partial v}\right) du,$$

oder, da χ'' eine Funktion von v allein ist, wenn $\mathfrak{U} = \int U\,du$ gesetzt wird:

$$V = i\,\frac{\chi''}{\chi'}\cdot\mathfrak{U} - \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial v},\qquad R = \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial u} - i\,\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial v} - \frac{\chi''}{\chi'}\,\mathfrak{U},\qquad R' = \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial u} + i\,\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial v} + \frac{\chi''}{\chi'}\,\mathfrak{U}.$$

Es wird also: $$z_1 = \int [R\,\chi'\,d\alpha + R'\,\chi'\,d\beta]$$

$$= \int\left[\left(\chi'\,\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial u} - i\,\chi'\,\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial v} - \chi''\,\mathfrak{U}\right)d\alpha + \left(\chi'\,\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial u} + i\,\chi'\,\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial v} + \chi''\,\mathfrak{U}\right)d\beta\right],$$

oder, wenn man du und dv einführt:

$$z_1 = \chi'\int\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial u}\,du + \int\chi'\,\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial v}\,dv - i\int\chi''\,\mathfrak{U}\,dv$$

und durch partielle Integration:

$$z_1 = 2\int\chi'\,(iv)\cdot\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial v}\,dv,$$

wo nun $\mathfrak{U}$ eine willkürliche reelle Funktion von α, β bezeichnet.

Das Rotationsparaboloid wird durch die Gleichungen

$$x = 2\,p\,\psi\,(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta),\qquad y = 2\,p\cdot\psi\,(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta),$$
$$z = 2\,p\,\psi\,(\alpha-\beta)^2$$

dargestellt, wo die Funktion ψ so zu bestimmen ist, daß die Gleichung

$$F_1^2 + F_1'^2 + \Phi'^2 = 0$$

erfüllt wird für $F_1 = 2\,p\,\psi$, $\Phi = 2\,p\,\psi^2$; so ergibt sich:

$$\psi\,(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta,\qquad\text{und}\qquad \alpha-\beta = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\operatorname{cosin}\vartheta} - \frac{1}{2}\lg\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Für die auf diese Fläche abwickelbaren Flächen scheinen sich keine einfacheren Resultate zu ergeben; zur Ableitung der von Darboux entdeckten geometrischen Eigenschaften dieser von Weingarten zuerst behandelten Flächen scheinen die Minimalkurven kein geeignetes Hilfsmittel zu geben.

Zusätze: S. 9. Die Gleichung (27) soll lauten:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2\,D'}{i\,F^2} = \frac{-2\,i\,W_\alpha\,\lambda_\beta}{F} = \frac{2\,i\,W_\beta\,\mu_\alpha}{F} = \frac{-2\,i\,W_{\alpha\beta}}{\sin\omega\cdot W_\alpha\,W_\beta}.$$

Die Gleichung (25) läßt sich auch schreiben: $W_\beta\,\lambda_\beta\,d\beta^2 - W_\alpha\,\lambda_\alpha\,d\alpha^2 = 0$. Von den drei Tangentenpaaren der Kurven (25), (26) und der Kurven $d\beta^2 - d\alpha^2 = 0$ ist also jedes zu den beiden anderen harmonisch; vergl. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1905, S. 215 f.

S. 23 Z. 7 v. o. lies $\frac{\partial W_1}{\partial \alpha}$ statt $\frac{\partial W_1}{\partial a}$.

S. 24 Z. 3 v. o. „ $\alpha+\beta$ „ $a+\beta$.

S. 28 ist die Nummer (81a) zu streichen.
