Abhandlungen
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung
Neue Folge. Heft 27
1935

Untersuchungen zur Hecubabewegung und analoger Bewegungsformen

von

A. Wilkens

Vorgelegt in der Sitzung vom 2. Februar 1935

München 1935
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei
in Nördlingen

Inhalt

Einleitung 5

§ 1. Die Differentialgleichungen und die Entwicklung der Störungsfunktion 8

§ 2. Die Entwicklung der Ableitungen der Störungsfunktion und zugehörigen Funktionen in Delaunay-Reihen 11

§ 3. Die Bestimmung der Koeffizienten der Integralreihen 62

§ 4. Die Bestimmung der Integrationskonstanten nebst Kontrollen und Verallgemeinerungen 65

EINLEITUNG.

Die Theorie der Bewegung derjenigen Körper des Sonnensystems, deren mittlere Bewegung sehr nahe in einem niedrigzahligen Verhältnis zu der des großen Planeten Jupiter als hauptsächlich störendem Körper steht, hat seit der Entdeckung des typischsten Vertreters, des Planeten 108 Hecuba im Jahre 1869, bei der Schwierigkeit der mathematischen Behandlung des Problems bis heute eine fast ununterbrochene Anregung zur Untersuchung dieser und analoger für die Mechanik des Himmels so wertvoller Spezialfälle des Dreikörperproblems geboten. Grade der Hecubafall hat die bedeutendsten Theoretiker der Neuzeit, Gyldén und Poincaré, zu ihren wertvollsten Untersuchungen angeregt und insbesondere die Frage nach den strengen Lösungen des Problems wachgerufen; durch die Arbeiten Poincarés über die Fälle der niedrigzahligen Kommensurabilitäten ist durch die Auffindung der periodischen Lösungen eine ganz neue Epoche der Mechanik des Himmels heraufgeführt worden. Eine Reihe wertvollster strenger Ergebnisse, von der Theorie der periodischen Lösungen ausgehend, ist von den Schülern Poincarés erzielt worden, insbesondere von Simonin in seiner Untersuchung „Sur l'orbite d'Hécube" (Annales de l'Observatoire de Nice, Bd. 6), worauf ich sogleich noch ausführlich zurückkommen muß.

Praktisch bietet grade das Sonnensystem eine mannigfache Zahl und Gelegenheit zur Behandlung besonders schwieriger Bewegungsvorgänge, sowohl bei den großen Planeten wie bei den Planetoiden und den Satelliten der großen Planeten, weil eine überraschend große Zahl nahezu kommensurabler Bewegungen vorhanden ist, bis zu dem neuen großen Planeten Pluto in Beziehung zu Uranus und Neptun, worauf ich als einen besonders interessanten, zugleich aber sehr schwierigen Fall einer sogar dreifachen Kommensurabilität in den Astr. Nachr., Bd. 240 (1930) in den „Bemerkungen über den transneptunischen Planeten Pluto" aufmerksam gemacht habe. Denn in diesem Falle verhalten sich die mittleren Bewegungen sehr nahe wie $1:{}^1/_2:{}^1/_3$. Unter den Planetoiden ist neuerdings als nunmehr typischster Vertreter der Hecubagruppe mit dem Verhältnis 2:1 der mittleren Bewegung zu der des Jupiter der Planet 1101 Clematis entdeckt worden, dessen oskulierende mittlere Bewegung $n = 602''\!.2$, so daß die kritische Differenz der mittleren Bewegungen $n - 2n' = +3''\!.9$ beträgt, während bei Hecuba die entsprechende Größe den Betrag von $+19''\!.0$ erreicht. Dazwischen liegt eine große Zahl kritischer Planeten, ebenso wie nach der negativen Seite hin.

Gegenüber den früheren meist komplizierten Untersuchungen nach Gyldéns Methoden z. B. durch Harzer in seiner berühmten Abhandlung „Über einen speziellen Fall des Problems der drei Körper" aus dem Jahre 1886 in den „Mémoires de l'Académie impériale de St. Pétersbourg" hat in neuerer Zeit Simonin in dem 6. Bande der „Annales de Nice" (s. oben) im Anschluß an Poincarés Theorie der periodischen Lösungen eine periodische Bahn als Generatrix angegeben und die Variation dieser Bahn auch mit den Beobachtungen verglichen, wobei die Differenzen zwischen Beobachtung und Theorie während des Vergleichszeitraums von 1869—94 sich auf $\pm 4'$ belaufen. Ich habe aber schon früher in meiner Schrift in den Astr. Nachr. Bd. 195, Nr. 4676 „Über die praktische Verwendung der Poincaréschen periodischen Bahnen im Sonnensystem" auf einen theoretischen Mangel der Simoninschen Methode hingewiesen; es wurde nämlich die Jupitersexzentrizität nicht gleichzeitig mit der des Planeten trotz der störungstheoretischen Gleichwertigkeit beider in allen Typen, bei denen das Verhältnis der mittleren Bewegungen nahe gleich $(i+1):i$ ist, in der Störungsfunktion der Generatrix berücksichtigt, sondern erst in der Variation derselben. Da bei diesen Typen die kritischen Glieder der Störungsfunktion in den Exzentrizitäten e wie e' linear sind, wird deshalb nach Simonins Verfahren besonders die Längenstörung aus einer Generatrix gewonnen, die von vorneweg um ein gleichberechtigtes Glied in e' reduziert ist, so daß die Substitution der aus der Generatrix erlangten Längenstörung in die Variationsgleichungen zu einer theoretisch wie praktisch-numerisch nicht einwandfreien Lösung führen kann. Simonin war zu seinem Verfahren gezwungen, weil bei $e' \neq 0$ die von ihm als Generatrix gewählte periodische Ausgangslösung einer rotierenden Ellipse mit Jupiter und dem Planeten im Perihel, sobald die Körper in Konjunktion sind, nicht mehr existiert; bei einer bei $e' \neq 0$ angenommenen generierenden Ellipse mit festliegendem Perihel beider Planeten ist andererseits beim Hecubatyp die zugehörige Exzentrizität der periodischen Bahn nahezu 0.9, was wiederum für die Praxis unbrauchbar ist. Daraus folgt also, daß im Falle des Hecubatyps praktisch eine strengperiodische Lösung als Generatrix der Variation prinzipiell und strenge nicht anwendbar ist. Deshalb habe ich schon damals in meiner oben zitierten Arbeit einen Weg angedeutet, der die Kalamität bei der Simoninschen Lösung vermeidet. Auch vom Standpunkt der Praxis dürfte es nunmehr geboten sein, diesen Weg zu beschreiten, zumal nachdem der zur Zeit am stärksten kritische Planet 1101 Clematis entdeckt worden ist; auch mit Rücksicht auf die Spezialfälle des Hecubaproblems, zu dem seit einigen Jahren auf der Münchener Sternwarte (s. die Jahresberichte der Münchener Sternwarte in der Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft seit 1926) umfangreiche systematische numerische Quadraturen ausgeführt worden sind, ist zur nunmehrigen theoretischen Diskussion der Ergebnisse der neue Weg mit der unten folgenden Theorie einzuschlagen.

Der Verzicht auf eine periodische Lösung als Generatrix erscheint beim Hecubatypus geboten, und Poincaré selbst hat in einer damals 1907 mit mir wegen der Simoninschen Lösung geführten Korrespondenz eine Erweiterung der Lösung aus den obengenannten prinzipiellen Gründen anerkannt, und zwar in der folgenden Richtung, die ich in meiner obengenannten Arbeit über periodische Lösungen auf S. 386 angegeben habe.

Berücksichtigt man in der Störungsfunktion im Falle derjenigen Planeten, deren mittlere Bewegungen sich zu der des Jupiter allgemein nahe wie zwei aufeinanderfolgende Zahlen $(i+1):i$ verhalten, neben den Säkulargliedern nur die aus dieser genäherten Kommensurabilität entspringenden kritischen Glieder mit den Argumenten

$$\left\{\begin{aligned} \zeta &= il - (i+1)\,l' + \overline{\omega} \\ \zeta' &= il - (i+1)\,l' + \overline{\omega}' \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

wo l, l' die mittleren, $\overline{\omega}$ und $\overline{\omega}'$ die Perihellängen, und nach deren linear kombinierten Vielfachen $A = \alpha\zeta + \beta\zeta'$ $(\alpha n \cdot \beta = 0 \pm 1, \pm 2 \ldots)$ die Störungsfunktion, wie aus ihren allgemeinen Eigenschaften leicht zu ersehen ist (s. unten) fortschreitet, so wird, wenn noch Ω_0 den allgemeinen von vorneweg mitberücksichtigten Säkularteil bezeichnet:

$$\Omega = \Omega_0 + \Sigma_{\alpha,\beta}\, \Omega_{\alpha,\beta} \cos(\alpha\zeta + \beta\zeta'), \tag{2}$$

wo Ω_0 und $\Omega_{\alpha,\beta}$ bekannte Funktionen der großen Halbachsen a und a' sowie der Exzentrizitäten e und e' des gestörten resp. störenden Körpers sind. Simonin gibt nun in seiner Generatrix, also bei $e' = 0$, also bei Nichtvorkommen von ζ' in Ω dem kritischen Längengliede nach dem Vorgange von Delaunay die Form: $\zeta = \zeta_0 + \Sigma\, 2\, Z_\alpha \sin \alpha\zeta_0$, wo $\zeta_0 = z_0 + z_1 t$ und z_0 und z_1 Konstanten und t die Zeit fixieren. Nimmt man aber $e' \neq 0$ an, so daß neben dem Argument ζ auch ζ' und die linearen Verbindungen von ζ und ζ' zum Vorschein kommen, so gebe ich der entsprechend erweiterten Lösung die auf 2 Argumente erweiterte Form:

$$\text{(3)}\quad \begin{Bmatrix} \zeta = \zeta_0 + \Sigma\, 2\, Z_{\alpha\beta} \sin(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0') \\ \zeta' = \zeta_0' + \Sigma\, 2\, Z'_{\alpha\beta} \sin(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0') \end{Bmatrix}, \quad \text{wo} \quad \text{(4)}\quad \begin{Bmatrix} \zeta_0 = z_0 + z_1 \cdot t \\ \zeta_0' = z_0' + z_1' \cdot t \end{Bmatrix}$$

und z_0 und z_0' 2 Integrationskonstanten, dagegen z_1 und z_1' und die Koeffizienten $Z_{\alpha,\beta}$ $n \cdot Z'_{\alpha,\beta}$ zu ermittelnde Unbekannte sind.

Analog lauten die Lösungen der Differentialgleichungen für die halbe große Achse a und die Exzentrizität e:

$$\begin{Bmatrix} a = a_0 + a_0 \Sigma\, 2\, A_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0') \\ e = e_0 + \quad \Sigma\, 2\, E_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0') \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

wo a_0 und e_0 zwei weitere Integrationskonstanten und der Faktor 2, wie auch schon oben, hinzugefügt worden ist, um mit Rücksicht auf die späteren Produktionsbildungen von Fourierreihen einen Faktor ½ zu vermeiden. Poincaré vertrat in der genannten Korrespondenz mit mir die Auffassung, daß die von mir vorgeschlagene Methode, die einem erweiterten Delaunay-Verfahren entspricht, eine umfangreiche Arbeit verursachen würde. Das war und ist auch meine Ansicht, aber gegenüber der oben formulierten prinzipiellen Forderung nach einer gleichwertigen Behandlung der Exzentrizitäten e und e' ist eine Erweiterung des Formelsystems nicht zu vermeiden; zugleich ist aber der Versuch einer Übertragung allgemeiner Delaunay-Reihen von der Mondtheorie auf das Planetensystem von theoretischer wie praktischer Bedeutung, zumal nunmehr seit der Simoninschen Bearbeitung eine große Zahl neuer nahezu kommensurabler Planeten vom Hecubatypus entdeckt worden ist.

§ 1. Die Differentialgleichungen und die Entwicklung der Störungsfunktion.

Die Behandlung des Problems soll in 2 Teile zerlegt werden, insofern zuerst das ebene Problem, also unter Vernachlässigung der gegenseitigen Neigungen der Bahnebenen von gestörtem und ungestörtem Körper, untersucht werden soll. Die Berücksichtigung der Neigungen soll unabhängig nach einer Methode erfolgen, die ich in den Sitzungsberichten der Preuß. Akademie der Wissenschaften, Berlin 1905, S. 1062 u. f. in der Schrift „Zur Erweiterung eines Problems der Säkularstörungen" und ferner in den Astron. Nachr. 1911, Bd. 188, Nr. 4491 in der Schrift „Über die langperiodischen Veränderungen der Bahnform und Bahnlage der kritischen Planeten" auseinandergesetzt habe.

Die Basis für die Entwicklungen des Problems nach Delaunay-Reihen sollen die Differentialgleichungen der Variation der Konstanten bilden, bezogen auf die große Halbachse a, die Exzentrizität e, die mittlere Länge der Epoche ε und die Perihellänge $\overline{\omega}$ für Hecuba, während die entsprechenden Elemente für den Jupiter gestrichelt sind; dann ist bekanntlich im ebenen Problem:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{da}{dt}=\frac{2}{na}\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{2}{na}\frac{\partial\Omega}{\partial a}+\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2\cdot e}\frac{\partial\Omega}{\partial e}\\ &\frac{de}{dt}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2\cdot e}\frac{\partial\Omega}{\partial\overline{\omega}}-\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2\cdot e}\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}, \quad \frac{d\overline{\omega}}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2\cdot e}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial e}\end{aligned}\right\}.$$

Ich habe diese Gleichungen als Ausgangsform der Lösung gewählt, weil die entsprechende Entwicklung der Störungsfunktion Ω von Le Verrier fertig entwickelt in den „Annales de l'Observatoire de Paris" vorliegt. Die Störungsfunktion Ω besteht aus den folgenden säkularen und kritischen Gliedern, und zwar bis zu den Gliedern 4. Grades der Exzentrizitäten einschließlich, damit die rechten Seiten der Differentialgleichungen vollständig einheitlich bis zum 2. Grade der Exzentrizitäten einschließlich entwickelt werden können. Unter Benutzung der Le Verrierschen Darstellung im 10. Bande der „Annales de l'Observatoire de Paris" ergibt sich dann die folgende Entwicklung der Störungsfunktion:

$$\begin{aligned}(7)\qquad \Omega = k^2m' [&F_0 + F_1(e^2+e'^2) - F_2 e\cos\zeta + F_3 e^2\cos 2\zeta + F_4 e'\cos\zeta' - F_5 ee'\cos(\zeta+\zeta')\\ &+ F_6 ee'\cos(\zeta-\zeta') + F_7 e'^2\cos 2\zeta' + F_8 e^3\cos\zeta + F_9 ee'^2\cos\zeta + F_{10}e^2e'\cos\zeta'\\ &+ F_{11}e'^3\cos\zeta' + F_{12}e^2e'\cos(2\zeta-\zeta') + F_{13}ee'^2\cos(\zeta-2\zeta') + F_{14}e^3\cos 3\zeta\\ &+ F_{15}e^2e'\cos(2\zeta+\zeta') + F_{16}ee'^2\cos(\zeta+2\zeta') + F_{17}e'^3\cos 3\zeta' + F_{18}e^4 + F_{19}e^2e'^2\\ &+ F_{20}e^3e'\cos(\zeta-\zeta') + F_{21}ee'^3\cos(\zeta-\zeta') + F_{22}e^2e'^2\cos(2\zeta-2\zeta') + F_{23}e^4\cos 2\zeta\\ &+ F_{24}e^2e'^2\cos 2\zeta + F_{25}e^3e'\cos(\zeta+\zeta') + F_{26}ee'^3\cos(\zeta+\zeta') + F_{27}e^2e'^2\cos 2\zeta'\\ &+ F_{28}e^3e'\cos(3\zeta-\zeta') + F_{29}ee'^3\cos(\zeta-3\zeta') + F_{30}e^4\cos 4\zeta + F_{31}e^3e'\cos(3\zeta+\zeta')\\ &+ F_{32}e^2e'^2\cos(2\zeta+2\zeta') + F_{33}ee'^3\cos(\zeta+3\zeta')]\end{aligned}$$

unter Weglassung der in e'^4 multiplizierten Glieder, weil sie bei der festgesetzten Beschränkung der rechten Seiten der Differentialgleichungen bei der Differentiation von Ω fortfallen, ebenso wie F_{11} und F_{17}. Die nur von den großen Halbachsen abhängigen Koeffizienten F_i haben die folgende Bedeutung, wobei die A_n^i die Laplaceschen Transzendenten sind:

(8)
$$F_0 = \frac{1}{2} A^0, \qquad F_1 = \frac{1}{4}(A_1^0 + A_2^0), \qquad F_2 = \frac{1}{2}(4 A_0^2 + A_1^2)$$

$$F_3 = \frac{1}{4}(22 A^4 + 7 A_1^4 + A_2^4), \qquad F_4 = \frac{1}{2}\left(3 A^1 + A_1^1 - 4 \frac{a}{a'^2}\right)$$

$$F_5 = \frac{1}{4}(42 A^3 + 14 A_1^3 + 2 A_2^3), \qquad F_6 = \frac{1}{2}(A^1 - A_1^1 - A_2^1)$$

$$F_7 = \frac{1}{4}(19 A^2 \; 7 A_1^2 + A_2^2), \qquad F_8 = \frac{1}{8}(14 A_2 + 2.5 A_1^2 - 6 A_2^2 - 3 A_3^2$$

$$F_9 = \frac{1}{8}(64 A^2 + 6 A_1^2 - 16 A_2^2 - 6 A_3^2) \text{ und bei analoger Form:}$$

$$F_{10} = \frac{1}{8}\left(-12 A^1 + 4 \quad + 14 \quad + 6 \quad + 8 \frac{a}{a'^2}\right)$$

$$F_{11} = \frac{1}{8}\left(-14 A^1 + 2 \quad + 9 \quad + 3 \quad + 12 \frac{a}{a'^2}\right)$$

$$F_{12} = \frac{1}{8}(-52.5 A^3 - 9.5 \quad + 7 \quad + 3 \quad)$$

$$F_{13} = \frac{1}{8}(0 \cdot A^0 - 5 \quad - 8 \quad - 3 \quad)$$

$$F_{14} = \frac{1}{8}(-134 A^6 - 46.5 \quad - 10 \quad - 1 \quad)$$

$$F_{15} = \frac{1}{8}(+412.5 A^5 + 145.5 \quad + 31 \quad + 3 \quad)$$

$$F_{16} = \frac{1}{8}(-416 A^4 - 151 \quad - 32 \quad - 3 \quad)$$

$$F_{17} = \frac{1}{8}(+136 A^3 + 52 \quad + 11 \quad + 1 \quad), \qquad F_{18} = \frac{3}{16}(A_3^0 + A_4^0)$$

$$F_{19} = \frac{1}{8}(A_1^0 + 7 A_2^0 + 12 A_3^0 + 6 A_4^0)$$

$$F_{20} = -\frac{1}{8}(2 A_2^1 + 9 A_3^1 + 6 A_4^1)$$

$$F_{21} = \frac{1}{8}(A_0^1 - 1 \quad - 11 \quad - 15 \quad - 6 \quad)$$

$$F_{22} = \frac{3}{16}(A_0^2 - 1 \quad + 1 \quad + 4 \quad + 2 \quad)$$

$$F_{23} = \frac{1}{16}(-198\,{}^2/_3\,A^4 - 70\,{}^2/_3 \quad + 8 \quad + 16 \quad + 4 \quad)$$

$$F_{24} = \frac{1}{16}(-1408\,A^4 - 390 \quad + 42 \quad + 60 \quad + 12 \quad)$$

$$F_{25} = \frac{1}{16}(+462\,A^3 + 138 \quad - 54 \quad - 54 \quad - 12 \quad)$$

$$F_{26} = \frac{1}{16}(1074\,A^3 + 270 \quad - 78 \quad - 66 \quad - 12 \quad)$$

$$F_{27} = \frac{1}{16}(-304\,A^2 - 60 \quad + 84 \quad + 60 \quad + 12 \quad)$$

$$F_{28} = \frac{1}{16}(+570\,A^5 + 168\,{}^2/_3 \quad - 2 \quad - 18 \quad - 4 \quad)$$

$$F_{29} = \frac{1}{16}\left(+47\,{}^1/_3\,A^1 - 4\,{}^2/_3 \quad - 38 \quad - 22 \quad - 4 \quad - 42\,{}^2/_3\,\frac{a}{a'^2}\right)$$

$$F_{30} = \frac{1}{16}\left(+\frac{2570}{3}A^8 + \frac{932}{3} \quad + 80 \quad + 13 \quad + 1 \quad\right)$$

$$F_{31} = \frac{1}{16}\left(-3640\,A^7 - \frac{3992}{3} \quad - 340 \quad - 54 \quad - 4 \quad\right)$$

$$F_{32} = \frac{1}{16}(+5757\,A^6 + 2131 \quad + 541 \quad + 84 \quad + 6 \quad)$$

$$F_{33} = \frac{1}{16}\left(-\frac{12010}{3}A^5 - \frac{4534}{3} \quad - 382 \quad - 58 \quad - 4 \quad\right)$$

Daß die kritischen Argumente der trigonometrischen Funktionen nur aus den Summen der Vielfachen von $\zeta = l - 2\,l' + \overline{\omega}$ und $\zeta' = l - 2\,l' + \overline{\omega}'$ bestehen, folgt daraus, daß das Argument in Abhängigkeit von l, l', $\overline{\omega}$ und $\overline{\omega}'$ allgemein von der Form ist: $A = \alpha(l - 2\,l') + i\overline{\omega} + i'\,\overline{\omega}'$, wo i und $i' = 0, \pm 1, \pm 2, ---$, so daß gemäß den Eigenschaften der Störungsfunktion in bezug auf die Koeffizienten der l, l' $\overline{\omega}$, und $\overline{\omega}'$ sein muß: $-\alpha + i + i' = 0$, also $i' = \alpha - i$. Da nun identisch auch $A = \alpha\,(l - 2\,l') + \alpha\overline{\omega} - \alpha\overline{\omega} + i\overline{\omega} + i'\overline{\omega}' = \alpha\zeta - (\alpha - i)\,\overline{\omega} + i'\,\overline{\omega}'$ oder bei Substitution von $\alpha - i = i'$: $A = \alpha\zeta - i'\,(\overline{\omega} - \overline{\omega}')$. Da andererseits nun nach den Definitionen (1) $\overline{\omega} - \overline{\omega}' = \zeta - \zeta'$, so wird schließlich $A = \alpha\zeta + \beta\zeta'$, q. e. d. Die Säkularglieder, die alle das Argument $A_s = k\,(\overline{\omega} - \overline{\omega}')$ haben, wo $k = 0, 1, 2, ---$, haben also die spezielle Form $As = k\,(\zeta - \zeta')$, d. h. es ist $\beta = -\alpha$.

Was nun die Lösung der Differentialgleichungen (6) durch die Reihen der Form (3) und (5) betrifft, so ist prinzipiell zu bemerken, daß diese Reihen keine absolut, sondern nur halbkonvergente Reihen sind, wie die meisten Reihen der Störungstheorie, gemäß den Beweisen Poincarés; aber sie sind wie alle sonstigen Reihen dieser Art praktisch von hoher, weil zeitlich weitreichender Genauigkeit, wie die astronomische Praxis bisher aus dem Vergleich zwischen Theorie und Praxis hat schließen können. . . . Erst für ganz große Zeiträume wäre das Restglied zu berechnen, was ich mir vorbehalte. Eine etwas vermehrte

Arbeit konnte mich nicht davon abhalten, die grundsätzlich wertvolle und nützliche Methode der Delaunay-Reihen der Anwendung zuzuführen. Auch Charlier teilt im 2. Bande seiner Mechanik des Himmels meine Auffassung, daß die Delaunay-Methode sich besonders in ihrer Übertragung auf die kommensurablen Bewegungen im Planetensystem als sehr tauglich erweisen werde (dort S. 437).

§ 2. Die Entwicklung der Ableitungen der Störungsfunktion und zugehöriger Funktionen nach Delaunay-Reihen.

Die Bestimmung der Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ und $Z'_{\alpha\beta}$ sowie der Zeitfaktoren z_1 und z'_1 in ζ_0 und ζ'_0 beruht auf dem Vergleich der Koeffizienten von $\frac{\sin}{\cos}(\alpha\zeta_0+\beta\zeta'_0)$ sowie der konstanten Teile auf beiden Seiten der Differentialgleichungen (6). Zu dem Zwecke sind zunächst die aus (6) folgenden Differentialgleichungen für ζ und ζ' zu bilden. Aus den Definitionen (1) folgt für den Hecubatypus, den wir von nun ab allein behandeln wollen, mit Rücksicht darauf, daß $l = \varepsilon + \int n\,dt$:

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{dl}{dt} - 2n' + \frac{d\bar\omega}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + n - 2n' + \frac{d\bar\omega}{dt} \\ \frac{d\zeta'}{dt} &= \frac{dl}{dt} - 2n' \phantom{+ \frac{d\bar\omega}{dt}} = \frac{d\varepsilon}{dt} + n - 2n' \end{aligned}\right\}.$$

Zuerst wäre dann die mittlere Bewegung n in eine Delaunay-Reihe nach ζ_0 und ζ'_0 zu entwickeln. Grundsätzlich werde vorausgeschickt, daß in den Reihen (3) und (5) wie in allen analogen Reihen die Indices α und β so gewählt sein sollen, daß stets $\alpha = 0$ oder $+1$, $+2$, $+3$, — — — ist, während $\beta = 0$ oder ± 1, ± 2, — — — sein soll, wobei, wenn $\alpha = 0$, alsdann β nur positiv sein soll, so daß also nur A_{01}, niemals aber A_{0-1} auftreten kann, was bei den Rechnungen bequemer ist, als α und β jede beliebige Zahl zwischen $-\infty$ und $+\infty$ zu erteilen. Zur Beschränkung, die analytisch wie numerisch von vorneweg geboten erscheint, um die Untersuchung so ökonomisch als nur möglich zu gestalten, mögen die Indices α und β nur bis zu der Absolutzahl 3 laufen, schon dann bestehen die A, E usw. aus je 12 Gliedern, wenn der Index 3 nur in einer einzigen Verbindung benutzt wird, nämlich in A_{30}, E_{30} usw.

Da nach (5) $a_0 = a(1 + A)$ ist, wo $A = \Sigma\, 2 A_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta'_0)$, so wird die mittlere Bewegung des Planetoiden mit der Masse $0 : n = k \cdot a^{-3/2}$, wo k^2 die Gaußsche Konstante, bei Entwicklung nach A bis zur 2. Potenz:

$$(10)\qquad n = n_0\left[1 - \frac{3}{2}\Sigma\, 2A_{\alpha\beta}\cos(\alpha\zeta_0+\beta\zeta'_0) + \frac{15}{8}(\Sigma\, 2A_{\alpha\beta}\cos(\alpha\zeta_0+\beta\zeta'_0))^2 + \cdots\right].$$

wo $n_0 = k \cdot a_0^{-3/2}$. Bei der Ausführung von A^2 als Fourierreihe nach ζ_0 und ζ'_0 werden die Quadrate von $A_{\alpha\beta}$ nur bis zu den Indices ± 1 berücksichtigt, bei den gemischten Produkten $A_{\alpha\beta} \cdot A_{\gamma\delta}$ werden nur noch die Produkte mitgenommen, bei denen nur bei einem Faktor die Indices 2 vorkommen, sonst werden sie vernachlässigt, vorbehaltlich ihrer eventuellen Berücksichtigung nach der numerischen Feststellung ihrer Beträge. Generell werden die Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ und $Z'_{\alpha\beta}$ als klein von der ersten Ordnung, und zwar von derselben Größenordnung wie die Exzentrizitäten e resp. e_0 entsprechend den Ergebnissen Tisserands betrachtet, unter der Annahme einer höheren Ordnung für die Koeffizienten mit höherem Index, entsprechend der Annahme einer Konvergenz der Entwicklungen. Die Doppelfourierreihe (10) für n lautet dann entsprechend.

$$n = n_0(1 + N_{00} + \Sigma\, 2 N_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta'_0), \text{ wobei } N_{00} = \frac{15}{4}(A_{10}^2 + A_{11}^2 + A_{01}^2 A_{1-1}^2) \tag{11}$$

$$2N_{10} = -3A_{10} + \frac{15}{2}(A_{10}A_{20} + A_{11}A_{01} + A_{11}A_{21} + A_{1-1}A_{2-1} + A_{01}A_{1-1})$$

$$2N_{20} = -3A_{20} + \frac{15}{2}\left(\frac{1}{2}A_{10}^2 + A_{11}A_{1-1} + A_{01}A_{21} + A_{01}A_{2-1}\right)$$

$$2N_{30} = -3A_{30} + \frac{15}{2}(A_{10}A_{20} + A_{11}A_{2-1} + A_{1-1}A_{21})$$

$$2N_{11} = -3A_{11} + \frac{15}{2}(A_{10}A_{01} + A_{10}A_{21} + A_{11}A_{22} + A_{20}A_{1-1} + A_{12}A_{01} + A_{1-1}A_{02})$$

$$2N_{12} = -3A_{12} + \frac{15}{2}(A_{10}A_{22} + A_{10}A_{02} + A_{11}A_{01} + A_{1-1}A_{21})$$

$$2N_{01} = -3A_{01} + \frac{15}{2}(A_{10}A_{11} + A_{10}A_{1-1} + A_{11}A_{12} + A_{01}A_{02} + A_{1-1}A_{1-2})$$

$$2N_{1-1} = -3A_{1-1} + \frac{15}{2}(A_{10}A_{01} + A_{10}A_{2-1} + A_{11}A_{20} + A_{11}A_{02} + A_{01}A_{1-2} + A_{1-1}A_{2-2})$$

$$2N_{1-2} = -3A_{1-2} + \frac{15}{2}(A_{10}A_{02} + A_{10}A_{2-2} + A_{11}A_{2-1} + A_{01}A_{1-1})$$

$$2N_{21} = -3A_{21} + \frac{15}{2}(A_{10}A_{11} + A_{20}A_{01} + A_{12}A_{1-1} + A_{01}A_{22})$$

$$2N_{22} = -3A_{22} + \frac{15}{2}\left(A_{10}A_{12} + \frac{1}{2}A_{11}^2 + A_{01}A_{21}\right)$$

$$2N_{02} = -3A_{02} + \frac{15}{2}\left(A_{10}A_{12} + A_{10}A_{1-2} + A_{11}A_{1-1} + \frac{1}{2}A_{01}^2\right)$$

$$2N_{2-1} = -3A_{2-1} + \frac{15}{2}(A_{10}A_{1-1} + A_{11}A_{1-2} + A_{20}A_{01} + A_{01}A_{2-2})$$

$$2N_{2-2} = -3A_{2-2} + \frac{15}{2}\left(A_{10}A_{1-2} + A_{01}A_{2-1} + \frac{1}{2}A_{1-1}^2\right)$$

$$2N_{03} = \frac{15}{2}(A_{11}A_{1-2} + A_{12}A_{1-1} + A_{01}A_{02})$$

$$2N_{31} = \frac{15}{2}(A_{10}A_{21} + A_{11}A_{20} + A_{1-1}A_{22})$$

$$2N_{3-1} = \frac{15}{2}(A_{10}A_{2-1} + A_{11}A_{2-2} + A_{20}A_{1-1})$$

$$2 N_{32} = \frac{15}{2}(A_{10} A_{22} + A_{11} A_{21})$$

$$2 N_{3-2} = \frac{15}{2}(A_{10} A_{2-2} + A_{1-1} A_{2-1})$$

$$2 N_{13} = \frac{15}{2}(A_{11} A_{02} + A_{12} A_{01} + A_{22} A_{1-1})$$

$$2 N_{1-3} = \frac{15}{2}(A_{11} A_{2-2} + A_{01} A_{1-2} + A_{1-1} A_{02})$$

$$2 N_{23} = \frac{15}{2}(A_{11} A_{12} + A_{01} A_{22})$$

$$2 N_{2-3} = \frac{15}{2}(A_{1-1} A_{1-2} + A_{01} A_{22})$$

$$2 N_{33} = \frac{15}{2} A_{11} A_{22}$$

$$2 N_{3-3} = \frac{15}{2} A_{1-1} A_{2-2}$$

Da n_0 als von der 1. Ordnung zu betrachten ist, indem in runder Rechnung $n_0 = 600''\!.\ \sin 1'' = 3\,m'$, da $m' = 10^{-3}$ = Masse des Jupiter, so ist deshalb n nach (11) bis zur 3. Ordnung entwickelt. Da in den Ableitungen der Störungsfunktion m' als Faktor auftritt, und andererseits der Faktor von m' in Ω bis zum 2. Grade in e, e', $A_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$ usw. entwickelt wird, so schreiten die Entwicklungen der rechten Seiten der Differentialgleichungen (6) bis zur 3. Ordnung fort.

Gemäß (9) ist dann weiter $\frac{d\varepsilon}{dt}$ auf Grund der Definition in (6) zu entwickeln. Wird im 2. Gliede rechter Hand der Koeffizient $\frac{1}{e}(1 - \sqrt{1-e^2})$ nach Potenzen von e entwickelt, so daß $\frac{1}{e}(1 - \sqrt{1-e^2}) = \frac{1}{2} e + \frac{1}{8} e^3 + \ldots$, so genügt wegen des Faktors $\frac{\partial \Omega}{\partial e}$, wenn auch Ω im Falle des Hecubatypus in Bezug auf e schon mit der 1. Potenz beginnt, und die Glieder 3. Grades rechter Hand von $\frac{d\varepsilon}{dt}$ ausgeschlossen werden, die Mitnahme des 1. Gliedes $\frac{1}{2} e$. Da auch der Faktor $\sqrt{1-e^2}$ desselben 2. Gliedes rechter Hand bei Potenzentwicklung und Berücksichtigung des niedrigsten Gliedes in e^2 zu Gliedern 3. Grades führen würde, deshalb also gleich 1 gesetzt werden darf, so lautet folglich die abgekürzte Differentialgleichung:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial \Omega}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{e}{na^2}\frac{\partial \Omega}{\partial e}. \tag{12}$$

Die Faktoren $\frac{1}{na}$ und $\frac{1}{na^2}$ werden, da $n = ka^{-3/2}$ bei Entwicklung nach A:

$$\frac{1}{na} = \frac{1}{n_0 a_0}\left(1 + \frac{1}{2} A - \frac{1}{8} A^2 + \cdots\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{na^2} = \frac{1}{n_0 a_0^2}\left(1 - \frac{1}{2} A + \frac{3}{8} A^2 + \cdots\right), \tag{13}$$

wo für A und A^2 die entsprechenden Reihen zu substituieren sind.

Schließlich sind die Koeffizienten F_i und ihre Ableitungen $\frac{\partial F_i}{\partial a} = F'_i$, sowie die analogen 2. und 3. Ableitungen derselben Funktionen in Taylorreihen nach A und dadurch in Fourierreihen nach ζ_0 und ζ'_0 zu entwickeln, weil sie alle von $a = a_0(1 + A)$ abhängig sind, und zwar mit Rücksicht auf die angestrebte Genauigkeit bis zum 3. Grade von A, wie weiter unten mit Rücksicht auf $\frac{d\overline{\omega}}{dt}$ ersichtlich wird. Es wird also allgemein:

$$F_i^{(n)} = F_{i\,(a_0)}^{(n)} + F_{i\,(a_0)}^{(n+1)} \cdot a_0 A + \frac{1}{2} F_{i\,(a_0)}^{(n+2)} a_0^2 A^2 + \frac{1}{6} F_{i\,(a_0)}^{(n+3)} a_0^3 A^3 + \ldots, \tag{14}$$

wo wieder für A^2 usw. die bekannten Reihen zu substituieren sind.

Ferner treten auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen auch die Funktionen E^2, E^3, AE und deren allgemeine Produkte mit $\frac{\cos}{\sin}(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta'_0)$ auf, so daß zunächst noch die letztgenannten Funktionen allein in Fourierreihen nach ζ_0 und ζ'_0 zu entwickeln sind, nachdem sie zuerst in Taylorreihen nach Z und Z' entwickelt worden sind und auch hier bis zum 3. Grade der Z und Z'. So sind von den allgemeinen Funktionen der Form $A^h E^i Z^k Z'^l \frac{\cos}{\sin}(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta'_0)$, wobei aber immer nur ein Produkt höchstens 3. Grades zu entwickeln ist, die nicht geringe Anzahl von 102 Koeffizienten darzustellen.

Zuerst ergibt sich für die Ableitung $\frac{d\varepsilon}{dt}$ die folgende Reihe, wobei nach der Potenzentwicklung zur Vereinfachung des Druckes stets $F_i^{(n)}$ statt $F_{i(a_0)}^{(n)}$ gesetzt worden ist:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_{00} + \sum 2\,\varepsilon_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta'_0), \tag{15}$$

wobei die Koeffizienten $\varepsilon_{\alpha\beta}$ in folgender Weise aus der Ursprungsform von $\frac{d\varepsilon}{dt}$, entwickelt nach den $A_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ und $Z'_{\alpha\beta}$, hervorgehen; diese Ausgangsform lautet, unter Einführung der sogleich zu definierenden Koeffizienten (1), (2) usw.:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{-2k^2 m'}{n_0 a_0} \Big[& (1) + (2) + (3) + (4)\,A + (5)\,E + (6)\cos\zeta_0 + (7)\,A\cos\zeta_0 \\
& + (8)\,E\cos\zeta_0 + (9)\,Z\sin\zeta_0 + (10)\cos 2\zeta_0 + (11)\,E\cos 2\zeta_0 + (12)\cos\zeta'_0 \\
& + (13)\,Z'\sin\zeta'_0 + (14)\,A\cos\zeta'_0 + (15)\cos(\zeta_0 + \zeta'_0) + (16)\,E\cos(\zeta_0 + \zeta'_0) \\
& + (17)\cos(\zeta_0 - \zeta'_0) + (18)\,E\cos(\zeta_0 - \zeta'_0) + (19)\cos 2\zeta'_0 + (20) + (21)\,E \\
& + (22)\cos\zeta_0 + (23)\,Z\sin\zeta_0 + (24)\,A\cos\zeta_0 + (25)\,E\cos\zeta_0 + (26)\,A\cos\zeta_0 \\
& + (27)\cos 2\zeta_0 + (28)\,E\cos 2\zeta_0 + (29)\cos(\zeta_0 + \zeta'_0) + (30)\,E\cos(\zeta_0 + \zeta'_0) \\
& + (31)\cos(\zeta_0 - \zeta'_0) + (32)\,E\cos(\zeta_0 - \zeta'_0) + (33)\,A^2 + (34)\,E^2 + (35)\,AE\cos\zeta_0 \\
& + (36)\,EZ\sin\zeta_0 + (37)\,E^2\cos 2\zeta_0 \Big]
\end{aligned} \tag{16}$$

wobei die Terme (1) bis (19) aus dem 1. Gliede rechter Hand von (12) und die Terme (20) bis (32) aus dem 2. Gliede stammen und alle in den A, E, Z, Z' linear sind, während die

Glieder 2. Ordnung in die Terme (33) bis (37) zusammengefaßt sind. Die Definition der Koeffizienten (i) als Funktionen von e_0, e' und der Laplaceschen Funktionen F_i und deren Ableitungen ist die folgende:

$$(17)\quad (1) = F'_0,\quad (2) = e_0^2 F'_1,\quad (3) = e'^2 F'_1,\quad (4) = \frac{1}{2} F'_0 + a_0 F''_0 + e_0^2 \left(\frac{1}{2} F'_1 + a_0 F''_1\right),$$

$$(5) = 2\, e_0 F'_1,\quad (6) = -e_0 F'_2,\quad (7) = -e_0 \left(\frac{1}{2} F'_2 + a_0 F''_2\right),\quad (8) = -F'_2,$$

$$(9) = e_0 F'_2,\quad (10) = e_0^2 F'_3,\quad (11) = 2\, e_0 F'_3,\quad (12) = e' F'_4,\quad (13) = -e' F'_4,$$

$$(14) = e' \left(\frac{1}{2} F'_4 + a_0 F''_4\right),\quad (15) = -e' e_0 F'_5,\quad (16) = -e' \cdot F'_5,\quad (17) = e' e_0 F'_6,$$

$$(18) = e' F'_6,\quad (19) = e'^2 F'_7,\quad (20) = -\frac{1}{2} e_0^2 \frac{F_1}{a_0},\quad (21) = -e_0 \frac{F_1}{a_0},$$

$$(22) = +\frac{1}{4} e_0 \frac{F_2}{a_0},\quad (23) = -\frac{1}{4} e_0 \frac{F_2}{a_0},\quad (24) = +\frac{1}{4} e_0 F'_2,\quad (25) = +\frac{1}{4} \cdot \frac{F_2}{a_0},$$

$$(26) = -\frac{1}{8} e_0 \frac{F_2}{a_0},\quad (27) = -\frac{1}{2} e_0^2 \frac{F_3}{a_0},\quad (28) = -e_0 \frac{F_3}{a_0},\quad (29) = +\frac{1}{4} e' e_0 \frac{F_5}{a_0},$$

$$(30) = +\frac{1}{4} e' \frac{F_5}{a_0},\quad (31) = -\frac{1}{4} e' e_0 \frac{F_6}{a_0},\quad (32) = -\frac{1}{4} e' \frac{F_6}{a_0},$$

$$(33) = -\frac{1}{8} F'_0 + \frac{1}{2} a_0 F''_0 + \frac{1}{2} a_0^2 F'''_0,\quad (34) = F'_1 - \frac{1}{2} \frac{F_1}{a_0},$$

$$(35) = -\frac{1}{8} \frac{F_2}{a_0} - \frac{1}{4} F'_2 - a_0 F''_2,\quad (36) = F'_2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{F_2}{a_0},\quad (37) = F'_3 - \frac{1}{2} \frac{F_3}{a_0}$$

Die Entwicklung der Koeffizienten der (i) in (16) in Doppelfourierreihen nach ζ_0 u. ζ'_0 ergibt dann für die Koeffizienten $\varepsilon_{\alpha\beta}$ in (15) die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
(18)\qquad \varepsilon_{00} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0 a_0} \big[& (1) + (2) + (3) + (7)\, A_{10} + (8)\, E_{10} + (9)\, Z_{10} + (11)\, E_{20} + (13)\, Z'_{01} \\
& + (14)\, A_{01} + (16)\, E_{11} + (18)\, E_{1-1} + (20) + (23)\, Z_{10} + (24)\, A_{10} + (25)\, E_{10} \\
& + (26)\, A_{10} + (28)\, E_{20} + (30)\, E_{11} + (32)\, E_{1-1} + (33)\,(2\, A_{10}^2 + 2\, A_{11}^2 + 2\, A_{01}^2 \\
& + 2\, A_{1-1}^2) + (34)\,(2\, E_{10}^2 + 2\, E_{11}^2 + 2\, E_{01}^2 + 2\, E_{1-1}^2) + (35)\,(E_{10} A_{20} + E_{20} A_{10} \\
& + E_{11} A_{01} + E_{01} A_{11} + E_{01} A_{1-1} + E_{1-1} A_{01}) + (36)\,(E_{10} Z_{20} - E_{20} Z_{10} \\
& - E_{11} Z_{01} + E_{01} Z_{11} + E_{01} Z_{1-1} + E_{1-1} Z_{01}) + (37)\,(E_{10}^2 + 2\, E_{11} E_{1-1}) \big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\,\varepsilon_{10} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0 a_0} \big[& 2\,(4)\, A_{10} + 2\,(5)\, E_{10} + (6) + (7)\, A_{20} + (8)\, E_{20} + (9)\, Z_{20} + (11)\, E_{10} \\
& + (13)\,(Z'_{11} - Z_{1-1}) + (14)\,(A_{11} + A_{1-1}) + (16)\,(E_{01} + E_{21}) + (18)\,(E_{01} + E_{2-1}) \\
& + 2\,(21)\, E_{10} + (22) + (23)\, Z_{20} + (24)\, A_{20} + (25)\, E_{20} + (26)\, A_{20} + (28)\, E_{10} \\
& + (30)\,(E_{01} + E_{21}) + (32)\,(E_{01} + E_{2-1}) + 4\,(33)\,(A_{01} A_{11} + A_{01} A_{1-1})
\end{aligned}$$

$$+ 4\,(34)\,(E_{01}\,E_{11} + E_{01}\,E_{1-1}) + (35)\,(3\,E_{10}\,A_{10} + 2\,E_{11}\,A_{11} + E_{11}\,A_{1-1}$$
$$+ 2\,E_{01}\,A_{01} + E_{1-1}\,A_{11} + 2\,E_{1-1}\,A_{1-1}) + (36)\,(E_{10}\,Z_{10} + E_{11}\,Z_{1-1} + E_{1-1}\,Z_{11})$$
$$+ 2\,(37)\,(E_{01}\,E_{11} + E_{01}\,E_{1-1})]$$

$$2\,\varepsilon_{20} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\,[2\,(4)\,A_{20} + 2\,(5)\,E_{20} + (7)\,A_{10} + (8)\,E_{10} - (9)\,Z_{10} + (10) + (13)\,(Z'_{21}$$
$$- Z'_{2-1}) + (14)\,(A_{2-1} + A_{21}) + (16)\,E_{1-1} + (18)\,E_{11} + 2\,(21)\,E_{20} - (23)\,Z_{10}$$
$$+ (24)\,A_{10} + (25)\,E_{10} + (26)\,A_{10} + (27) + (30)\,E_{1-1} + (32)\,E_{11} + 2\,(33)\,(A_{10}^2$$
$$+ 2\,A_{11}\,A_{1-1}) + 2\,(34)\,(E_{10}^2 + 2\,E_{11}\,E_{1-1}) + (35)\,(2\,E_{10}\,A_{20} + 2\,E_{20}\,A_{10}$$
$$+ E_{11}\,A_{01} + E_{01}\,A_{11} + E_{01}\,A_{1-1} + E_{1-1}\,A_{01}) + (36)\,(2\,E_{20}\,Z_{10} + E_{11}\,Z_{01}$$
$$- E_{01}\,Z_{11} - E_{01}\,Z_{1-1} - E_{1-1}\,Z_{01}) + 2\,(37)\,(E_{10}^2 + E_{11}^2 + E_{01}^2 + E_{1-1}^2)]$$

$$+ 2\,\varepsilon_{30} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\,[2\,(4)\,A_{30} + 2\,(5)\,E_{30} + (7)\,A_{20} + (8)\,E_{20} - (9)\,Z_{20} + (11)\,E_{10}$$
$$+ (16)\,E_{2-1} + (18)\,E_{21} + 2\,(21)\,E_{30} - (23)\,Z_{20} + (24)\,A_{20} + (25)\,E_{20} + (26)\,A_{20}$$
$$+ (28)\,E_{10} + (30)\,E_{2-1} + (32)\,E_{21} + 4\,(33)\,(A_{20}\,A_{10} + A_{2-1}\,A_{11} + A_{21}\,A_{1-1})$$
$$+ 4\,(34)\,(E_{20}\,E_{10} + E_{2-1}\,E_{11} + E_{21}\,E_{1-1}) + (35)\,(E_{10}\,A_{10} + E_{11}\,A_{1-1}\,E_{1-1}\,A_{11})$$
$$- (36)\,(E_{10}\,Z_{10} + E_{11}\,Z_{1-1} + E_{1-1}\,Z_{11}) + 2\,(37)\,(E_{01}\,E_{11} + E_{01}\,E_{1-1})]$$

$$+ 2\,\varepsilon_{40} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\,[(11)\,E_{20} + (28)\,E_{20} + (35)\,(E_{10}\,A_{20} + E_{20}\,A_{10}) - (36)\,(E_{10}\,Z_{20}$$
$$+ E_{20}\,Z_{10}) + (37)\,(E_{10}^2 + 2\,E_{11}\,E_{1-1})]$$

$$+ 2\,\varepsilon_{11} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\,[2\,(4)\,A_{11} + 2\,(5)\,E_{11} + (7)\,(A_{01} + A_{21}) + (8)\,(E_{01} + E_{21}) + (9)\,(-Z_{01}$$
$$+ Z_{21}) + (11)\,E_{1-1} + (13)\,(-Z'_{10} + Z'_{12}) + (14)\,(A_{10} + A_{12}) + (15) + (18)\,(E_{20}$$
$$+ E_{02}) + 2\,(21)\,E_{11} + (23)\,(-Z_{01} + Z_{21}) + (24)\,(A_{01} + A_{21}) + (25)\,E_{01} + E_{21})$$
$$+ (26)\,(A_{01} + A_{21}) + (28)\,E_{1-1} + (29) + (32)\,(E_{20} + E_{02}) + 4\,(33)\,A_{01}\,A_{10}$$
$$+ 4\,(34)\,E_{01}\,E_{10} + (35)\,(2\,E_{10}\,A_{11} + E_{10}\,A_{1-1} + E_{20}\,A_{01} + 2\,E_{11}\,A_{10} + E_{01}\,A_{20}$$
$$+ E_{01}\,A_{02} + E_{1-1}\,A_{10} + E_{02}\,A_{01}) + (36)\,(E_{10}\,Z_{1-1} + E_{20}\,Z_{01} + 2\,E_{11}\,Z_{10}$$
$$+ E_{01}\,Z_{20} - E_{01}\,Z_{02} - E_{1-1}\,Z_{10} + E_{02}\,Z_{01}) + 2\,(37)\,E_{01}\,E_{10}]$$

$$\begin{aligned}
+2\,\varepsilon_{12} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\,[&2\,(4)\,A_{12} + 2\,(5)\,E_{12} + (7)\,A_{02} + (8)\,E_{02} - (9)\,Z_{02} + (11)\,E_{1-2} - (13)\,Z'_{11} \\
&+ (14)\,A_{11} + (16)\,E_{01} + (18)\,E_{21} + 2\,(21)\,E_{12} - (23)\,Z_{02} + (24)\,A_{02} + (25)\,E_{02} \\
&+ (26)\,A_{02} + (28)\,E_{1-2} + (30)\,E_{01} + (32)\,E_{21} + 4\,(33)\,A_{01}\,A_{11} + 4\,(34)\,E_{01}\,E_{11} \\
&+ (35)\,(E_{11}\,A_{11} + E_{11}\,A_{1-1} + E_{01}\,A_{01} + E_{1-1}\,A_{11}) + (36)\,(E_{11}\,Z_{11} + E_{11}\,Z_{1-1} \\
&- E_{01}\,Z_{01} - E_{1-1}\,Z_{11}) + 2\,(37)\,E_{01}\,E_{1-1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+2\,\varepsilon_{01} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\,[&2\,(4)\,A_{01} + 2\,(5)\,E_{01} + (7)\,(A_{11} + A_{1-1}) + (8)\,(E_{11} + E_{1-1}) + (9)\,(Z_{11} \\
&+ Z_{1-1}) + (11)\,(E_{21} + E_{2-1} + (12) + (13)\,Z'_{02} + (14)\,A_{02} + (16)\,(E_{10} + E_{12}) \\
&+ (18)\,(E_{10} + E_{1-2}) + 2\,(21)\,E_{01} + (23)\,(Z_{11} + Z_{1-1}) + (24)\,(A_{11} + A_{1-1}) \\
&+ (25)\,(E_{11} + E_{1-1}) + (26)\,(A_{11} + A_{1-1}) + (28)\,(E_{21} + E_{2-1}) + (30)\,(E_{10} \\
&+ E_{12}) + (32)\,(E_{10} + E_{1-2}) + (33)\,(A_{10}\,A_{11} + A_{10}\,A_{1-1}) + 4\,(34)\,(E_{10}\,E_{11} \\
&+ E_{10}\,E_{1-1}) + (35)\,(2\,E_{10}\,A_{01} + E_{20}\,A_{11} + E_{20}\,A_{1-1} + E_{11}\,A_{20} + E_{11}\,A_{02} \\
&+ 2\,E_{01}\,A_{10} + E_{1-1}\,A_{20} + E_{1-1}\,A_{02} + E_{02}\,A_{11} + E_{02}\,A_{1-1}) + (36)\,(E_{10}\,Z_{01} \\
&- E_{20}\,Z_{11} - E_{20}\,Z_{1-1} + E_{11}\,Z_{20} - E_{11}\,Z_{02} + 2\,E_{01}\,Z_{10} + E_{1-1}\,Z_{20} + E_{1-1}\,Z_{02} \\
&+ 2\,E_{02}\,Z_{10} + E_{02}\,Z_{11} + E_{02}\,Z_{1-1}) + 2\,(37)\,(E_{10}\,E_{11} + E_{10}\,E_{1-1})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+2\,\varepsilon_{1-1} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\,[&2\,(4)\,A_{1-1} + 2\,(5)\,E_{1-1} + (7)\,(A_{01} + A_{2-1}) + (8)\,(E_{01} + E_{2-1}) \\
&+ (9)\,(Z_{01} + Z_{2-1}) + (11)\,E_{11} + (13)\,(Z'_{10} - Z'_{1-2}) + (14)\,(A_{10} + A_{1-2}) + (16)\,(E_{20} \\
&+ E_{02}) + (17) + 2\,(21)\,E_{1-1} + (23)\,(Z_{01} + Z_{2-1}) + (24)\,(A_{01} + A_{2-1}) + (25)\,(E_{01} \\
&+ E_{2-1}) + (26)\,(A_{01} + A_{2-1}) + (28)\,E_{11} + (30)\,(E_{20} + E_{02}) + (31) + 4\,(33)\,A_{01}\,A_{10} \\
&+ 4\,(34)\,E_{01}\,E_{10} + (35)\,(E_{10}\,A_{11} + 2\,E_{10}\,A_{1-1}\,E_{20}\,A_{01} + E_{11}\,A_{10} + E_{01}\,A_{20} \\
&+ E_{01}\,A_{02} + 2\,E_{1-1}\,A_{10} + E_{02}\,A_{01}) + (36)\,(E_{10}\,Z_{11} - E_{20}\,Z_{01} - E_{11}\,Z_{10} + E_{01}\,Z_{20} \\
&+ E_{01}\,Z_{02} + 2\,E_{1-1}\,Z_{10} - E_{02}\,Z_{01}) + 2\,(37)\,E_{01}\,E_{10}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+2\,\varepsilon_{1-2} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\,[&2\,(4)\,A_{1-2} + 2\,(5)\,E_{1-2} + (7)\,A_{02} + (8)\,E_{02} + (9)\,Z_{02} + (11)\,E_{12} \\
&+ (13)\,Z'_{1-1} + (14)\,A_{1-1} + (16)\,E_{2-1} + (18)\,E_{01} + 2\,(21)\,E_{1-2} + (23)\,Z_{02} \\
&+ (24)\,A_{02} + (25)\,E_{02} + (26)\,A_{02} + (28)\,E_{12} + (30)\,E_{2-1} + (32)\,E_{01} + 4\,(33)\,A_{01}\,A_{1-1} \\
&+ 4\,(34)\,E_{01}\,E_{1-1} + (35)\,(E_{20}\,A_{02} + E_{11}\,A_{1-1} + E_{01}\,A_{01} + E_{1-1}\,A_{11} + E_{1-1}\,A_{1-1}
\end{aligned}$$

$$+ E_{02}A_{20}) + (36)(-E_{20}Z_{02} - E_{11}Z_{1-1} + E_{01}Z_{01} + E_{1-1}Z_{11} + E_{1-1}Z_{1-1} + E_{02}Z_{20}) + 2(37)E_{01}E_{11}]$$

$$+2\varepsilon_{2+1} = -\frac{2k^2 m'}{n_0 a_0}[2(4)A_{21} + 2(5)E_{21} + (7)A_{11} + (8)E_{11} - (9)Z_{11} + (11)E_{01} - (13)Z'_{20} + (14)A_{20} + (16)E_{10} + (18)E_{12} + 2(21)E_{21} - (23)Z_{11} + (24)A_{11} + (25)E_{11} + (26)A_{11} + (28)E_{01} + (30)E_{10} + (32)E_{12} + 4(33)A_{10}A_{11} + 4(34)E_{10}E_{11} + (35)(E_{10}A_{01} + E_{20}A_{11} + E_{20}A_{1-1} + E_{11}A_{20} + E_{01}A_{10} + E_{1-1}A_{20} + E_{1-1}A_{02} + E_{02}A_{1-1}) + (36)(-E_{10}Z_{01} + E_{20}Z_{11} + E_{20}Z_{1-1} + E_{11}Z_{20} - E_{01}Z_{10} + E_{1-1}Z_{20} - E_{1-1}Z_{02} - E_{02}Z_{1-1}) + 2(37)(E_{10}E_{11} + E_{10}E_{1-1})]$$

$$+2\varepsilon_{22} = -\frac{2k^2 m'}{n_0 a_0}[2(4)A_{22} + 2(5)E_{22} + (7)A_{12} + (8)E_{12} - (9)Z_{12} + (11)E_{02} - (13)Z'_{21} + (14)A_{21} + (16)E_{11} + 2(21)E_{22} - (23)Z_{12} + (24)A_{12} + (25)E_{12} + (26)A_{12} + (28)E_{02} + (30)E_{11} + 2(33)A_{11}^2 + 2(34)E_{11}^2 + (35)(E_{10}A_{02} + E_{11}A_{01} + E_{01}A_{11} + E_{02}A_{10} + (36)(-E_{10}Z_{02} - E_{11}Z_{01} - E_{01}Z_{11} - E_{02}Z_{10}) + (37)(E_{01}^2 + 2E_{11}E_{1-1})]$$

$$+2\varepsilon_{02} = -\frac{2k^2 m'}{n_0 a_0}[2(4)A_{02} + 2(5)E_{02} + (7)(A_{12} + A_{1-2}) + (8)(E_{12} + E_{1-2}) + (9)(Z_{12} + Z_{1-2}) - (13)Z'_{01} + (14)A_{01} + (16)E_{1-1} + (18)E_{11} + (19) + 2(21)E_{02} + (23)(Z_{12} + Z_{1-2}) + (24)(A_{12} + A_{1-2}) + (25)(E_{12} + E_{1-2}) + (26)(A_{12} + A_{1-2}) + (30)E_{1-1} + (32)E_{11} + (33)(2A_{01}^2 + 4A_{11}A_{1-1}) + (34)(2E_{01}^2 + 4E_{11}E_{1-1}) + (35)(E_{10}A_{02} + E_{11}A_{01} + E_{01}A_{11} + E_{01}A_{1-1} + E_{1-1}A_{01} + 2E_{02}A_{10}) + (36)(E_{11}Z_{01} + E_{01}Z_{11} + E_{01}Z_{1-1} - E_{1-1}Z_{01}) + (37)(E_{11}^2 + E_{1-1}^2)]$$

$$+2\varepsilon_{2-1} = -\frac{2k^2 m'}{n_0 a_0}[2(4)A_{2-1} + 2(5)E_{2-1} + (7)A_{1-1} + (8)E_{1-1} - (9)Z_{1-1} + (11)E_{01} + (13)Z'_{20} + (14)A_{20} + (16)E_{1-2} + (18)E_{10} + 2(21)E_{2-1} - (23)Z_{1-1} + (24)A_{1-1} + (25)E_{1-1} + (26)A_{1-1} + (28)E_{01} + (30)E_{1-2} + (32)E_{10} + 4(33)A_{10}A_{1-1} + 4(34)E_{10}E_{1-1} + (35)(E_{10}A_{01} + E_{20}A_{11} + E_{20}A_{1-1} + E_{11}A_{20} + E_{11}A_{02} + E_{01}A_{10} + E_{1-1}A_{20} + E_{02}A_{11}) + (36)(E_{10}Z_{01} + E_{20}Z_{11} + E_{20}Z_{1-1} - E_{11}Z_{20} + E_{11}Z_{02} - E_{01}Z_{10} + E_{1-1}Z_{20} - E_{02}Z_{11}) + (37)E_{10}E_{11} + E_{10}E_{1-1})]$$

$$+2\,\varepsilon_{2-2} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\Big[2\,(4)\,A_{2-2} + 2\,(5)\,E_{2-2} + (7)\,A_{1-2} + (8)\,E_{1-2} - (9)\,Z_{1-2} + (11)\,E_{02}$$
$$+ (13)\,Z'_{2-1} + (14)\,A_{2-1} + (18)\,E_{1-1} + 2\,(21)\,E_{2-2} - (23)\,Z_{1-2} + (24)\,A_{1-2}$$
$$+ (25)\,E_{1-2} + (26)\,A_{1-2} + (28)\,E_{02} + (32)\,E_{1-1} + 2\,(33)\,A^2_{1-1} + 2\,(34)\,E^2_{1-1}$$
$$+ (35)\,(E_{10}\,A_{02} + E_{01}\,A_{1-1} + E_{1-1}\,A_{01} + E_{02}\,A_{10}) + (36)\,(E_{10}\,Z_{02} - E_{01}\,Z_{1-1}$$
$$+ E_{1-1}\,Z_{01} - E_{02}\,Z_{10}) + (37)\,(E^2_{01} + 2\,E_{11}\,E_{1-1})\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{03} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\Big[2\,(4)\,A_{03} + 2\,(5)\,E_{03} - (13)\,Z'_{02} + (14)\,A_{02} + (16)\,E_{1-2} + (18)\,E_{12}$$
$$+ 2\,(21)\,E_{03} + (30)\,E_{1-2} + (32)\,E_{12} + (35)\,(E_{11}\,A_{02} + E_{1-1}\,A_{02} + E_{02}\,A_{11}$$
$$+ E_{02}\,A_{1-1}) + (36)\,(E_{11}\,Z_{02} - E_{1-1}\,Z_{02} + E_{02}\,Z_{11} + E_{02}\,Z_{1-1})\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{3+1} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\Big[+ (7)\,A_{21} + (8)\,E_{21} - (9)\,Z_{21} + (11)\,E_{11} + (16)\,E_{20} - (23)\,Z_{21}$$
$$+ (24)\,A_{21} + (25)\,E_{21} + (26)\,A_{21} + (28)\,E_{11} + (30)\,E_{20} + (35)\,(E_{10}\,A_{11}$$
$$+ E_{20}\,A_{01} + E_{11}\,A_{10} + E_{01}\,A_{20}) + (36)\,(-E_{10}\,Z_{11} - E_{20}\,Z_{01} - E_{11}\,Z_{10} - E_{01}\,Z_{20})$$
$$+ 2\,(37)\,E_{01}\,E_{10}\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{3-1} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\Big[+ (7)\,A_{2-1} + (8)\,E_{2-1} - (9)\,Z_{2-1} + (11)\,E_{1-1} + (18)\,E_{20} - (23)\,Z_{2-1}$$
$$+ (24)\,A_{2-1} + (25)\,E_{2-1} + (26)\,A_{2-1} + (28)\,E_{1-1} + (32)\,E_{20} + (35)\,(E_{10}\,A_{1-1}$$
$$+ E_{20}\,A_{01} + E_{01}\,A_{20} + E_{1-1}\,A_{10}) + (36)\,(-E_{10}\,Z_{1-1} + E_{20}\,Z_{01} - E_{01}\,Z_{20}$$
$$- E_{1-1}\,Z_{10}) + 2\,(37)\,E_{01}\,E_{10}\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{3+2} = -\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\Big[(11)\,E_{12} + (16)\,E_{21} - (23)\,Z_{12} + (24)\,A_{22} + (25)\,E_{22} + (26)\,A_{22}$$
$$+ (28)\,E_{12} + (30)\,E_{21} + (35)\,(E_{20}\,A_{02} + E_{11}\,A_{11} + E_{02}\,E_{20}) - (36)\,(E_{20}\,Z_{02}$$
$$+ E_{11}\,Z_{11} + E_{02}\,Z_{20}) + 2\,(37)\,E_{01}\,E_{11}\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{3-2} = -\frac{2\,k^2\,m'}{u_0\,a_0}\Big[(11)\,E_{1-2} + (18)\,E_{2-1} - (23)\,Z_{1-2} + (24)\,A_{2-2} + (25)\,E_{2-2}$$
$$+ (26)\,A_{2-2} + (28)\,E_{1-2} + (32)\,E_{2-1} + (35)\,(E_{20}\,A_{02} + E_{1-1}\,A_{1-1} + E_{02}\,A_{20})$$
$$+ (36)\,(E_{20}\,Z_{02} - E_{1-1}\,Z_{1-1} - E_{02}\,Z_{20}) + 2\,(37)\,E_{01}\,E_{1-1}\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{4+1} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\Big[(11)\,E_{21} + (16)\,E_{30} + (28)\,E_{21} + (30)\,E_{30} + (35)\,(E_{20}\,A_{11} + E_{11}\,A_{20})$$
$$-(36)\,(E_{20}\,Z_{11} + E_{11}\,Z_{20}) + 2\,(37)\,E_{10}\,E_{11}\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{4-1} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\Big[(11)\,E_{2-1} + (18)\,E_{30} + (28)\,E_{2-1} + (32)\,E_{30} + (35)\,(E_{20}\,A_{1-1}$$
$$+ E_{1-1}\,A_{20}) - (36)\,(E_{20}\,Z_{1-1} + E_{1-1}\,Z_{20}) + 2\,(37)\,E_{10}\,E_{1-1}\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{4+2} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\Big[+(37)\,E_{11}^2\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{4-2} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\Big[+(37)\,E_{1-1}^2\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{1+3} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\Big[+(7)\,A_{03} + (8)\,E_{03} - (9)\,Z_{03} - (13)\,Z'_{12} + (14)\,A_{12} + (16)\,E_{02}$$
$$-(23)\,Z_{03} + (24)\,A_{03} + (25)\,E_{03} + (26)\,A_{03} + (30)\,E_{02} + (35)\,(E_{02}\,A_{01} + E_{01}\,A_{02})$$
$$-(36)\,(E_{01}\,Z_{02} + E_{02}\,Z_{01})\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{1-3} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\Big[+(7)\,A_{03} + (8)\,E_{03} + (9)\,Z_{03} + (13)\,Z'_{1-2} + (14)\,A_{1-2} + (18)\,E_{02}$$
$$+(23)\,Z_{03} + (24)\,A_{03} + (25)\,E_{03} + (26)\,A_{03} + (32)\,E_{02} + (35)\,(E_{01}\,A_{02} + E_{02}\,A_{01})$$
$$+(36)\,(E_{01}\,Z_{02} + E_{02}\,Z_{10})\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{2+3} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\Big[+(11)\,E_{03} + (16)\,E_{22} + (28)\,E_{03} + (30)\,E_{12} + (35)\,(E_{11}\,A_{02} + E_{02}\,A_{11})$$
$$-(36)\,(E_{11}\,Z_{02} + E_{02}\,Z_{11})\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{2-3} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\Big[+(11)\,E_{03} + (18)\,E_{1-2} + (28)\,E_{03} + (32)\,E_{1-2} + (35)\,(E_{1-1}\,A_{02}$$
$$+ E_{02}\,A_{1-1}) + (36)\,(E_{1-1}\,Z_{02} - E_{02}\,Z_{1-1})\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{1+4} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\Big[+(16)\,E_{03} + (30)\,E_{03}\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{1-4} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\Big[+(18)\,E_{03} + (32)\,E_{03}\Big]$$

$$+2\,\varepsilon_{3+3} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\,(30)\,E_{22}$$

$$+2\,\varepsilon_{3-3} = -\frac{2\,k^2 m'}{n_0\,a_0}\,(32)\,E_{22}.$$

Zur Darstellung von $\frac{d\zeta}{dt}$ ist nun weiter $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ in eine Doppelfourierreihe zu entwickeln, wobei nach (6): $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \cdot \frac{1}{e} \frac{\partial \Omega}{\partial e}$.

Rechter Hand wird der Grad der Exzentrizitäten in Ω wegen des Faktors $\frac{1}{e} \frac{\partial \Omega}{\partial e}$ stets um 2 Einheiten herabgesetzt, weshalb die Störungsfunktion bis zum 4. Grade entwickelt werden muß, wenn auf der rechten Seite noch Glieder 2. Grades erhalten werden sollen, was wir uns prinzipiell vorgenommen und bereits bei $\frac{d\varepsilon}{dt}$ durchgeführt haben. Für $\frac{d\varepsilon}{dt}$ genügte die Entwicklung der Störungsfunktion bis zum 2. Grade; wegen $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ ist aber bereits in der Entwicklung von Ω in (7) der 3. und 4. Grad der Exzentrizitäten hinzugefügt worden. Da $\frac{d\varepsilon}{dt}$ und $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ in der Darstellung der Variablen $\zeta = l - 2\,l' + \bar{\omega}$ gleichberechtigt sind, ist die Entwicklung von $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ bis zum selben 2. Grade unvermeidlich geworden. In Ω, Formel (7), sind das 18. Glied bis zum 22. Gliede die deshalb hinzukommenden säkularen, und die Glieder 23 bis 33 die hinzutretenden kritischen Glieder 4. Grades, so daß die Glieder 4. Grades allein fast genau ebensoviele Terme zu Ω beisteuern wie alle Glieder 1. bis 3. Grades zusammen. Da ferner der Faktor $\frac{1}{e} \frac{\partial \Omega}{\partial e}$ in Bezug auf den kritischen Term 1. Grades in e in Ω zu einem Gliede -1. Grades in $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ führt, so muß der Faktor $\frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2}$ bis zum 3. Grade entwickelt werden, so daß $\frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2} = \frac{1}{n_0 a_0}(1 + a_1 + a_2 + a_3)(1 - e^2)$, wo

$$
(19) \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} A = 1.\,\text{Grad}, \quad a^2 = +\frac{3}{8} A^2 = 2.\,\text{Grad}, \quad a_3 = -\frac{5}{16} A^3 = 3.\,\text{Grad}, \\ e^2 = e_0^2 + 2\,e_0 E + E^2, \end{cases}
$$

so daß also in $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ auch A^3 und analog $E^2 A$ in eine Fourierreihe zu entwickeln ist. Das Glied -1. Grades in e in $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ hat nun zur Folge, daß noch $\frac{1}{e_0 + E}$ in eine Fourierreihe zu entwickeln ist, was aber praktisch erst möglich ist, nachdem $\frac{1}{e_0 + E}$ nach Potenzen von $\frac{E}{e_0}$ entwickelt worden ist, falls eine solche Entwicklung zulässig ist, was nur dann der Fall ist, wenn $\left|\frac{E}{e_0}\right| < 1$. Da nun aber durch anderweitige Untersuchungen, wie schon erwähnt, erwiesen ist, daß E von der gleichen Größe wie e sein kann, so kann eine Potenzentwicklung nach $\frac{E}{e_0}$ zum mindesten allgemein nicht in Frage kommen. Die dadurch entstehende Kalamität kann man vermeiden, indem man statt $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ das Produkt $e\,\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ entwickelt; dann ist aber auch statt $\frac{d\zeta}{dt}$ nunmehr

$$e\frac{d\zeta}{dt} = e\frac{d\varepsilon}{dt} + e(n - 2n') + e\frac{d\overline{\omega}}{dt} \tag{20}$$

zu bilden. Dieses Verfahren hat dann zur Folge, daß bei der Ermittelung der Koeffizienten durch Vergleich der Koeffizienten gleicher Argumente der trigonometrischen Funktionen beiderseits die Koeffizienten der linken Seite von vorneweg vom 2. Grade sind, während bei unseren 3 anderen Variablen linker Hand nur Glieder 1. Grades auftreten. In der nun folgenden Darstellung von $e\frac{d\overline{\omega}}{dt}$ als Fourierreihe nach ζ_0 und ζ_0' ist die Entwicklung bis zu den Gliedern 2. Grades einschließlich explizit als Funktion von ζ_0 und ζ_0' gegeben worden; die Glieder 3. Grades sind hier zunächst nur als implizite Funktionen von ζ_0 und ζ_0' dargestellt worden, ihre explizite Entwicklung wird in einer zweiten unmittelbar folgenden Untersuchung gegeben werden. Die Glieder 3. Grades allein sind ihrer Anzahl nach, wie schon erwähnt, ebenso groß wie alle anderen vom 0. bis zum 2. Grade einschließlich zusammengenommen. Es ist aber leicht möglich, schon aus der folgenden noch impliziten Darstellung, soweit es sich um die Glieder 3. Grades handelt, jeden Term eines bestimmten Argumentes herauszunehmen, wenn es praktisch gefordert wird.

Wird die rechte Seite von $e\frac{d\overline{\omega}}{dt}$ in die zunächst erforderliche Potenzreihe nach e_0, e', A, E, Z und Z' entwickelt, so ergibt sich die folgende Darstellung, in der stets die Anordnung nach steigenden Potenzen der genannten Größen gewahrt ist:

(21) $\quad e\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{k^2 m'}{n_0 a_0^2}[T_1 + T_2 + \cdots + T_{29}]$, wobei, wenn noch $\frac{n_0 a_0^2}{n a^2} = r$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T_1} = {} & 2reF_1^{(a)}(1 + a_1 + a_2)\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right) = 2e_0 F_1^{(a_0)} + 2F_1 E + 2\left(a_0 F_1' - \frac{1}{2}F_1\right)e_0 A \\
& + 2\left(a_0 F_1' - \frac{1}{2}F_1\right)AE - e_0^3 F_1 - 3F_1 e_0^2 E - 3F_1 e_0 E^2 + 2\left(\frac{3}{8}F_1 - \frac{1}{2}a_0 F_1'\right. \\
& \left. + \frac{1}{2}a_0^2 F_1''\right)e_0 A^2 + 2\left(\frac{3}{8}F_1 - \frac{1}{2}a_0 F_1' + \frac{1}{2}a_0^2 F_1''\right)A^2 E - F_1 E^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T_2} = {} & -rF_2\cos\zeta(1 + a_1 + a_2 + a_3)\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right) = -F_2\cos\zeta_0 + F_2 Z\sin\zeta_0 + \left(-a_0 F_2'\right. \\
& \left. + \frac{1}{2}F_2\right)A\cos\zeta_0 + \left(-\frac{1}{2}a_0^2 F_2'' + \frac{1}{2}a_0 F_2' - \frac{3}{8}F_2\right)A^2\cos\zeta_0 + \frac{1}{2}F_2 Z^2\cos\zeta_0 + \left(a_0 F_2'\right. \\
& \left. - \frac{1}{2}F_2\right)AZ\sin\zeta_0 + \frac{1}{2}F_2 e^2\cos\zeta_0 - \frac{1}{6}F_2 Z^3\sin\zeta_0 + \left(\frac{1}{2}a_0 F_2' - \frac{1}{4}F_2\right)AZ^2\cos\zeta_0 \\
& + \left(\frac{1}{2}a_0^2 F_2'' - \frac{1}{2}a_0 F_2' + \frac{3}{8}F_2\right)A^2 Z\sin\zeta_0 + \left(-\frac{1}{6}a_0^3 F_2''' + \frac{1}{4}a_0^2 F_2'' - \frac{3}{8}a_0 F_2'\right. \\
& \left. + \frac{5}{16}F_2\right)A^3\cos\zeta_0 - \frac{1}{2}F_2 e^2 Z\sin\zeta_0 + \left(\frac{1}{2}a_0 F_2' - \frac{1}{4}F_2\right)e^2 A\cos\zeta_0
\end{aligned}$$

$$T_3 = 2rF_3 e\cdot\cos 2\zeta(1+a_1+a_2)\left(1-\frac{1}{2}e^2\right) = 2F_3 e_0\cos 2\zeta_0 + 2F_3 E\cos 2\zeta_0 + (2a_0F'_3$$

$$-F_3)e_0\cdot A\cos 2\zeta_0 - 4F_3e_0 Z\sin 2\zeta_0 + (2a_0F'_3 - F_3)\cdot EA\cos 2\zeta_0 - 4F_3 EZ\sin 2\zeta_0$$

$$+\left(\frac{3}{4}F_3 + a_0^2F''_3 - a_0F'_3\right)e_0\cdot A^2\cos 2\zeta_0 + (2F_3 - 4a_0F'_3)e_0ZA\sin 2\zeta_0 - 4F_3e_0Z^2\cos 2\zeta_0$$

$$-F_3e_0^3\cos 2\zeta_0 - 3F_3e_0^2E\cos 2\zeta_0 - 3F_3e_0E^2\cos 2\zeta_0 + \left(a_0^2F''_3 - a_0F'_3\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}F_3\right)EA^2\cos 2\zeta_0 + (2F_3-4a_0F'_3)\cdot EAZ\sin 2\zeta_0 - 4F_3EZ^2\cos 2\zeta_0$$

$$-F_3E^3\cos 2\zeta_0$$

$$T_4 = -rF_5e'\cos(\zeta+\zeta')(1+a_1+a_2)\left(1-\frac{1}{2}e^2\right) = -e'F_5\cos(\zeta_0+\zeta'_0) + \left(\frac{1}{2}F_5\right.$$

$$\left.-a_0F'_5\right)e'A\cos(\zeta_0+\zeta'_0) + F_5e'(Z+Z')\cdot\sin(\zeta_0+\zeta'_0) + \left(\frac{1}{2}a_0F'_5 - \frac{1}{2}a_0F''_5\right.$$

$$\left.-\frac{3}{8}F_5\right)\cdot e'A^2\cos(\zeta_0+\zeta'_0) + \left(a_0F'_5 - \frac{1}{2}F_5\right)\cdot e'A(Z+Z')\sin(\zeta_0+\zeta'_0)$$

$$+\frac{1}{2}F_5e'(Z+Z')^2\cos(\zeta_0+\zeta'_0) + \frac{1}{2}F_5e'e_0^2\cdot\cos(\zeta_0+\zeta'_0) + F_5e'e_0E\cos(\zeta_0+\zeta'_0)$$

$$+\frac{1}{2}F_5e'E^2\cos(\zeta_0+\zeta'_0)$$

$$T_5 = rF_6e'\cos(\zeta-\zeta')\left(1+a_1+a_2-\frac{1}{2}e^2\right) = F_6e'\cdot\cos(\zeta_0-\zeta'_0) - \left(\frac{1}{2}F_6 - a_0F'_6\right)$$

$$\cdot e'A\cos(\zeta_0-\zeta'_0) - F_6e'(Z-Z')\sin(\zeta_0-\zeta'_0) - \left(\frac{1}{2}a_0F'_6 - \frac{1}{2}a_0^2F''_6 - \frac{3}{8}F_6\right)$$

$$\cdot e'A^2\cos(\zeta_0-\zeta'_0) - \left(a_0F'_6-\frac{1}{2}F_6\right)e'A(Z-Z')\sin(\zeta_0-\zeta'_0) - \frac{1}{2}F_6e'(Z-Z')^2\cos(\zeta_0-\zeta'_0)$$

$$-\frac{1}{2}F_6e'e_0^2\cos(\zeta_0-\zeta'_0) - F_6e'e_0E\cos(\zeta_0-\zeta'_0) - \frac{1}{2}F_6e'E^2\cos(\zeta_0-\zeta'_0)$$

$$T_6 = 3re^2F_8\cos\zeta(1+a_1) = 3F_8e_0^2\cos\zeta_0 + 6F_8e_0E\cos\zeta_0 + 3F_8E^2\cos\zeta_0 + 3\left(a_0F'_8\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}F_8\right)e_0^2A\cos\zeta_0 + 6\left(a_0F'_8-\frac{1}{2}F_8\right)e_0EA\cos\zeta_0 + 3\left(a_0F'_8-\frac{1}{2}F_8\right)E^2A\cos\zeta_0$$

$$-3F_8e_0^2Z\sin\zeta_0 - 6F_8e_0EZ\sin\zeta_0 - 3F_8E^2Z\sin\zeta_0$$

$$T_7 = re'^2F_9\cos\zeta(1+a_1) = F_9e'^2\cos\zeta_0 + \left(a_0F'_9 - \frac{1}{2}F_9\right)e'^2A\cos\zeta_0 - F_9e'^2Z\sin\zeta_0$$

$$T_8 = 2r\,e'\,e\,F_{10}\cos\zeta'\,(1+a_1) = 2\,F_{10}\cdot e'\,e_0\cos\zeta_0' + 2\,F_{10}\,e'\,E\cos\zeta_0' + 2\left(a_0 F_{10}' - \frac{1}{2}F_{10}\right)e'\,e_0\,A\cos\zeta_0' - 2\,F_{10}\,e'\,e_0\,Z'\sin\zeta_0' + 2\left(a_0 F_{10}' - \frac{1}{2}F_{10}\right)e'\,E\,A\cos\zeta_0' - 2\,F_{10}\,e'\,EZ'\sin\zeta_0'$$

$$T_9 = 2\,r\,F_{12}\,e'\,e\cos(2\zeta - \zeta')(1+a_1) = 2\,F_{12}\,e'\,e_0\cos(2\zeta_0 - \zeta_0') + 2\,F_{12}\,e'\,E\cos(2\zeta_0 - \zeta_0') + 2\left(a_0 F_{12}' - \frac{1}{2}F_{12}\right)e'\,e_0\,A\cos(2\zeta_0 - \zeta_0') - 2\,F_{12}\,e'\,e_0\,(2Z - Z')\sin(2\zeta_0 - \zeta_0') + 2\left(a_0 F_{12}' - \frac{1}{2}F_{12}\right)e'\,E\,A\cos(2\zeta_0 - \zeta_0') - 2\,F_{12}\,e'\,E\,(2Z - Z')\sin(2\zeta_0 - \zeta_0')$$

$$T_{10} = r e'^2\,2\,F_{13}\cos(\zeta - 2\zeta')(1+a_1) = F_{13}\,e'^2\cos(\zeta_0 - 2\zeta_0') + \left(a_0 F_{13}' - \frac{1}{2}F_{13}\right)e'^2 A\cos(\zeta_0 - 2\zeta_0') - F_{13}\,e'^2\,(Z - 2Z')\sin(\zeta_0 - 2\zeta_0')$$

$$T_{11} = 3\,r\,e^2 F_{14}\cos 3\zeta\,(1+a_1) = 3\,F_{14}\,e_0^2\cos 3\zeta_0 + 6\,F_{14}\,e_0\,E\cos 3\zeta_0 + 3\,F_{14}\,E^2\cos 3\zeta_0 + 3\left(a_0 F_{14}' - \frac{1}{2}F_{14}\right)e_0^2\,A\cos 3\zeta_0 + 6\left(a_0 F_{14}' - \frac{1}{2}F_{14}\right)e_0\,E\,A\cos 3\zeta_0 + 3\left(a_0 F_{14}' - \frac{1}{2}F_{14}\right)E^2 A\cos 3\zeta_0 - 9\,F_{14}\,e_0^2\,Z\sin 3\zeta_0 - 18\,F_{14}\,e_0\,E\,Z\sin 3\zeta_0 - 9\,F_{14}\,E^2 Z\sin 3\zeta_0$$

$$T_{12} = 2\,r\,F_{15}\,e\,e'\cos(2\zeta + \zeta')(1+a_1) = 2\,F_{15}\,e'\,e_0\cos(2\zeta_0 + \zeta_0') + 2\,F_{15}\,e'\,E\cos(2\zeta_0 + \zeta_0') + 2\left(a_0 F_{15}' - \frac{1}{2}F_{15}\right)e'\,e_0\,A\cos(2\zeta_0 + \zeta_0') - 2\,F_{15}\,e'\,e_0\,(2Z + Z')\sin(2\zeta_0 + \zeta_0') + 2\left(a_0 F_{15}' - \frac{1}{2}F_{15}\right)e'\,E\,A\cos(2\zeta_0 + \zeta_0') - 2\,F_{15}\,e'\,E\,(2Z + Z')\sin(2\zeta_0 + \zeta_0')$$

$$T_{13} = r e'^2 F_{16}\cos(\zeta + 2\zeta')(1+a_1) = F_{16}\,e'^2\cos(\zeta_0 + 2\zeta_0') + \left(a_0 F_{16}' - \frac{1}{2}F_{16}\right)e'^2 A\cos(\zeta_0 + 2\zeta_0') - F_{16}\,e'^2\,(Z + 2Z')\sin(\zeta + 2\zeta_0')$$

$$T_{14} = 4\,r\,e^3 F_{18} = 4\,e_0^3 F_{18} + 12\,e_0^2\,E\,F_{18} + 12\,e_0\,E^2 F_{18} + 4\,E^3 F_{18}$$

$$T_{15} = 2\,r\,e'^2 e\,F_{19} = 2\,e'^2 e_0\,F_{19} + 2\,F_{19}\,e'^2 E$$

$$T_{16} = 3\,r\,e^2\,e'\,F_{20}\cos(\zeta - \zeta') = 3\,F_{20}\,e'\,e_0^2\cos(\zeta_0 - \zeta_0') + 6\,F_{20}\,e'\,e_0\,E\cos(\zeta_0 - \zeta_0') + 3\,F_{20}\,e'\,E^2\cos(\zeta_0 - \zeta_0')$$

$$T_{17} = r\,e'^3 F_{21}\cos(\zeta - \zeta') = F_{21}\,e'^3\cos(\zeta_0 - \zeta_0')$$

$$T_{18} = 2\, r\, e'^2\, e\, F_{22} \cos(2\zeta - 2\zeta') = 2\, F_{22}\, e'^2\, e_0 \cos(2\zeta_0 - 2\zeta_0') + 2\, F_{22}\, e'^2\, E \cos(2\zeta_0 - 2\zeta_0')$$

$$T_{19} = 4\, r\, e^3\, F_{23} \cos 2\zeta = 4\, F_{23}\, e_0^3 \cos 2\zeta_0 + 12\, F_{23}\, e_0^2\, E \cos 2\zeta_0 + 12\, F_{23}\, e_0\, E^2 \cos 2\zeta_0 + 4\, F_{23}\, E^3 \cos 2\zeta_0$$

$$T_{20} = 2\, r\, e'^2\, e\, F_{24} \cos\zeta = 2\, F_{24}\, e'^2\, e_0 \cos 2\zeta_0 + 2\, F_{24}\, e'^2\, E \cos 2\zeta_0$$

$$T_{21} = 3\, r\, e^2\, e'\, F_{25} \cos(\zeta + \zeta') = 3\, F_{25}\, e'\, e_0^2 \cos(\zeta_0 + \zeta_0') + 6\, F_{25}\, e'\, e_0\, E \cos(\zeta_0 + \zeta_0') + 3\, F_{25}\, e'\, E^2 \cos(\zeta_0 + \zeta_0')$$

$$T_{22} = r\, e'^3\, F_{26} \cos(\zeta + \zeta') = F_{26}\, e'^3 \cos(\zeta_0 + \zeta_0')$$

$$T_{23} = 2\, r\, e\, e'^2\, F_{27} \cos 2\zeta' = 2\, F_{27}\, e'^2\, e_0 \cos 2\zeta_0' + 2\, F_{27}\, e'^2\, E \cos 2\zeta_0'$$

$$T_{24} = 3\, r\, e^2\, e'\, F_{28} \cos(3\zeta - \zeta') = 3\, F_{28}\, e'\, e_0^2 \cos(3\zeta_0 - \zeta_0') + 6\, F_{28}\, e'\, e_0\, E \cos(3\zeta_0 - \zeta_0') + 3\, F_{28}\, e'\, E^2 \cos(3\zeta_0 - \zeta_0')$$

$$T_{25} = r\, e'^3\, F_{29} \cos(\zeta - 3\zeta') = e'^3 \cos(\zeta_0 - 3\zeta_0')$$

$$T_{26} = 4\, r\, e^3\, F_{30} \cos 4\zeta = 4\, F_{30}\, e_0^3 \cos 4\zeta_0 + 12\, F_{30}\, e_0^2\, E \cos 4\zeta_0 + 12\, F_{30}\, e_0\, E^2 \cos 4\zeta_0 + 4\, F_{30}\, E^3 \cos 4\zeta_0$$

$$T_{27} = 3\, r\, e^2\, e'\, F_{31} \cos(3\zeta + \zeta') = 3\, F_{31}\, e'\, e_0^2 \cos(3\zeta_0 + \zeta_0') + 6\, F_{31}\, e'\, e_0\, E \cos(3\zeta_0 + \zeta_0') + 3\, F_{31}\, e'\, E^2 \cos(3\zeta_0 + \zeta_0')$$

$$T_{28} = 2\, r\, e'^2\, e\, F_{32} \cos(2\zeta + 2\zeta') = 2\, F_{32}\, e'^2\, e_0 \cos(2\zeta_0 + 2\zeta_0') + 2\, F_{32}\, e'^2\, E \cos(2\zeta_0 + 2\zeta_0')$$

$$T_{29} = r\, e'^3\, F_{33} \cos(\zeta + 3\zeta') = F_{33}\, e'^3 \cos(\zeta_0 + 3\zeta_0')$$

Werden alsdann alle T_i in Doppelfourierreihen nach ζ_0 und ζ_0' entwickelt, so erhält $e\,\dfrac{d\overline{\omega}}{dt}$ allgemein die Form:

$$e\,\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{k^2\, m'}{n_0\, a_0^2}\left[P_{00} + \Sigma_{\alpha,\beta}\, 2\, P_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0')\right], \tag{22}$$

wobei explizit bis zu den Gliedern 2. Grades einschließlich:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P_{00}} = {} & 2\, e_0\, F_1 + 2\left(a_0\, F_1' - \frac{1}{2} F_1\right)(2\, A_{10}\, E_{10} + 2\, A_{11}\, E_{11} + 2\, A_{01}\, E_{01} + 2\, A_{1-1}\, E_{1-1}) + F_2 Z_{10} \\ & + \left(-a_0\, F_2' + \frac{1}{2} F_2\right) A_{10} + \left(-\frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2} a_0\, F_2' - \frac{1}{2} a_0^2\, F_2''\right)(2\, A_{10}\, A_{20} + 2\, A_{11}\, A_{01} \\ & + 2\, A_{01}\, A_{1-1}) + \frac{1}{2} F_2 (2\, Z_{10}\, Z_{20} + 2\, Z_{01}\, Z_{11} + 2\, Z_{21}\, Z_{11} - 2\, Z_{1-1}\, Z_{01} + 2\, Z_{2-1}\, Z_{1-1}) \end{aligned}$$

$$+\left(a_0 F_2' - \frac{1}{2} F_2\right)(A_{10} Z_{20} - A_{20} Z_{10} - A_{11} Z_{01} + A_{01} Z_{11} + A_{01} Z_{1-1} + A_{1-1} Z_{01})$$
$$+ e_0 F_2 E_{10} + \frac{1}{2} F_2 (2 E_{10} E_{20} + 2 E_{11} E_{01} + 2 E_{01} E_{1-1}) + 2 F_3 E_{20} + (2 a_0 F_3'$$
$$- F_3) e_0 A_{20} - 4 F_3 e_0 Z_{20} + (2 a_0 F_3' - F_3)(A_{10} E_{10} + A_{1-1} E_{11} + A_{21} E_{01} + A_{2-1} E_{01}$$
$$+ A_{11} E_{1-1} + A_{01} E_{21} + A_{01} E_{2-1}) - 4 F_3 (E_{10} Z_{10} + E_{11} Z_{1-1} + E_{1-1} Z_{11} + E_{01} Z_{21}$$
$$+ E_{01} Z_{2-1} - E_{21} Z_{01} + E_{2-1} Z_{01}) + e' \left(- a_0 F_5' + \frac{1}{2} F_5\right) A_{11} + e' F_5 (Z_{11} + Z_{11}')$$
$$- e' \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0 F_6'\right) A_{1-1} + 6 F_8 e_0 E_{10} + 3 F_8 (2 E_{10} E_{20} + 2 E_{11} E_{01} + 2 E_{01} E_{1-1})$$
$$+ 2 F_{10} e' E_{01} + 2 F_{12} e' E_{2-1} + 3 F_{14} (2 E_{20} E_{10} + 2 E_{2-1} E_{11} + E_{10} E_{20} + 2 E_{21} E_{1-1})$$
$$+ 2 F_{15} e' E_{21}$$

$$\mathbf{2\,P_{10}} = 4 F_1 E_{10} + 4 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_2\right) e_0 A_{10} + 2 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right)(2 A_{20} E_{10} + 2 A_{01} E_{11} + 2 A_{21} E_{11}$$
$$+ 2 A_{10} E_{20} + 2 A_{11} E_{01} + 2 A_{1-1} E_{01} + 2 A_{01} E_{1-1} + 2 A_{2-1} E_{1-1} + 2 A_{11} E_{21}$$
$$+ 2 A_{1-1} E_{2-1}) - F_2 + F_2 Z_{20} + \left(- a_0 F_2' + \frac{1}{2} F_2\right) A_{20} + \left(- \frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2} a_0 F_2'\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} a_0^2 F_2''\right) 3 A_{10}^2 + 2 A_{11}^2 + 2 A_{11} A_{1-1} + 2 A_{01}^2 + 2 A_{1-1}^2) + \frac{1}{2} F_2 (Z_{10}^2 + 2 Z_{11}^2 - 2 Z_{1-1} Z_{11}$$
$$+ 2 Z_{01}^2 + 2 Z_{21} Z_{01} - 2 Z_{2-1} Z_{01} + 2 Z_{1-1}^2) + \left(a_0 F_2' - \frac{1}{2} F_2\right)(A_{10} Z_{10} + A_{11} Z_{1-1}$$
$$+ A_{1-1} Z_{11}) + \frac{1}{2} F_2 e_0^2 + e_0 F_2 E_{20} + \frac{1}{2} F_2 (3 E_{10}^2 + 2 E_{11}^2 + 2 E_{11} E_{1-1} + 2 E_{01}^2$$
$$+ 2 E_{1-1}^2) + 2 F_3 E_{10} + (2 a_0 F_3' - F_3) e_0 A_{10} - 4 F_3 e_0 Z_{10} + (2 a_0 F_3' - F_3)(2 A_{20} E_{10}$$
$$+ A_{01} E_{11} + A_{21} E_{11} + A_{2-1} E_{11} + 2 A_{10} E_{20} + A_{11} E_{01} + 2 A_{01} E_{01} + A_{1-1} E_{01}$$
$$+ A_{01} E_{1-1} + A_{21} E_{1-1} + A_{2-1} E_{1-1} + A_{11} E_{21} + A_{1-1} E_{21} + A_{11} E_{2-1} + A_{1-1} E_{2-1})$$
$$- 4 F_3 (- E_{11} Z_{01} + E_{01} Z_{11} + E_{01} Z_{1-1} + E_{1-1} Z_{01} + 2 E_{10} Z_{20} + E_{11} Z_{21} + E_{11} Z_{2-1}$$
$$+ E_{1-1} Z_{21} + E_{1-1} Z_{2-1} - E_{21} Z_{11} + E_{21} Z_{1-1} + E_{2-1} Z_{11} - E_{2-1} Z_{1-1}) + e' \left(- a_0 F_5'\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} F_5\right)(A_{01} + A_{21}) + e' F_5 (Z_{01} + Z_{01}' + Z_{21} + Z_{21}') - e' \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0 F_6'\right)(A_{01} + A_{2-1})$$
$$- e' F_6 (Z_{01} - Z_{01}' + Z_{21} - Z_{21}') + 3 F_8 e_0^2 + 6 F_8 e_0 E_{20} + 3 F_8 (3 E_{10}^2 + 2 E_{11}^2 + 2 E_{11} E_{1-1}$$
$$+ 2 E_{01}^2 + 2 E_{1-1}^2) + F_9 e'^2 + 2 F_{10} e' (E_{11} + E_{1-1}) + 2 F_{12} e' E_{1-1} + 6 F_{14} e_0 E_{20}$$
$$+ 3 F_{14} (E_{10}^2 + E_{1-1} E_{11} + E_{21} E_{01} + E_{2-1} E_{01} + E_{11} E_{1-1} + E_{01} E_{21} + E_{01} E_{2-1})$$
$$+ 2 F_{15} e' E_{11}$$

$$
\begin{aligned}
2\,\mathbf{P}_{20} = {} & 4\,F_1\,E_{20} + 4\left(a_0\,F_1' - \frac{1}{2}F_1\right) e_0\,A_{20} + 2\left(a_0\,F_1' - \frac{1}{2}F_1\right)(2\,A_{10}\,E_{10} + 2\,A_{1-1}\,E_{11} \\
& + 2\,A_{21}\,E_{01} + 2\,A_{11}\,E_{1-1} + 2\,A_{01}\,E_{21} + 2\,A_{01}\,E_{2-1}) - F_2\,Z_{10} + \left(-a_0\,F_2' + \frac{1}{2}F_2\right) A_{10} \\
& + \left(-\frac{3}{8}\,F_2 + \frac{1}{2}\,a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,a_0^2\,F_2''\right)(2\,A_{10}\,A_{20} + 2\,A_{11}\,A_{01} + 2\,A_{01}\,A_{1-1}) \\
& + \frac{1}{2}\,F_2\,(+2\,Z_{01}\,Z_{11} + 2\,Z_{21}\,Z_{11} - 2\,Z_{2-1}\,Z_{11} - 2\,Z_{1-1}\,Z_{01} - 2\,Z_{21}\,Z_{1-1} + 2\,Z_{2-1}\,Z_{1-1}) \\
& + \left(a_0\,F_2' - \frac{1}{2}F_2\right)(2\,A_{20}\,Z_{10} + A_{11}\,Z_{01} - A_{01}\,Z_{11} - A_{01}\,Z_{1-1} - A_{1-1}\,Z_{01}) + e_0\,F_2\,E_{10} \\
& + \frac{1}{2}\,F_2\,(2\,E_{10}\,E_{20} + 2\,E_{11}\,E_{01} + 2\,E_{01}\,E_{1-1}) + 2\,F_3\,e_0 + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,(2\,A_{10}\,E_{10} \\
& + 2\,A_{11}\,E_{11} + 2\,A_{01}\,E_{01} + 2\,A_{1-1}\,E_{1-1}) + e'\left(-a_0\,F_5' + \frac{1}{2}F_5\right) A_{1-1} + e'\,F_5\,(-Z_{1-1} \\
& - Z_{1-1}') - \left(\frac{1}{2}\,F_6 - a_0\,F_6'\right) e'\,A_{11} - e'\,F_6\,(-Z_{1-1} + Z_{1-1}') + 6\,F_8\,e_0\,E_{10} + 3\,F_8\,(2\,E_{10}\,E_{20} \\
& + 2\,E_{11}\,E_{01} + 2\,E_{01}\,E_{1-1}) + 2\,F_{10}\,e'\,(E_{21} + E_{2-1}) + 2\,F_{12}\,e'\,E_{01} + 6\,F_{14}\,e_0\,E_{10} \\
& + 3\,F_{14}\,(2\,E_{20}\,E_{10} + 2\,E_{01}\,E_{11} + 2\,E_{1-1}\,E_{01} + 2\,E_{2-1}\,E_{1-1} + 2\,E_{11}\,E_{21}) + 2\,F_{15}\,e'\,E_{01}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\,\mathbf{P}_{30} = {} & 4\,F_1\,E_{30} + 4\left(a_0\,F_1' - \frac{1}{2}F_1\right) e_0\,A_{30} + 2\left(a_0\,F_1' - \frac{1}{2}F_1\right)(2\,A_{20}\,E_{10} + 2\,A_{2-1}\,E_{11} \\
& + 2\,A_{10}\,E_{20} + 2\,A_{21}\,E_{1-1} + 2\,A_{1-1}\,E_{21} + 2\,A_{11}\,E_{2-1}) - F_2\,Z_{20} + \left(\frac{1}{2}F_2 - a_0\,F_2'\right) A_{20} \\
& + \left(-\frac{3}{8}F_2 + \frac{1}{2}\,a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,a_0^2\,F_2''\right)(A_{10}^2 + 2\,A_{11}\,A_{1-1}) + \frac{1}{2}F_2\,(-Z_{10}^2 - 2\,Z_{1-1}\,Z_{11} + 2\,Z_{21}\,Z_{01} \\
& - 2\,Z_{2-1}\,Z_{01}) + \left(a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,F_2\right)(-A_{10}\,Z_{10} - A_{11}\,Z_{1-1} - A_{1-1}\,Z_{11}) + e_0\,F_2\,E_{20} \\
& + \frac{1}{2}\,F_2\,(E_{10}^2 + 2\,E_{11}\,E_{1-1}) + 2\,F_3\,E_{10} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,e_0\,A_{10} + 4\,F_3\,e_0\,Z_{10} + (2\,a_0\,F_3' \\
& - F_3)\,(A_{20}\,E_{10} + A_{01}\,E_{11} + A_{21}\,E_{11} + A_{10}\,E_{20} + A_{11}\,E_{01} + A_{1-1}\,E_{01} + A_{01}\,E_{1-1} \\
& + A_{2-1}\,E_{1-1} + A_{11}\,E_{21} + A_{1-1}\,E_{2-1}) - 4\,F_3\,(E_{11}\,Z_{01} - E_{10}\,Z_{20} - E_{11}\,Z_{21} + E_{20}\,Z_{10} \\
& - E_{01}\,Z_{1-1} - E_{1-1}\,Z_{01} + E_{21}\,Z_{11} + E_{2-1}\,Z_{1-1}) + e_0\left(-a_0\,F_5' + \frac{1}{2}\,F_5\right) A_{2-1} \\
& + e'\,F_5\,(-Z_{2-1} - Z_{2-1}') - e'\left(\frac{1}{2}\,F_6 - a_0\,F_6'\right) A_{21} - e'\,F_6\,(-Z_{2-1} + Z_{2-1}') + 6\,F_8\,e_0\,E_{20} \\
& + 3\,F_8\,(E_{10}^2 + 2\,E_{11}\,E_{1-1}) + 12\,e'\,E_{11} + 3\,F_{11}\,e_0^2 + 3\,F_{14}\,(2\,E_{10}^2 + 2\,E_{11}^2 + 2\,E_{01}^2 \\
& + 2\,E_{1-1}^2) + 2\,F_{15}\,e'\,E_{1-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\,\mathbf{P}_{40} = {} & + 2\left(-\frac{3}{8}F_2 + \frac{1}{2}a_0 F_2' - \frac{1}{2}a_0^2 F_2''\right) A_{10}\,A_{20} + \frac{1}{2}\,F_2\,(-\,2\,Z_{10}\,Z_{20} - 2\,Z_{21}\,Z_{1-1} \\
& - 2\,Z_{2-1}\,Z_{11}) + \left(a_0\,F_2' - \frac{1}{2}F_2\right)(-\,A_{10}\,Z_{20} - A_{20}\,Z_{10}) + F_2\,E_{10}\,E_{20} + 2\,F_3\,E_{20} \\
& + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,e_0\,A_{20} + 4\,F_3\,e_0\,Z_{20} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,(A_{10}\,E_{10} + A_{1-1}\,E_{11} + A_{21}\,E_{01} \\
& + A_{2-1}\,E_{01} + A_{11}\,E_{1-1} + A_{01}\,E_{21} + A_{01}\,E_{2-1}) - 4\,F_3\,(-\,E_{10}\,Z_{10} - E_{11}\,Z_{1-1} \\
& - E_{1-1}\,Z_{11} - E_{01}\,Z_{21} - E_{01}\,Z_{2-1} + E_{21}\,Z_{01} - E_{2-1}\,Z_{01}) + 6\,F_8\,E_{20}\,E_{10} + 6\,F_{14}\,e_0\,E_{10} \\
& + 3\,F_{14}\,(2\,E_{01}\,E_{11} + 2\,E_{20}\,E_{10} + 2\,E_{21}\,E_{11} + 2\,E_{1-1}\,E_{01} + 2\,E_{2-1}\,E_{1-1} + 2\,F_{15}\,e'\,E_{2-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\,\mathbf{P}_{11} = {} & 4\,F_1\,E_{11} + 4\left(a_0\,F_1' - \frac{1}{2}F_1\right) e_0\,A_{11} + 2\left(a_0\,F_1' - \frac{1}{2}F_1\right)(2\,A_{01}\,E_{10} + 2\,A_{21}\,E_{10} \\
& + 2\,A_{22}\,E_{11} + 2\,A_{1-1}\,E_{20} + 2\,A_{01}\,E_{12} + 2\,A_{10}\,E_{01} + 2\,A_{12}\,E_{01} + 2\,A_{20}\,E_{1-1} + 2\,A_{02}\,E_{1-1} \\
& + 2\,A_{10}\,E_{21} + 2\,A_{11}\,E_{22} + 2\,A_{1-1}\,E_{02}) + F_2\,(-\,Z_{01} + Z_{21}) + \left(\frac{1}{2}F_2 - a_0\,F_2'\right)(A_{01} \\
& + A_{21}) + \left(-\frac{3}{8}F_2 + \frac{1}{2}a_0\,F_2' - \frac{1}{2}a_0^2\,F_2''\right)(4\,A_{10}A_{11} + 2\,A_{10}\,A_{1-1} + 2\,A_{20}\,A_{01} + 2\,A_{01}A_{02}) \\
& + \frac{1}{2}F_2\,(2\,Z_{10}\,Z_{1-1} - 2\,Z_{01}\,Z_{20} + 2\,Z_{12}\,Z_{11} - 2\,Z_{1-1}\,Z_{12} + 2\,Z_{22}\,Z_{01} + 2\,Z_{02}\,Z_{01} \\
& + 2\,Z_{1-2}\,Z_{1-1}) + \left(a_0\,F_2' - \frac{1}{2}F_2\right)(A_{10}\,Z_{1-1} + A_{20}\,Z_{01} + 2\,A_{11}\,Z_{10} + A_{01}\,Z_{20} - A_{01}\,Z_{02} \\
& - A_{1-1}\,Z_{10} + A_{02}\,Z_{01}) + e_0\,F_2\,(E_{01} + E_{21}) + \frac{1}{2}F_2\,(4\,E_{10}\,E_{11} + 2\,E_{10}\,E_{1-1} + 2\,E_{20}E_{01} \\
& + 2\,E_{01}\,E_{02}) + 2\,F_3\,E_{1-1} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,e_0 A_{1-1} - 4\,F_3\,e_0 Z_{1-1} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,(A_{01}\,E_{10} \\
& + A_{21}\,E_{10} + A_{2-1}\,E_{10} + 2\,A_{20}\,E_{11} + A_{02}\,E_{11} + 2\,A_{11}\,E_{20} + A_{10}\,E_{01} + A_{1-2}\,E_{01} + A_{22}\,E_{1-1} \\
& + A_{2-2}\,E_{1-1} + A_{10}\,E_{21} + A_{1-1}\,E_{22} + A_{11}\,E_{02} + A_{10}\,E_{2-1} + A_{1-1}\,E_{2-2} + A_{01}\,E_{1-2}) \\
& - 4\,F_3\,(-\,E_{10}\,Z_{01} + E_{01}\,Z_{10} + E_{10}\,Z_{21} + E_{10}\,Z_{2-1} + 2\,E_{11}\,Z_{20} - E_{11}\,Z_{02} + E_{20}\,Z_{11} \\
& + E_{01}\,Z_{1-2} + E_{1-1}\,Z_{22} + E_{1-1}\,Z_{2-2} + E_{1-2}\,Z_{01} + E_{21}\,Z_{10} + E_{22}\,Z_{1-1} + E_{02}\,Z_{11} \\
& - E_{2-1}\,Z_{10} - E_{2-2}\,Z_{1-1}) - e'\,F_5 + e'\left(-\,a_0\,F_5' + \frac{1}{2}F_5\right) A_{22} + e'\,F_5\,(Z_{22} + Z_{22}') \\
& - e'\left(\frac{1}{2}F_6 - a_0\,F_6'\right)(A_{20} + A_{02}) - e'\,F_6(Z_{22} - Z_{22}') + 6\,F_8\,e_0\,(E_{01} + E_{21}) + 3\,F_8\,(4\,E_{10}E_{11} \\
& + 2\,E_{10}\,E_{1-1} + 2\,E_{20}\,E_{01} + 2\,E_{01}\,E_{02}) + 2\,F_{10}\,e'\,(E_{10} + E_{12}) + 2\,F_{12}\,e'\,E_{1-2} \\
& + 6\,F_{14}\,e'\,E_{2-1} + 3\,F_{14}\,(2\,E_{1-1}\,E_{10} + 2\,E_{1-2}\,E_{11} + 2\,E_{01}\,E_{20} + 2\,E_{2-2}\,E_{01}) \\
& + 2\,F_{15}\,e'\,E_{10}
\end{aligned}
$$

$$2\,\mathbf{P}_{12} = 4\,F_1\,E_{12} + 4\left(a_0\,F_1' - \frac{1}{2}\,F_1\right) e_0\,A_{12} + 2\left(a_0\,F_1' - \frac{1}{2}\,F_1\right) (2\,A_{22}\,E_{10} + 2\,A_{02}\,E_{10}$$
$$+ 2\,A_{01}\,E_{11} + 2\,A_{11}\,E_{01} + 2\,A_{21}\,E_{1-1} + 2\,A_{1-1}\,E_{21} + 2\,A_{10}\,E_{22} + 2\,A_{10}\,E_{02})$$
$$- F_2\,Z_{02} + \left(\frac{1}{2}\,F_2 - a_0\,F_2'\right) (A_{22} + A_{02}) + \left(-\frac{3}{8}\,F_2 + \frac{1}{2}\,a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,a_0^2\,F_2''\right) (A_{11}^2$$
$$+ 2\,A_{11}\,A_{1-1} + A_{01}^2) + \frac{1}{2}\,F_2\,(2\,Z_{10}\,Z_{1-2} - Z_{11}^2 + 2\,Z_{1-1}\,Z_{11} - Z_{01}^2 - 2\,Z_{21}\,Z_{01})$$
$$+ \left(-\frac{1}{2}\,F_2 + a_0\,F_2'\right) (A_{11}\,Z_{11} + A_{11}\,Z_{1-1} - A_{01}\,Z_{01} - A_{1-1}\,Z_{11}) + e_0\,F_2\,(E_{22}$$
$$+ E_{02}) + \frac{1}{2}\,F_2\,(E_{11}^2 + 2\,E_{11}\,E_{1-1} + E_{01}^2) + 2\,F_3\,E_{1-2} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,e_0\,A_{1-2}$$
$$- 4\,F_3\,e_0\,Z_{1-2} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,(A_{22}\,E_{10} + A_{02}\,E_{10} + A_{2-2}\,E_{10} + A_{21}\,E_{11} + A_{2-1}\,E_{11}$$
$$+ A_{1-1}\,E_{01} + A_{01}\,E_{1-1} + A_{11}\,E_{21} + A_{10}\,E_{22} + A_{10}\,E_{02} + A_{11}\,E_{2-1} + A_{10}\,E_{2-2})$$
$$- 4\,F_3\,(E_{01}\,Z_{1-1} + E_{10}\,Z_{22} - E_{10}\,Z_{02} + E_{10}\,Z_{2-2} + E_{11}\,Z_{21} + E_{11}\,Z_{2-1} + E_{21}\,Z_{11}$$
$$+ E_{22}\,Z_{10} + E_{02}\,Z_{10} - E_{2-1}\,Z_{11} - E_{2-2}\,Z_{10}) + \left(\frac{1}{2}\,F_5 - a_0\,F_5'\right) e'\,A_{01} + e'\,F_5\,(-Z_{01}$$
$$- Z_{01}') - e'\left(\frac{1}{2}\,F_6 - a_0\,F_6'\right) A_{21} - e'\,F_6\,(-Z_{01} + Z_{01}') + 6\,F_8\,e_0\,(E_{22} + E_{02}) + 3\,F_8\,(E_{11}^2$$
$$+ 2\,E_{11}\,E_{1-1} + E_{01}^2) + 2\,F_{10}\,e'\,E_{11} + 6\,F_{14}\,e'\,E_{2-2} + 3\,F_{14}\,(2\,E_{1-2}\,E_{10} + 2\,E_{2-1}\,E_{01}$$
$$+ E_{1-1}^2) + 2\,F_{15}\,e'\,E_{1-1} + F_{16}\,e'^2$$

$$2\,\mathbf{P}_{01} = 4\,F_1\,E_{01} + 4\left(a_0\,F_1' - \frac{1}{2}\,F_1\right) e_0\,A_{01} + 2\left(a_0\,F_1' - \frac{1}{2}\,F_1\right) (2\,A_{11}\,E_{10} + 2\,A_{1-1}\,E_{10}$$
$$+ 2\,A_{10}\,E_{11} + 2\,A_{12}\,E_{11} + 2\,A_{11}\,E_{12} + 2\,A_{02}\,E_{01} + 2\,A_{10}\,E_{1-1} + 2\,A_{1-2}\,E_{1-1}$$
$$+ 2\,A_{01}\,E_{02} + 2\,A_{1-1}\,E_{1-2}) + F_2\,(Z_{11} + Z_{1-1}) + \left(+\frac{1}{2}\,F_2 - a_0\,F_2'\right) (A_{11} + A_{1-1})$$
$$+ \left(-\frac{3}{8}\,F_2 + \frac{1}{2}\,a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,a_0^2\,F_2''\right) (4\,A_{10}\,A_{01} + 2\,A_{20}\,A_{11} + 2\,A_{20}\,A_{1-1} + 2\,A_{11}\,A_{02}$$
$$+ 2\,A_{1-1}\,A_{02}) + \frac{1}{2}\,F_2\,(2\,Z_{10}\,Z_{21} + 2\,Z_{10}\,Z_{2-1} + 2\,Z_{11}\,Z_{20} + 2\,Z_{1-1}\,Z_{20} + 2\,Z_{11}\,Z_{22}$$
$$+ 2\,Z_{02}\,Z_{11} + 2\,Z_{01}\,Z_{12} - 2\,Z_{1-2}\,Z_{01} - 2\,Z_{02}\,Z_{1-1} + 2\,Z_{2-2}\,Z_{1-1}) + \left(-\frac{1}{2}\,F_2\right.$$
$$\left.+ a_0\,F_2'\right) (-A_{20}\,Z_{11} - A_{20}\,Z_{1-1} + A_{11}\,Z_{20} - A_{11}\,Z_{02} + 2\,A_{01}\,Z_{10} + A_{1-1}\,Z_{20} + A_{1-1}\,Z_{02}$$
$$+ 2\,A_{02}\,Z_{10} + A_{02}\,Z_{11} + A_{02}\,Z_{1-1}) + e_0\,F_2\,(E_{11} + E_{1-1}) + \frac{1}{2}\,F_2\,(4\,E_{10}\,E_{01} + 2\,E_{20}\,E_{11}$$
$$+ 2\,E_{20}\,E_{1-1} + 2\,E_{11}\,E_{02} + 2\,E_{1-1}\,E_{02}) + 2\,F_3\,(E_{21} + E_{2-1}) + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,(A_{21}$$

$$+ A_{2-1}) - 4 F_3 e_0 (Z_{2-1} + Z_{21}) + (2\, a_0 F_3' - F_3)(A_{11} E_{10} + A_{1-1} E_{10} + A_{10} E_{11}$$
$$+ A_{1-2} E_{11} + 2\, A_{01} E_{20} + A_{1-1} E_{12} + 2\, A_{20} E_{01} + A_{2-2} E_{01} + A_{10} E_{1-1} + A_{12} E_{1-1}$$
$$+ A_{01} E_{22} + A_{01} E_{2-2} + A_{11} E_{1-2}) - 4 F_3 (E_{10} Z_{11} + E_{10} Z_{1-1} + E_{11} Z_{10} + E_{1-1} Z_{10}$$
$$+ E_{11} Z_{1-2} + E_{12} Z_{1-1} + 2\, E_{01} Z_{20} + E_{01} Z_{22} + E_{01} Z_{2-2} + E_{1-1} Z_{12} + E_{1-2} Z_{11}$$
$$- E_{22} Z_{01} + E_{2-2} Z_{01}) + e' \left(- a_0 F_5' + \frac{1}{2} F_5\right)(A_{10} + A_{12}) + e' F_5 (Z_{10} + Z_{10}' + Z_{12}$$
$$+ Z_{12}') - e' \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0 F_6'\right)(A_{10} + A_{1-2})\, e' F_6 (Z_{10} + Z_{12}) + 6\, F_8\, e_0 (E_{11} + E_{1-1})$$
$$+ 3\, F_8 (4\, E_{10} E_{01} + 2\, E_{20} E_{11} + 2\, E_{20} E_{1-1} + 2\, E_{11} E_{02} + 2\, E_{1-1} E_{02}) + 2\, e'\, e_0 F_{10}$$
$$+ 2\, F_{10}\, e' E_{02} + 2\, F_{12}\, e' (E_{20} + E_{2-2}) + 3\, F_{14} (2\, E_{21} E_{10} + 2\, E_{2-1} E_{10} + 2\, E_{20} E_{11}$$
$$+ 2\, E_{2-2} E_{11} + 2\, E_{1-1} E_{20} + 2\, E_{22} E_{1-1}) + 2\, F_{15}\, e' (E_{20} + E_{22})$$

$$\mathbf{2 P_{1-1}} = 4 F_1 E_{1-1} + 4 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) e_0 A_{1-1} + 2 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right)(2\, A_{01} E_{10} + 2\, A_{2-1} E_{10}$$
$$+ 2\, A_{20} E_{11} + 2\, A_{02} E_{11} + 2\, A_{11} E_{20} + 2\, A_{10} E_{01} + 2\, A_{1-2} E_{01} + 2\, A_{2-2} E_{1-1}$$
$$+ 2\, A_{11} E_{02} + 2\, A_{10} E_{2-1} + 2\, A_{1-1} E_{2-2} + 2\, A_{01} E_{1-2}) + F_2 (Z_{01} + Z_{2-1})$$
$$+ \left(\frac{1}{2} F_2 - a_0 F_2'\right)(A_{01} + A_{2-1}) + \left(- \frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2} a_0 F_2' - \frac{1}{2} a_0^2 F_2''\right)(2 A_{10} A_{11} + 2 A_{10} A_{1-1}$$
$$+ 2\, A_{20} A_{01} + 2\, A_{01} A_{02}) + \frac{1}{2} F_2 (2\, Z_{10} Z_{11} + 2\, Z_{01} Z_{20} + 2\, Z_{12} Z_{11} - 2\, Z_{1-2} Z_{11}$$
$$+ 2\, Z_{02} Z_{01} - 2\, Z_{2-2} Z_{01} + 2\, Z_{1-2} Z_{1-1}) + \left(- \frac{1}{2} F_2 + a_0 F_2'\right)(A_{10} Z_{11} - A_{20} Z_{01}$$
$$- A_{11} Z_{10} + A_{01} Z_{20} + A_{01} Z_{02} + 2\, A_{1-1} Z_{10} - A_{02} Z_{01}) + e_0 F_2 (E_{01} + E_{2-1})$$
$$+ \frac{1}{2} F_2 (2\, E_{10} E_{11} + 4\, E_{10} E_{1-1} + 2\, E_{20} E_{01} + 2\, E_{01} E_{02}) + 2\, F_3 E_{11} + (2\, a_0 F_3'$$
$$- F_3)\, e_0 A_{11} - 4 F_3 e_0 Z_{11} + (2\, a_0 F_3' - F_3)(A_{01} E_{10} + A_{21} E_{10} + A_{2-1} E_{10} + A_{22} E_{11}$$
$$+ A_{2-2} E_{11} + 2\, A_{1-1} E_{20} + A_{01} E_{12} + A_{10} E_{01} + A_{12} E_{01} + 2\, A_{20} E_{1-1} + A_{02} E_{1-1}$$
$$+ A_{10} E_{21} + A_{11} E_{22} + A_{1-1} E_{02} + A_{10} E_{2-1} + A_{11} E_{2-2}) - 4\, F_3 (E_{10} Z_{01} + E_{01} Z_{10}$$
$$+ E_{10} Z_{21} + E_{10} Z_{2-1} + E_{11} Z_{22} + E_{11} Z_{2-2} + E_{20} Z_{1-1} - E_{12} Z_{01} + E_{01} Z_{12}$$
$$+ 2\, E_{1-1} Z_{20} + E_{1-1} Z_{02} - E_{21} Z_{10} - E_{22} Z_{11} + E_{02} Z_{1-1} + E_{2-1} Z_{10} + E_{2-2} Z_{11})$$
$$+ e' \left(- a_0 F_5' + \frac{1}{2} F_5\right)(A_{20} + A_{02}) + e' F_5 (Z_{20} + Z_{20}' + Z_{02} + Z_{02}') + e' \cdot F_6$$
$$- e' \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0 F_6'\right) A_{2-2} - e' F_6 (Z_{2-2} - Z_{2-2}') + 6\, F_8 e_0 (E_{01} + E_{2-1}) + 3\, F_8 (2\, E_{10} E_{11}$$

$$+ 4 E_{10} E_{1-1} + 2 E_{20} E_{01} + 2 E_{01} E_{02}) + 2 F_{10} e' (E_{10} + E_{1-2}) + 2 F_{12} e' E_{10}$$
$$+ 6 F_{14} e_0 E_{21} + 3 F_{14} (2 E_{11} E_{10} + 2 E_{01} E_{20} + 2 E_{1-1} E_{12} + 2 E_{22} E_{01})$$

$$2 \mathbf{P}_{1-2} = 4 F_1 E_{1-2} + 4 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) e_0 A_{1-2} + 2 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) (2 A_{02} E_{10} + 2 A_{2-2} E_{10}$$
$$+ 2 A_{2-1} E_{11} + 2 A_{1-1} E_{01} + 2 A_{01} E_{1-1} + 2 A_{10} E_{02} + 2 A_{11} E_{2-1} + 2 A_{10} E_{2-2})$$
$$+ F_2 (Z_{22} + Z_{02}) + \left(\frac{1}{2} F_2 - a_0 F_2'\right) A_{02} + \left(-\frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2} a_0 F_2' - \frac{1}{2} a_0^2 F_2''\right) (2 A_{11} A_{1-1}$$
$$+ A_{01}^2 + A_{1-1}^2) + \frac{1}{2} F_2 (2 Z_{10} Z_{12} + 2 Z_{1-1} Z_{11} - Z_{01}^2 + 2 Z_{2-1} Z_{01}) + \left(-\frac{1}{2} F_2\right.$$
$$\left. + a_0 F_2'\right) (- A_{11} Z_{1-1} + A_{01} Z_{01} + A_{1-1} Z_{11} + A_{1-1} Z_{1-1}) + e_0 F_2 E_{02}$$
$$+ \frac{1}{2} F_2 (+ 2 E_{11} E_{1-1} + E_{01}^2 + E_{1-1}^2) + 2 F_3 E_{12} + \left(2 a_0 F_3' - F_3\right) e_0 A_{12}$$
$$- 4 F_3 e_0 Z_{12} + (2 a_0 F_3' - F_3) (A_{22} E_{10} + A_{02} E_{10} + A_{2-2} E_{10} + A_{01} E_{11}$$
$$+ A_{11} E_{01} + A_{21} E_{1-1} + A_{2-1} E_{1-1} + A_{1-1} E_{21} + A_{10} E_{22} + A_{10} E_{02} + A_{1-1} E_{2-1}$$
$$+ A_{10} E_{2-2}) - 4 F_3 (E_{11} Z_{01} + E_{01} Z_{11} + E_{10} Z_{22} + E_{10} Z_{02} + E_{10} Z_{2-2} + E_{1-1} Z_{21}$$
$$+ E_{1-1} Z_{2-1} - E_{21} Z_{1-1} - E_{22} Z_{10} + E_{02} Z_{10} + E_{2-1} Z_{1-1} + E_{2-2} Z_{10}) + e' \left(- a_0 F_5'\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} F_5\right) A_{2-1} + e' F_5 (Z_{2-1} + Z_{2-1}') - e' \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0 F_6'\right) A_{01} - e' F_6 (Z_{2-1} - Z_{2-1}')$$
$$+ 6 F_8 e_0 (E_{02} + E_{2-2}) + 3 F_8 (2 E_{11} E_{1-1} + E_{01}^2 + E_{1-1}^2) + 2 F_{10} e' E_{1-1} + 2 F_{12} e' E_{11}$$
$$+ F_{13} e'^2 + 6 F_{14} e_0 E_{22} + 3 F_{14} (2 E_{12} E_{10} + E_{11}^2 + 2 E_{21} E_{01})$$

$$2 \mathbf{P}_{21} = 4 F_1 E_{21} + 4 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) e_0 A_{21} + 2 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) (2 A_{11} E_{10} + 2 A_{10} E_{11}$$
$$+ 2 A_{01} E_{20} + 2 A_{1-1} E_{12} + 2 A_{20} E_{01} + 2 A_{22} E_{01} + 2 A_{12} E_{1-1} + 2 A_{01} E_{22}) - F_2 Z_{11}$$
$$+ \left(\frac{1}{2} F_2 - a_0 F_2'\right) A_{11} + \left(-\frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2} a_0 F_2' - \frac{1}{2} a_0^2 F_2''\right) (2 A_{10} A_{01} + 2 A_{20} A_{11}$$
$$+ 2 A_{20} A_{1-1} + 2 A_{1-1} A_{02}) + \frac{1}{2} F_2 (- 2 Z_{10} Z_{01} + 2 Z_{1-1} Z_{20} - 2 Z_{11} Z_{20} + 2 Z_{11} Z_{22}$$
$$+ 2 Z_{01} Z_{12} - 2 Z_{22} Z_{1-1} - 2 Z_{02} Z_{1-1}) + \left(a_0 F_2' - \frac{1}{2} F_2\right) (- A_{10} Z_{01} + A_{20} Z_{11}$$
$$+ A_{20} Z_{1-1} + A_{11} Z_{20} - A_{01} Z_{10} - A_{1-1} Z_{20} - A_{1-1} Z_{02} - A_{02} Z_{1-1}) + e_0 F_2 E_{11}$$
$$+ \frac{1}{2} F_2 (2 E_{10} E_{01} + 2 E_{20} E_{11} + 2 E_{20} E_{1-1} + 2 E_{1-1} E_{02}) + 2 F_3 E_{01} + (2 a_0 F_3'$$

$$-F_3)\, e_0 A_{01} + 4 F_3 e_0 Z_{01} + (2 a_0 F_3' - F_3)\,(A_{11} E_{10} + A_{1-1} E_{10} + A_{10} E_{11} + A_{12} E_{11}$$
$$+ A_{11} E_{12} + A_{02} E_{01} + A_{10} E_{1-1} + A_{1-2} E_{1-1} + A_{01} E_{02} + A_{1-1} E_{1-2}) - 4 F_3 (-E_{10} Z_{11}$$
$$+ E_{10} Z_{1-1} + E_{11} Z_{10} - E_{1-1} Z_{10} - E_{11} Z_{12} + E_{12} Z_{11} - E_{01} Z_{02} + E_{1-1} Z_{1-2}$$
$$- E_{1-2} Z_{1-1} + E_{02} Z_{01}) + e' \left(- a_0 F_5' + \frac{1}{2} F_5\right) A_{10} + e' F_5 (-Z_{10} - Z_{10}') - \left(\frac{1}{2} F_6\right.$$
$$\left.- a_0 F_6'\right) e' A_{12} - e' F_6 (-Z_{10} + Z_{10}') + 6 F_8 e_0 E_{11} + 3 F_8 (2 E_{10} E_{01} + 2 E_{20} E_{11}$$
$$+ 2 E_{20} E_{1-1} + 2 E_{1-1} E_{02}) + 2 F_{10} e' (E_{20} + E_{22}) + 2 F_{12} e' E_{02} + 6 F_{14} e_0 E_{1-1}$$
$$+ 3 F_{14} (2 E_{01} E_{10} + 2 E_{2-1} E_{10} + 2 E_{20} E_{11} + 2 E_{02} E_{11} + 2 E_{1-2} E_{01} + 2 E_{2-2} E_{1-1})$$
$$+ 2 F_{15} e' e_0$$

$$\mathbf{2\,P_{22}} = 4 F_1 E_{22} + 4 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_2\right) e_0 A_{22} + 2 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) (2 A_{12} E_{10} + 2 A_{11} E_{11} + 2 A_{10} E_{12}$$
$$+ 2 A_{21} E_{01} + 2 A_{01} E_{21}) - F_2 Z_{12} + \left(\frac{1}{2} F_2 - a_0 F_2'\right) A_{12} + \left(- \frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2} a_2 F_2'\right.$$
$$\left.- \frac{1}{2} a_0^2 F_2''\right) (2 A_{10} A_{02} + 2 A_{11} A_{01}) + \frac{1}{2} F_2 (- 2 Z_{10} Z_{02} - 2 Z_{21} Z_{11} - 2 Z_{11} Z_{01}$$
$$+ 2 Z_{21} Z_{1-1}) + \left(a_0 F_2' - \frac{1}{2} F_2\right) (- A_{10} Z_{02} - A_{11} Z_{01} - A_{01} Z_{11} - A_{02} Z_{10}) + e_0 F_2 E_{12}$$
$$+ \frac{1}{2} F_2 (2 E_{10} E_{02} + 2 E_{11} E_{01}) + 2 F_3 E_{02} + (2 a_0 F_3' - F_3)\, e_0 A_{02} + 4 e_0 F_3 Z_{02}$$
$$+ (2 a_0 F_3' - F_3)\,(A_{12} E_{10} + A_{1-2} E_{10} + A_{1-1} E_{11} + A_{10} E_{12} + A_{01} E_{01} + A_{11} E_{1-1}$$
$$+ A_{10} E_{1-2}) - 4 F_3 (E_{11} Z_{1-1} - E_{01} Z_{01} - E_{1-1} Z_{11} - E_{10} Z_{12} + E_{10} Z_{1-2} + E_{12} Z_{10}$$
$$- E_{1-2} Z_{10}) + e' \left(- a_0 F_5' + \frac{1}{2} F_5\right) A_{11} + e' F_5 (-Z_{11} - Z_{11}^1) - e' F_6 (Z_{11} - Z_{11}')$$
$$+ 6 F_8 e_0 E_{12} + 3 F_8 (2 E_{10} E_{02} + 2 E_{11} E_{01}) + 2 F_{10} e' E_{21} + 6 F_{14} e_0 E_{1-2}$$
$$+ 3 F_{14} (2 E_{02} E_{10} + 2 E_{2-2} E_{10} + 2 E_{2-1} E_{11} + 2 E_{1-1} E_{01}) + 2 F_{15} e' E_{01}$$

$$\mathbf{2\,P_{02}} = 4 F_1 E_{02} + 4 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) e_0 A_{02} + 2 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) (2 A_{12} E_{10} + 2 A_{1-2} E_{10}$$
$$+ 2 A_{1-1} E_{11} + 2 A_{10} E_{12} + 2 A_{01} E_{01} + 2 A_{11} E_{1-1} + 2 A_{10} E_{1-2}) + F_2 (Z_{12} + Z_{1-2})$$
$$+ \left(\frac{1}{2} F_2 - a_0 F_2'\right) A_{1-2} + \left(- \frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2} a_0 F_2' - \frac{1}{2} a_0^2 F_2''\right) (4 A_{10} A_{02} + 2 A_{11} A_{01}$$
$$+ 2 A_{01} A_{1-1}) + \frac{1}{2} F_2 (2 Z_{10} Z_{22} + 2 Z_{10} Z_{2-2} - 2 Z_{01} Z_{11} + 2 Z_{2-1} Z_{11} + 2 Z_{1-1} Z_{01}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2 Z_{21} Z_{1-1}) + \left(-\frac{1}{2} F_2 + a_0 F_2'\right) (A_{11} Z_{01} + A_{01} Z_{11} + A_{01} Z_{1-1} - A_{1-1} Z_{01}) \\
&+ e_0 F_2 (E_{12} + E_{1-2}) + \frac{1}{2} F_2 (4 E_{10} E_{02} + 2 E_{11} E_{01} + 2 E_{01} E_{1-1}) + 2 F_3 E_{22} \\
&+ (2 a_0 F_3' - F_3) e_0 A_{22} - 4 F_3 e_0 (Z_{22} + Z_{2-2}) + (2 a_0 F_3' - F_3) (A_{12} E_{10} + A_{1-2} E_{10} \\
&+ A_{11} E_{11} + A_{10} E_{12} + A_{21} E_{01} + A_{1-1} E_{1-1} + A_{01} E_{21} + A_{2-1} E_{01}) + A_{01} E_{2-1} \\
&+ A_{10} E_{1-2}) - 4 F_3 (E_{11} Z_{11} + E_{1-1} Z_{1-1} + E_{10} Z_{12} + E_{10} Z_{1-2} + E_{12} Z_{10} + E_{01} Z_{21} \\
&+ E_{01} Z_{2-1} + E_{1-2} Z_{10} + E_{21} Z_{01} - E_{2-1} Z_{01}) + e' \left(- a_0 F_5' + \frac{1}{2} F_5\right) A_{1-1} \\
&+ e' F_5 (Z_{1-1} + Z_{1-1}') - \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0 F_6\right) e' A_{11} - e' F_6 (Z_{1-1} - Z_{1-1}') + 6 F_8 e_0 (E_{12} \\
&+ E_{1-2}) + 3 F_8 (4 E_{10} E_{02} + 2 E_{11} E_{01} + 2 E_{01} E_{1-1}) + 2 F_{10} e' E_{01} + 2 F_{12} e' E_{21} \\
&+ 3 F_{14} (2 E_{22} E_{10} + 2 E_{2-2} E_{10} + 2 E_{21} E_{11} + 2 E_{2-1} E_{1-1}) + 2 F_{15} e' E_{2-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{2 P_{2-1}} = {} & 4 F_1 E_{2-1} + 4 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) e_0 A_{2-1} + 2 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) (2 A_{1-1} E_{10} + 2 A_{1-2} E_{11} \\
&+ 2 A_{01} E_{20} + 2 A_{20} E_{01} + 2 A_{2-2} E_{01} + 2 A_{10} E_{1-1} + 2 A_{01} E_{2-2} + 2 A_{11} E_{1-2}) \\
&- F_2 Z_{1-1} + \left(\frac{1}{2} F_2 - a_0 F_2'\right) A_{1-1} + \left(-\frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2} a_0 F_2' - \frac{1}{2} a^2 F_2''\right) (2 A_{10} A_{01} \\
&+ 2 A_{20} A_{11} + 2 A_{20} A_{1-1} + 2 A_{11} A_{02}) + \frac{1}{2} F_2 (2 Z_{10} Z_{01} + 2 Z_{11} Z_{20} - 2 Z_{1-1} Z_{20} \\
&+ 2 Z_{02} Z_{11} - 2 Z_{2-2} Z_{11} - 2 Z_{1-2} Z_{01} + 2 Z_{2-2} Z_{1-1}) + \left(-\frac{1}{2} F_2 + a_0 F_2'\right) (A_{10} Z_{01} \\
&+ A_{20} Z_{11} + A_{20} Z_{1-1} - A_{11} Z_{20} + A_{11} Z_{02} - A_{01} Z_{10} + A_{1-1} Z_{20} - A_{02} Z_{11}) + e_0 F_2 E_{1-1} \\
&+ \frac{1}{2} F_2 (2 E_{10} E_{01} + 2 E_{20} E_{11} + 2 E_{20} E_{1-1} + 2 E_{11} E_{02}) + 2 F_3 E_{01} + (2 a_2 F_3' - F_3) e_0 A_{01} \\
&- 4 F_3 e_0 Z_{01} + (2 a_0 F_3' - F_3) (A_{10} E_{10} + A_{1-1} E_{10} + A_{10} E_{11} + A_{12} E_{11} + A_{11} E_{12} \\
&+ A_{02} E_{01} + A_{10} E_{1-1} + A_{1-2} E_{1-1} + A_{01} E_{02} + A_{1-1} E_{1-2}) - 4 F_3 (E_{10} Z_{11} \\
&- E_{10} Z_{1-1} - E_{11} Z_{10} + E_{1-1} Z_{10} + E_{11} Z_{12} - E_{12} Z_{11} + E_{01} Z_{02} - E_{1-1} Z_{1-2} \\
&+ E_{1-2} Z_{1-1} - E_{02} Z_{01}) + e' \left(\frac{1}{2} F_5 - a_0 F_5'\right) A_{1-2} + e' F_5 (- Z_{1-2} - Z_{1-2}') \\
&- e' \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0 F_6'\right) A_{10} - e' F_6 (- Z_{1-2} + Z_{1-2}') + 6 F_8 e_0 E_{1-1} + 3 F_8 (2 E_{10} E_{01} \\
&+ 2 E_{20} E_{11} + 2 E_{20} E_{1-1} + 2 E_{11} E_{02}) + 2 F_{10} e' (E_{20} + E_{2-2}) + 2 F_{12} e' e_0 \\
&+ 6 F_{14} e_0 E_{11} + 3 F_{14} (2 E_{01} E_{10} + 2 E_{21} E_{10} + 2 E_{22} E_{11} + 2 E_{1-1} E_{20} + 2 E_{01} E_{12} \\
&+ 2 E_{02} E_{1-1}) + 2 F_{15} e' E_{02}
\end{aligned}
$$

$$2\boldsymbol{P}_{2-2} = 4F_1 E_{2-2} + 4\left(a_0 F_1' - \frac{1}{2}F_1\right) e_0 A_{2-2} + 2\left(a_0 F_1' - \frac{1}{2}F_1\right)(2A_{1-2}E_{10} + 2A_{2-1}E_{01}$$
$$+ 2A_{1-1}E_{1-1} + 2A_{01}E_{2-1} + 2A_{10}E_{1-2}) - F_2 Z_{1-2} + \left(\frac{1}{2}F_2 - a_0 F_2'\right) A_{1-2}$$
$$+ \left(-\frac{3}{8}F_2 + \frac{1}{2}a_0 F_2' - \frac{1}{2}a_0^2 F_2''\right)(2A_{10}A_{02} + 2A_{01}A_{1-1}) + \frac{1}{2}F_2(2Z_{10}Z_{02} + 2Z_{2-1}Z_{11}$$
$$+ 2Z_{1-1}Z_{01} - 2Z_{2-1}Z_{1-1}) + \left(-\frac{1}{2}F_2 + a_0 F_2'\right)(A_{10}Z_{02} - A_{01}Z_{1-1} + A_{1-1}Z_{01}$$
$$- A_{02}Z_{10}) + e_0 F_2 E_{1-2} + \frac{1}{2}F_2(2E_{10}E_{02} + 2E_{01}E_{1-1}) + 2F_3 E_{02} + (2a_0 F_3'$$
$$- F_3) e_0 A_{02} - 4F_3 e_0 Z_{02} + (2a_0 F_3' - F_3)(A_{12}E_{10} + A_{1-2}E_{10} + A_{1-1}E_{11} + A_{10}E_{12}$$
$$+ A_{01}E_{01} + A_{11}E_{1-1} + A_{10}E_{1-2}) - 4F_3(-E_{11}Z_{1-1} + E_{01}Z_{01} + E_{1-1}Z_{11}$$
$$+ E_{10}Z_{12} - E_{10}Z_{1-2} - E_{12}Z_{10} + E_{1-2}Z_{10}) - e'\left(\frac{1}{2}F_6 - a_0 F_6'\right) A_{1-1} + 6F_8 e_0 E_{1-2}$$
$$+ 3F_8(2E_{10}E_{02} + 2E_{01}E_{1-1}) + 2F_{10}e' E_{2-1} + 2F_{12}e' E_{01} + 6F_{14}e_0 E_{12}$$
$$+ 3F_{14}(2E_{22}E_{10} + 2E_{02}E_{10} + 2E_{01}E_{11} + 2E_{21}E_{1-1})$$

$$2\boldsymbol{P}_{03} = 4F_1 E_{03} + 4\left(a_0 F_1' - \frac{1}{2}F_1\right) e_0 A_{03} + 2\left(a_0 F_1' - \frac{1}{2}F_1\right)(2A_{1-2}E_{11} + 2A_{1-1}E_{12}$$
$$+ 2A_{02}E_{01} + 2A_{12}E_{1-1} + 2A_{01}E_{02} + 2A_{11}E_{1-2}) + \left(-\frac{3}{8}F_2 + \frac{1}{2}a_0 F_2'\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}a_0^2 F_2''\right)(2A_{11}A_{02} + 2A_{1-1}A_{02}) + \frac{1}{2}F_2(-2Z_{02}Z_{11} + 2Z_{2-2}Z_{11} - 2Z_{01}Z_{12}$$
$$+ 2Z_{1-2}Z_{01} + 2Z_{22}Z_{1-1} + 2Z_{02}Z_{1-1}) + \left(-\frac{1}{2}F_2 + a_0 F_2'\right)(+A_{11}Z_{02} - A_{1-1}Z_{02}$$
$$+ A_{02}Z_{11} + A_{02}Z_{1-1}) + \frac{1}{2}F_2(E_{11}E_{02} + E_{1-1}E_{02}) + (2a_0 F_3' - F_3)(A_{12}E_{11}$$
$$+ A_{11}E_{12} + A_{22}E_{01} + A_{2-2}E_{01} + A_{1-2}E_{1-1} + A_{01}E_{22} + A_{01}E_{2-2} + A_{1-1}E_{1-2})$$
$$- 4F_3(E_{11}Z_{12} + E_{12}Z_{11} + E_{01}Z_{22} + E_{01}Z_{2-2} + E_{1-1}Z_{1-2} + E_{1-2}Z_{1-1} + E_{22}Z_{01}$$
$$- E_{2-2}Z_{01}) + e'\left(\frac{1}{2}F_5 - a_0 F_5'\right) A_{1-2} + e' F_5(Z_{1-2} + Z_{1-2}') - \left(\frac{1}{2}F_6 - a_0 F_6'\right) e' A_{12}$$
$$- e' F_6(Z_{1-2} - Z_{1-2}') + 3F_8(2E_{11}E_{02} + 2E_{1-1}E_{02}) + 2F_{10}e' E_{02} + 2F_{12}e' E_{22}$$
$$+ 3F_{14}(2E_{22}E_{11} + 2E_{2-2}E_{1-1}) + 2F_{15}e' E_{2-2}$$

$$2\boldsymbol{P}_{31} = 2\left(a_0 F_1' - \frac{1}{2}F_1\right)(2A_{21}E_{10} + 2A_{20}E_{11} + 2A_{11}E_{20} + 2A_{22}E_{1-1} + 2A_{10}E_{21}$$
$$+ 2A_{1-1}E_{22}) - F_2 Z_{21} + \left(\frac{1}{2}F_2 - a_0 F_2'\right) A_{21} + \left(-\frac{3}{8}F_2 + \frac{1}{2}a_0 F_2' - \frac{1}{2}a_0^2 F_2''\right).$$

$$\cdot (2 A_{11} A_{10} + 2 A_{20} A_{01}) + \frac{1}{2} F_2 (- 2 Z_{10} Z_{11} - 2 Z_{01} Z_{20} - 2 Z_{1-1} Z_{12} + 2 Z_{22} Z_{01})$$

$$+ \left(a_0 F'_2 - \frac{1}{2} F_2\right) (- A_{10} Z_{11} - A_{20} Z_{01} - A_{11} Z_{10} - A_{01} Z_{20}) + e_0 F_2 E_{21}$$

$$+ \frac{1}{2} F_2 (2 E_{10} E_{11} + 2 E_{20} E_{01}) + 2 F_3 E_{11} + (2 a_0 F'_3 - F_3) e_0 A_{11} + 4 F_3 e_0 Z_{11} + (2 a_0 F'_3$$

$$- F_3) (A_{01} E_{10} + A_{21} E_{10} + A_{22} E_{11} + A_{1-1} E_{20} + A_{01} E_{12} + A_{10} E_{01} + A_{12} E_{01}$$

$$+ A_{20} E_{1-1} + A_{02} E_{1-1} + A_{10} E_{21} + A_{11} E_{22} + A_{1-1} E_{02}) - 4 F_3 (- E_{10} Z_{01} - E_{01} Z_{10}$$

$$- E_{10} Z_{21} - E_{11} Z_{22} + E_{20} Z_{1-1} + E_{12} Z_{01} - E_{01} Z_{12} - E_{1-1} Z_{20} - E_{1-1} Z_{02} + E_{21} Z_{10}$$

$$+ E_{22} Z_{11} - E_{02} Z_{1-1}) + e' \left(\frac{1}{2} F_5 - a_0 F'_5\right) A_{20} + e' F_5 (- Z_{20} - Z'_{20}) - e' F_6 (- Z_{20}$$

$$+ Z'_{20}) + 6 F_8 e_0 E_{21} + 3 F_8 (2 E_{10} E_{11} + 2 E_{20} E_{01}) + (2 F_{12} e' E_{12} + 6 F_{14} e_0 E_{01}$$

$$+ 3 F_{14} (2 E_{11} E_{10} + 2 E_{1-1} E_{10} + 2 E_{12} E_{11} + 2 E_{02} E_{01} + 2 E_{1-2} E_{1-1}) + 2 F_{15} e' E_{10}$$

$$2 \boldsymbol{P}_{3-1} = 2 \left(a_0 F'_1 - \frac{1}{2} F_1\right) (2 A_{2-1} E_{10} + 2 A_{2-2} E_{11} + 2 A_{1-1} E_{20} + 2 A_{20} E_{1-1} + 2 A_{10} E_{2-1}$$

$$+ 2 A_{11} E_{2-2}) - F_2 Z_{2-1} + \left(\frac{1}{2} F_2 - a_0 F'_2\right) A_{2-1} + \left(- \frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2} a_0 F'_2 - \frac{1}{2} a_0^2 F''_2\right)$$

$$\cdot (2 A_{1-1} A_{10} + A_{20} A_{01}) + \frac{1}{2} F_2 (- 2 Z_{10} Z_{1-1} + 2 Z_{01} Z_{20} - 2 Z_{11} Z_{1-2} - 2 Z_{2-2} Z_{01})$$

$$+ \left(a_0 F'_2 - \frac{1}{2} F_2\right) (- A_{10} Z_{1-1} + A_{20} Z_{01} - A_{01} Z_{20} - A_{1-1} Z_{10}) + e_0 F_2 E_{2-1}$$

$$+ \frac{1}{2} F_2 (2 E_{10} E_{1-1} + 2 E_{20} E_{01}) + 2 F_3 E_{1-1} + (2 a_0 F'_3 - F_3) e_0 A_{1-1} + 4 F_3 e_0 Z_{1-1}$$

$$+ (2 a_0 F'_3 - F_3) (A_{01} E_{10} + A_{2-1} E_{10} + A_{20} E_{11} + A_{02} E_{11} + A_{11} E_{20} + A_{10} E_{01}$$

$$+ A_{1-2} E_{01} + A_{2-2} E_{1-1} + A_{11} E_{02} + A_{10} E_{2-1} + A_{1-1} E_{2-2} + A_{01} E_{1-2})$$

$$- 4 F_3 (+ E_{10} Z_{01} - E_{01} Z_{10} - E_{10} Z_{2-1} - E_{11} Z_{20} + E_{11} Z_{02} + E_{20} Z_{11} - E_{01} Z_{1-2}$$

$$- E_{1-1} Z_{2-2} - E_{1-2} Z_{01} - E_{02} Z_{11} + E_{2-1} Z_{10} + E_{2-2} Z_{1-1}) + e' F_5 (- Z_{2-2}$$

$$- Z'_{2-2}) - e' \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0 F'_6\right) A_{20} - e' F_6 (- Z_{2-2} + Z'_{2-2}) + 6 F_8 e_0 E_{2-1}$$

$$+ 3 F_8 (2 E_{10} E_{1-1} + 2 E_{20} E_{01}) + 2 F_{12} e' E_{10} + 6 F_{14} e_0 E_{01} + 3 F_{14} (2 E_{11} E_{10}$$

$$+ 2 E_{1-1} E_{10} + 2 E_{12} E_{11} + 2 E_{02} E_{01} + 2 E_{1-2} E_{1-1}) + 2 F_{15} e' E_{1-2}$$

$$2 \boldsymbol{P}_{32} = 2 \left(a_0 F'_1 - \frac{1}{2} F_1\right) (2 A_{22} E_{10} + 2 A_{21} E_{11} + 2 A_{11} E_{21} + 2 A_{10} E_{22}) - F_2 Z_{22} + \left(\frac{1}{2} F_2\right.$$

$$\left. - a_0 F'_2\right) A_{22} + \left(- \frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2} a_0 F'_2 - \frac{1}{2} a_0^2 F''_2\right) A_{11}^2 + \frac{1}{2} F_2 (- 2 Z_{10} Z_{12} - Z_{11}^2 - 2 Z_{21} Z_{01})$$

$$-\left(a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,F_2\right) A_{11}\,Z_{11} + e_0\,F_2\,E_{22} + \frac{1}{2}\,F_2\,E_{11}^2 + 2\,F_3\,E_{12} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,e_0\,A_{12}$$

$$+ 4\,F_3\,e_0\,Z_{12} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,(A_{22}\,E_{10} + A_{02}\,E_{10} + A_{01}\,E_{11} + A_{11}\,E_{01} + A_{21}\,E_{1-1}$$

$$+ A_{1-1}\,E_{21} + A_{10}\,E_{22} + A_{10}\,E_{02}) - 4\,F_3\,(-E_{11}\,Z_{01} - E_{01}\,Z_{11} - E_{10}\,Z_{22} - E_{10}\,Z_{02}$$

$$- E_{1-1}\,Z_{21} + E_{21}\,Z_{1-1} + E_{22}\,Z_{10} - E_{02}\,Z_{10}) + e'\left(\frac{1}{2}\,F_5 - a_0\,F_5'\right) A_{21} + e'\,F_5\,(-Z_{21}$$

$$- Z_{21}') - e'\,F_6\,(-Z_{21} + Z_{21}') + 6\,F_8\,e_0\,E_{22} + 3\,F_8\,E_{11}^2 + 6\,F_{14}\,e_0\,E_{02} + 3\,F_{14}\,(2\,E_{12}\,E_{10}$$

$$+ 2\,E_{1-2}\,E_{10} + 2\,E_{1-1}\,E_{11} + E_{01}^2) + 2\,F_{15}\,e'\,E_{11}$$

$$\mathbf{2\,P_{3-2}} = 2\left(a_0\,F_1' - \frac{1}{2}\,F_1\right)(2\,A_{2-2}\,E_{10} + 2\,A_{2-1}\,E_{1-1} + 2\,A_{1-1}\,E_{2-1} + 2\,A_{10}\,E_{2-2}) - F_2\,Z_{2-2}$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\,F_2 - a_0\,F_2'\right) A_{2-2} + \left(-\frac{3}{8}\,F_2 + \frac{1}{2}\,a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,a_0^2\,F_2''\right) A_{1-1}^2 + \frac{1}{2}\,F_2\,(-2\,Z_{10}\,Z_{1-2}$$

$$- Z_{1-1}^2 + 2\,Z_{2-1}\,Z_{01}) - \left(a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,F_2\right) A_{1-1}\,Z_{1-1} + e_0\,F_2\,E_{2-2} + \frac{1}{2}\,F_2\,E_{1-1}^2$$

$$+ 2\,F_3\,E_{1-2} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,e_0\,A_{1-2} + 4\,F_3\,e_0\,Z_{1-2} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,(A_{02}\,E_{10}$$

$$+ A_{2-2}\,E_{10} + A_{2-1}\,E_{11} + A_{1-1}\,E_{01} + A_{01}\,E_{1-1} + A_{10}\,E_{02} + A_{11}\,E_{2-1} + A_{10}\,E_{2-2})$$

$$- 4\,F_3\,(-E_{01}\,Z_{1-1} + E_{1-1}\,Z_{01} + E_{10}\,Z_{02} - E_{10}\,Z_{2-2} - E_{02}\,Z_{10} - E_{11}\,Z_{2-1} + E_{2-1}\,Z_{11}$$

$$+ E_{2-2}\,Z_{10}) - e'\left(\frac{1}{2}\,F_6 - a_0\,F_6'\right) A_{2-1} - e'\,F_6\,(-Z_{2-1} + Z_{2-1}') + 6\,F_8\,e_0\,E_{2-2}$$

$$+ 3\,F_8\,E_{1-1}^2 + 2\,F_{12}\,e'\,E_{1-1} + F_{13}\,e'^2\,E_{20} + 6\,F_{14}\,e_0\,E_{02} + 3\,F_{14}\,(2\,E_{12}\,E_{10} + 2\,E_{1-2}\,E_{10}$$

$$+ 2\,E_{1-1}\,E_{11} + E_{01}^2)$$

$$\mathbf{2\,P_{41}} = +\,2\left(-\frac{3}{8}\,F_2 + \frac{1}{2}\,a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,a_0^2\,F_2''\right) A_{20}\,A_{11} + \frac{1}{2}\,F_2\,(-2\,Z_{11}\,Z_{20} - 2\,Z_{10}\,Z_{21} - 2\,Z_{22}\,Z_{1-1})$$

$$- 2\left(a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,F_2\right) A_{20}\,Z_{11} + F_2\,E_{20}\,E_{11} + 2\,F_3\,E_{21} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,e_0\,A_{21}$$

$$+ 4\,F_3\,e_0\,Z_{21} + (2\,a_0\,F_3' - F_3)\,(A_{11}\,E_{10} + A_{10}\,E_{11} + A_{01}\,E_{20} + A_{1-1}\,E_{12} + A_{20}\,E_{01}$$

$$+ A_{22}\,E_{01} + A_{12}\,E_{1-1} + A_{01}\,E_{22}) - 4\,F_3\,(-E_{10}\,Z_{11} - E_{11}\,Z_{10} - E_{20}\,Z_{01} - E_{12}\,Z_{1-1}$$

$$- E_{01}\,Z_{20} - E_{01}\,Z_{22} - E_{1-1}\,Z_{12} + E_{22}\,Z_{01}) + 6\,F_8\,E_{20}\,E_{11} + 2\,F_{12}\,e'\,E_{22} + 6\,F_{14}\,e_0\,E_{11}$$

$$+ 3\,F_{14}\,(2\,E_{01}\,E_{10} + 2\,E_{21}\,E_{10} + 2\,E_{22}\,E_{11} + 2\,E_{1-1}\,E_{20} + 2\,E_{01}\,E_{12} + 2\,E_{02}\,E_{1-1})$$

$$+ 2\,F_{15}\,e'\,E_{20}$$

$$\mathbf{2\,P_{4-1}} = 2\left(-\frac{3}{8}\,F_2 + \frac{1}{2}\,a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,a_0^2\,F_2''\right) A_{20}\,A_{1-1} + \frac{1}{2}\,F_2\,(-2\,Z_{10}\,Z_{2-1} - 2\,Z_{1-1}\,Z_{20}$$

$$- 2\,Z_{2-2}\,Z_{11}) - 2\left(a_0\,F_2' - \frac{1}{2}\,F_2\right) A_{20}\,Z_{1-1} + F_2\,E_{20}\,E_{1-1} + 2\,F_3\,E_{2-1} + (2\,a_0\,F_3'$$

$$-F_3)\, e_0\, A_{2-1} + 4\, F_3\, e_0\, Z_{2-1} + (2\, a_0\, F_3' - F_3)\,(A_{1-1}\, E_{10} + A_{1-2}\, E_{11} + A_{01}\, E_{20} + A_{20}\, E_{01} + A_{2-2}\, E_{01} + A_{10}\, E_{1-1} + A_{01}\, E_{2-2} + A_{11}\, E_{1-2}) - 4\, F_3\,(-E_{10} Z_{1-1} - E_{1-1} Z_{10} - E_{11}\, Z_{1-2} + E_{20}\, Z_{01} - E_{01}\, Z_{20} - E_{01} Z_{2-2} - E_{1-2} Z_{11} - E_{2-2}\, Z_{01}) + 6\, F_8\, E_{20}\, E_{1-1} + 2\, F_{12}\, e'\, E_{20} + 6\, F_{14}\, e_0\, E_{1-1} + 3\, F_{14}\,(2\, E_{01}\, E_{10} + 2\, E_{2-1}\, E_{10} + 2\, E_{20}\, E_{11} + 2\, E_{02}\, E_{11} + 2\, E_{1-2}\, E_{01} + 2\, E_{2-2}\, E_{1-1}) + 2\, F_{15}\, e'\, E_{2-2}$$

$$2\, \boldsymbol{P_{42}} = \frac{1}{2} F_2\,(-2\, Z_{10}\, Z_{22} - 2\, Z_{21}\, Z_{11}) + 2\, F_3\, E_{22} + (2\, a_0\, F_3' - F_3)\, e_0\, A_{22} + 4\, F_3\, e_0\, Z_{22} + (2\, a_0\, F_3' - F_3)\,(A_{12}\, E_{10} + A_{11}\, E_{11} + A_{10}\, E_{12} + A_{21}\, E_{01} + A_{01}\, E_{21}) - 4\, F_3\,(-E_{11}\, Z_{11} - E_{10} Z_{12} - E_{12} Z_{10} - E_{01} Z_{21} - E_{21}\, Z_{01}) + 6\, F_{14}\, e_0\, E_{12} + 3\, F_{14}\,(2\, E_{22}\, E_{10} + 2\, E_{02}\, E_{10} + 2\, E_{01}\, E_{11} + 2\, E_{21}\, E_{1-1}) + 2\, F_{15}\, e'\, E_{21}$$

$$2\, \boldsymbol{P_{4-2}} = \frac{1}{2} F_2\,(-2 Z_{10} Z_{2-2} - 2 Z_{2-1} Z_{1-1}) + 2\, F_3\, E_{2-2} + (2\, a_0 F_3' - F_3)\, e_0\, A_{2-2} + 4\, F_3\, e_0 Z_{2-2} + (2\, a_0\, F_3' - F_3)\,(A_{1-2}\, E_{10} + A_{2-1}\, E_{01} + A_{1-1}\, E_{1-1} + A_{01}\, E_{2-1} + A_{10}\, E_{1-2}) - 4 F_3 (-E_{1-1} Z_{1-1} - E_{10} Z_{1-2} - E_{01} Z_{2-1} - E_{1-2} Z_{10} + E_{2-1} Z_{01}) + 2\, F_{12}\, e'\, E_{2-1} + 6\, F_{14}\, e_0\, E_{1-2} + 3\, F_{14}\,(2\, E_{02}\, E_{10} + 2\, E_{2-2}\, E_{10} + 2\, E_{2-1}\, E_{11} + 2\, E_{1-1})\, E_{01})$$

$$2\, \boldsymbol{P_{13}} = 2\left(a_0\, F_1' - \frac{1}{2} F_1\right)(2\, A_{02}\, E_{11} + 2\, A_{01}\, E_{12} + 2\, A_{12}\, E_{01} + 2\, A_{1-1}\, E_{22} + 2\, A_{11}\, E_{02} + 2\left(-\frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2}\, a_0\, F_2' - \frac{1}{2}\, a_0^2\, F_2''\right) A_{01}\, A_{02} + \frac{1}{2}\, F_2\,(-2 Z_{12}\, Z_{11} + 2 Z_{1-2}\, Z_{11} + 2 Z_{1-1} Z_{12} - 2 Z_{22} Z_{01} - 2 Z_{02} Z_{01}) + \left(a_0 F_2' - \frac{1}{2}\, F_2\right)(-A_{01} Z_{02} - A_{02} Z_{01}) + F_2\, E_{01} E_{02} + (2\, a_0\, F_3' - F_3)\,(A_{22}\, E_{11} + A_{2-2}\, E_{11} + A_{1-2}\, E_{01} + A_{02}\, E_{1-1} + A_{11}\, E_{22} + A_{1-1}\, E_{02} + A_{11} E_{2-2} + A_{01} E_{1-2}) - 4 F_3 (E_{11} Z_{22} + E_{11} Z_{2-2} + E_{01} Z_{1-2} - E_{1-1} Z_{02} - E_{1-2} Z_{01} + E_{22} Z_{11} + E_{02} Z_{1-1} - E_{2-2} Z_{11}) + e' \left(\frac{1}{2}\, F_5 - a_0\, F_5'\right) A_{02} + e'\, F_5\,(-Z_{02} - Z_{02}') - \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0\, F_6'\right) A_{22} - e'\, F_6\,(-Z_{02} + Z_{02}') + 6\, F_8\, E_{01}\, E_{02} + 2\, F_{10}\, e'\, E_{12} + 3 F_{14}\,(2\, E_{2-2}\, E_{01} + 2\, E_{1-2}\, E_{1-1}) + 2\, F_{15}\, e'\, E_{1-2}$$

$$2\, \boldsymbol{P_{1-3}} = 2\left(a_0\, F_1' - \frac{1}{2}\, F_1\right)(2\, A_{2-2}\, E_{11} + 2\, A_{1-2}\, E_{01} + 2\, A_{02}\, E_{1-1} + 2\, A_{1-1}\, E_{02} + 2\, A_{11}\, E_{2-2} + 2\, A_{01}\, E_{1-2}) + 2\left(-\frac{3}{8}\, F_2 + \frac{1}{2}\, a_0\, F_2' - \frac{1}{2}\, a_0^2\, F_2''\right) A_{01}\, A_{02} + \frac{1}{2}\, F_2\,(+\, 2\, Z_{1-1}\, Z_{11}$$

$$+ 2 Z_{1-1} Z_{12} - 2 Z_{02} Z_{01} + 2 Z_{2-2} Z_{01} - 2 Z_{1-2} Z_{1-1}) + \left(a_0 F_2' - \frac{1}{2} F_2\right) A_{01} Z_{02}$$

$$+ A_{02} Z_{01}) + F_2 E_{01} E_{02} + (2 a_0 F_3' - F_3)(A_{02} E_{11} + A_{12} E_{01} + A_{01} E_{12} + A_{22} E_{1-1}$$

$$+ A_{2-2} E_{1-1} + A_{1-1} E_{22} + A_{11} E_{02} + A_{1-1} E_{2-2}) - 4 F_3 (E_{11} Z_{02} + E_{12} Z_{01}$$

$$+ E_{01} Z_{12} + E_{1-1} Z_{22} + E_{1-1} Z_{2-2} + E_{02} Z_{11} + E_{2-2} Z_{1-1}) + \left(\frac{1}{2} F_5 - a_0 F_5'\right) A_{2-2}$$

$$+ e' F_5 (Z_{2-2} + Z_{2-2}') - e' \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0 F_6'\right) A_{02} - e' F_6 (Z_{2-2} - Z_{2-2}') + 6 F_8 E_{01} E_{02}$$

$$+ 2 F_{10} e' E_{1-2} + 2 F_{12} e' E_{12} + 3 F_{14} (2 E_{12} E_{11} + 2 E_{22} E_{01})$$

$$\mathbf{2 P_{23}} = 2 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) (2 A_{12} E_{11} + 2 A_{11} E_{12} + 2 A_{22} E_{01} + 2 A_{01} E_{22}) + 2 \left(-\frac{3}{8} F_2\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} a_0 F_2' - \frac{1}{2} a_0^2 F_2''\right) A_{11} A_{02} + \frac{1}{2} F_2 (- 2 Z_{11} Z_{22} - 2 Z_{02} Z_{11} - 2 Z_{01} Z_{12}$$

$$+ 2 Z_{22} Z_{1-1}) + \left(a_0 F_2' - \frac{1}{2} F_2\right) (- A_{11} Z_{02} - A_{02} Z_{11} + F_2 E_{11} E_{02} + (2 a_0 F_3'$$

$$- F_3) A_{1-2} E_{11} + A_{1-1} E_{12} + A_{02} E_{01} + A_{12} E_{1-1} + A_{01} E_{02} + A_{11} E_{1-2})$$

$$- 4 F_3 (E_{11} Z_{1-2} + E_{12} Z_{1-1} - E_{01} Z_{02} - E_{1-1} Z_{12} - E_{1-2} Z_{11} - E_{02} Z_{01})$$

$$+ e' \left(\frac{1}{2} F_5 - a_0 F_5'\right) A_{12} + e' F_5 (- Z_{12} - Z_{12}') - e' F_6 (- Z_{12} + Z_{12}') + 6 F_8 E_{11} E_{02}$$

$$+ 2 F_{10} e' E_{22} + 3 F_{14} (2 E_{2-2} E_{11} + 2 E_{1-2} E_{01} + 2 E_{02} E_{1-1}) + 2 F_{15} e' E_{02}$$

$$\mathbf{2 P_{2-3}} = 2 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) (2 A_{1-2} E_{1-1} + 2 A_{1-1} E_{1-2}) + 2 \left(- \frac{3}{8} F_2 + \frac{1}{2} a_0 F_2' - \frac{1}{2} a_0^2 F_2''\right) \cdot$$

$$\cdot A_{1-1} A_{02} + \frac{1}{2} F_2 (2 Z_{1-2} Z_{01} + 2 Z_{2-2} Z_{11} + 2 Z_{02} Z_{1-1} - 2 Z_{2-2} Z_{1-1}) + \left(a_0 F_2'\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} F_2\right) (A_{1-1} Z_{02} - A_{02} Z_{1-1}) + F_2 E_{1-1} E_{02} + (2 a_0 F_3' - F_3)(A_{1-2} E_{11} + A_{1-1} E_{12}$$

$$+ A_{02} E_{01} + A_{12} E_{1-1} + A_{01} E_{02} + A_{11} E_{1-2}) - 4 F_3 (- E_{11} Z_{1-2} - E_{12} Z_{1-1}$$

$$+ E_{01} Z_{02} + E_{1-1} Z_{12} + E_{1-2} Z_{11} + E_{02} Z_{01}) - e' \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0 F_6'\right) A_{1-2} + 6 F_8 E_{1-1} E_{02}$$

$$+ 2 F_{10} e' E_{2-2} + 2 F_{12} e' E_{02}) + 3 F_{14} (+ 2 E_{02} E_{11} + 2 E_{01} E_{12} + 2 E_{22} E_{1-1})$$

$$\mathbf{2 P_{33}} = 2 \left(a_0 F_1' - \frac{1}{2} F_1\right) (2 A_{22} E_{11} + 2 A_{11} E_{22}) + \frac{1}{2} F_2 (- 2 Z_{12} Z_{11} - 2 Z_{22} Z_{01}) + (2 a_0 F_3'$$

$$- F_3)(A_{02} E_{11} + A_{01} E_{12} + A_{12} E_{01} + A_{22} E_{1-1} + A_{1-1} E_{22} + A_{11} E_{02} - 4 F_3 (E_{11} Z_{02}$$

$$- E_{12} Z_{01} - E_{01} Z_{12} - E_{1-1} Z_{22} + E_{22} Z_{1-1} - E_{02} Z_{11}) + e' \left(\frac{1}{2} F_5 - a_0 F_5'\right) A_{22}$$

$$+ e' F_5 (- Z_{22} - Z'_{22}) - e' F_6 (- Z_{22} + Z'_{22}) + 3 F_{14} (2 E_{1-2} E_{11} + 2 E_{1-1} E_{12} + 2 E_{02} E_{01}) + 2 F_{15} e' E_{12}$$

$$\begin{aligned} 2 P_{3-3} = {} & 2 \left(a_0 F'_1 - \frac{1}{2} F_1\right) (2 A_{2-2} E_{1-1} + 2 A_{1-1} E_{2-2}) + \frac{1}{2} F_2 (2 Z_{2-2} Z_{01} - 2 Z_{1-2} Z_{1-1}) \\ & + (2 a_0 F'_3 - F_3) (A_{2-2} E_{11} + A_{1-2} E_{01} + A_{02} E_{1-1} + A_{1-1} E_{02} + A_{11} E_{2-2} \\ & + A_{01} E_{1-2}) - 4 F_3 (- E_{11} Z_{2-2} - E_{01} Z_{1-2} + E_{1-1} Z_{02} + E_{1-2} Z_{01} - E_{02} Z_{1-1} \\ & + E_{2-2} Z_{11}) - e' \left(\frac{1}{2} F_6 - a_0 F'_6\right) A_{2-2} + 2 F_{12} e' E_{1-2} + 3 F_{14} (2 E_{1-2} E_{11} + 2 E_{1-1} E_{12} \\ & + 2 E_{02} E_{01}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 P_{51} = {} & (2 a_0 F'_3 - F_3) (A_{21} E_{10} + A_{20} E_{11} + A_{11} E_{20} + A_{22} E_{1-1} + A_{10} E_{21} + A_{1-1} E_{22}) \\ & - 4 F_3 (- E_{10} Z_{21} - E_{11} Z_{20} - E_{20} Z_{11} - E_{1-1} Z_{22} - E_{21} Z_{10} - E_{22} Z_{1-1}) \\ & + 6 F_{14} e_0 E_{21} + 3 F_{14} (2 E_{11} E_{10} + 2 E_{01} E_{20} + 2 E_{1-1} E_{12} + 2 E_{22} E_{01}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 P_{5-1} = {} & (2 a_0 F'_3 - F_3) (A_{2-1} E_{10} + A_{2-2} E_{11} + A_{1-1} E_{20} + A_{20} E_{1-1} + A_{10} E_{2-1} + A_{11} E_{2-2}) \\ & - 4 F_3 (- E_{10} Z_{2-1} - E_{11} Z_{2-2} - E_{20} Z_{1-1} - E_{1-1} Z_{20} - E_{2-1} Z_{10} - E_{2-2} Z_{11}) \\ & + 6 F_{14} e_0 E_{2-1} + 3 F_{14} (2 E_{1-1} E_{10} + 2 E_{1-2} E_{11} + 2 E_{01} E_{20} + 2 E_{2-2} E_{01}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 P_{52} = {} & (2 a_0 F'_3 - F_3) (A_{22} E_{10} + A_{21} E_{11} + A_{11} E_{21} + A_{10} E_{22}) - 4 F_3 (- E_{10} Z_{22} - E_{11} Z_{21} \\ & - E_{21} Z_{11} - E_{22} Z_{10}) + 6 F_{14} e_0 E_{22} + 3 F_{14} (2 E_{12} E_{10} + E_{11}^2 + 2 E_{21} E_{01}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 P_{5-2} = {} & (2 a_0 F'_3 - F_3) (A_{2-2} E_{10} + A_{2-1} E_{1-1} + A_{1-1} E_{2-1} + A_{10} E_{2-2}) - 4 F_3 (- E_{10} Z_{2-2} \\ & - E_{1-1} Z_{2-1} - E_{2-1} Z_{1-1} - E_{2-2} Z_{10}) + 6 F_{14} e_0 E_{2-2} + 3 F_{14} (2 E_{1-2} E_{10} + E_{1-1}^2 \\ & + 2 E_{2-1} E_{01}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 P_{43} = {} & (2 a_0 F'_3 - F_3) (A_{12} E_{11} + A_{11} E_{12} + A_{22} E_{01} + A_{01} E_{22}) - 4 F_3 (- E_{11} Z_{12} - E_{12} Z_{11} \\ & - E_{22} Z_{01} - E_{01} Z_{22}) + 3 F_{14} (2 E_{02} E_{11} + 2 E_{01} E_{12} + 2 E_{22} E_{1-1}) + 2 F_{15} e' E_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 P_{4-3} = {} & (2 a_0 F'_3 - F_3) (A_{2-2} E_{01} + A_{1-2} E_{1-1} + A_{01} E_{2-2} + A_{1-1} E_{1-2}) - 4 F_3 (- E_{01} Z_{2-2} \\ & - E_{1-1} Z_{1-2} - E_{1-2} Z_{1-1} + E_{2-2} Z_{01}) + 2 F_{12} e' E_{2-2} + 3 F_{14} (2 E_{2-2} E_{11} + 2 E_{1-2} E_{01} \\ & + 2 E_{02} E_{1-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 P_{50} = {} & (2 a_0 F'_3 - F_3) (A_{20} E_{10} + A_{2-1} E_{11} + A_{10} E_{20} + A_{21} E_{1-1} + A_{1-1} E_{21} + A_{11} E_{2-1}) \\ & + 6 F_{14} e_0 E_{20} + 3 F_{14} (E_{10}^2 + 2 E_{1-1} E_{11} + 2 E_{21} E_{01} + 2 E_{2-1} E_{01}) \end{aligned}$$

$$2\,P_{53} = (2\,a_0 F_3' - F_3)(A_{22} E_{11} + A_{11} E_{22}) - 4\,F_3(-E_{11} Z_{22} - E_{22} Z_{11}) + 3\,F_{14}(2\,E_{12} E_{11} + 2\,E_{22} E_{01})$$

$$2\,P_{5-3} = (2\,a_0 F_3' - F_3)(A_{2-2} E_{1-1} + A_{1-1} E_{2-2}) - 4\,F_3(-E_{1-1} Z_{2-2} - E_{2-2} Z_{1-1}) + 3\,F_{14}(2\,E_{2-2} E_{01} + 2\,E_{1-2} E_{1-1})$$

$$2\,P_{60} = 3\,F_{14}(2\,E_{20} E_{10} + 2\,E_{2-1} E_{11} + 2\,E_{21} E_{1-1})$$

$$2\,P_{61} = 3\,F_{14}(2\,E_{21} E_{10} + 2\,E_{20} E_{11} + 2\,E_{22} E_{1-1})$$

$$2\,P_{6-1} = 3\,F_{14}(2\,E_{2-1} E_{10} + 2\,E_{2-2} E_{11} + 2\,E_{20} E_{1-1})$$

$$2\,P_{62} = 3\,F_{14}(2\,E_{22} E_{10} + 2\,E_{21} E_{11})$$

$$2\,P_{6-2} = 3\,F_{14}(2\,E_{2-2} E_{10} + 2\,E_{2-1} E_{1-1})$$

$$2\,P_{63} = 6\,F_{14} E_{22} E_{11}$$

$$2\,P_{6-3} = 6\,F_{14} E_{2-2} E_{1-1}$$

Die linke Seite unserer Gleichung, die Funktion $e\,\dfrac{d\zeta}{dt}$, erhält bei Substitution von $e = e_0 + E = e_0 + \Sigma\, 2\, E_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0')$ und von $\zeta = \zeta_0 + \Sigma\, 2\, Z_{\alpha\beta} \sin(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0')$ die Form:

$$(23)\qquad e\,\frac{d\zeta}{dt} = e_0 z_1 + e_0\,\Sigma\, 2\, Z_{\alpha\beta}(\alpha z_1 + \beta z_1') \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0') + E z_1 + E\,\Sigma\, 2\, Z_{\alpha\beta}(\alpha z_1 + \beta z_1') \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0'),$$

wo $E = \Sigma\, 2\, E_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0')$ zu substituieren ist.

Gibt man der rechten Seite nach Ausführung der erforderlichen Operationen die Form:

$$(24)\qquad e\,\frac{d\zeta}{dt} = \overline{Z}_{00} + \Sigma\, 2\, \overline{Z}_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0'),$$

so haben die Koeffizienten $\overline{Z}_{00}$ und $\overline{Z}_{\alpha\beta}$ die folgende Bedeutung:

$$(25)\quad \overline{Z}_{00} = e_0 z_1 + 2\,E_{10} Z_{10} z_1 + 2\,E_{11} Z_{11}(z_1 + z_1') + 2\,E_{01} Z_{01} z_1' + 2\,E_{1-1} Z_{1-1}(z_1 - z_1') + 2\,E_{11} Z_{11}(z_1 + z_1')$$

$$2\,\overline{Z}_{10} = 2\,e_0 Z_{10} z_1 + 2\,E_{10} z_1 + 4\,E_{10} Z_{20} z_1 + 2\,E_{11} Z_{01} z_1' + 2\,E_{11} Z_{21}(2\,z_1 + z_1') + 2\,E_{20} Z_{10} z_1 + 2\,E_{01} Z_{11}(z_1 + z_1') + 2\,E_{01} Z_{1-1}(z_1 - z_1') + 2\,E_{1-1} Z_{01} z_1' + 2\,E_{1-1} Z_{2-1}(2\,z_1 - z_1') + 2\,E_{21} Z_{11}(z_1 + z_1') + 2\,E_{2-1} Z_{1-1}(z_1 - z_1')$$

$$2\,\overline{Z}_{20} = 4\,e_0 Z_{20}\,z_1 + 2\,E_{20}\,z_1 + 2\,E_{10} Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{11} Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{01} Z_{21}\,(2\,z_1 + z_1')$$
$$+ 2\,E_{01} Z_{2-1}\,(2\,z_1 - z_1') + 2\,E_{1-1} Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{21} Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{2-1} Z_{01}\,z_1'$$

$$2\,\overline{Z}_{30} = 6\,e_0\,Z_{30}\,z_1 + 2\,E_{30}\,z_1 + 4\,E_{10}\,Z_{20}\,z_1 + 2\,E_{11}\,Z_{2-1}\,(2\,z_1 - z_1') + 2\,E_{20}\,Z_{10}\,z_1$$
$$+ 2\,E_{1-1} Z_{21}\,(2\,z_1 + z_1') + 2\,E_{21} Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{2-1} Z_{11}\,(z_1 + z_1')$$

$$2\,\overline{Z}_{40} = 0$$

$$2\,\overline{Z}_{11} = 2\,e_0 Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{11}\,z_1 + 2\,E_{10} Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{10} Z_{21}\,(2\,z_1 + z_1') + 2\,E_{11} Z_{22}\,(2\,z_1$$
$$+ 2\,z_1') + 2\,E_{20} Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{12}\,Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{01} Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{01} Z_{12}\,(z_1 + 2\,z_1')$$
$$+ 4\,E_{1-1} Z_{20}\,z_1) + 4\,E_{1-1} Z_{02}\,z_1' + 2\,E_{21} Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{22} Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{02} Z_{1-1}\,(z_1 - z_1')$$

$$2\,\overline{Z}_{12} = 2\,e_0\,Z_{12}\,(z_1 + 2\,z_1') + 2\,E_{12}\,(z_1 + 2\,z_2') + 2\,E_{10}\,Z_{22}\,(2\,z_1 + 2\,z_1') + 4\,E_{10} Z_{02}\,z_1'$$
$$+ 2\,E_{11} Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{01} Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{1-1} Z_{21}\,(2\,z_1 + z_1') + 2\,E_{21}\,Z_{1-1}\,(z - z_1')$$
$$+ 2\,E_{22} Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{02} Z_{10}\,z_1$$

$$2\,\overline{Z}_{01} = 2\,e_0 Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{01}\,z_1 + 2\,E_{10}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{10}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{11}\,Z_{10}\,z_1'$$
$$+ 2\,E_{11}\,Z_{12}\,(z_1 + 2\,z_1') + 2\,E_{12}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 4\,E_{01}\,Z_{02}\,z_1' + 2\,E_{1-1}\,Z_{10}\,z_1$$
$$+ 2\,E_{1-1} Z_{1-2}\,(z_1 - 2\,z_1') + 2\,E_{02} Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{1-2} Z_{1-1}\,(z_1 - z_1')$$

$$2\,\overline{Z}_{1-1} = 2\,e_0 Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{1-1}\,z_1 + 2\,E_{10} Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{10} Z_{2-1}\,(2\,z_1 - z_1') + 4\,E_{11} Z_{20}\,z_1$$
$$+ 4\,E_{11}\,Z_{02}\,z_1' + 2\,E_{20}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{01}\,Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{01}\,Z_{1-2}\,(z_1 - 2\,z_1')$$
$$+ 2\,E_{1-1} Z_{2-2}\,(2\,z_1 - 2\,z_1') + 2\,E_{02} Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{2-1} Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{2-2} Z_{1-1}\,(z_1$$
$$- z_1') + 2\,E_{1-2} Z_{01}\,z_1'$$

$$2\,\overline{Z}_{1-2} = 2\,e_0\,Z_{1-2}\,(z_1 - 2\,z_1') + 2\,E_{1-2}\,z_1 + 4\,E_{10}\,Z_{02}\,z_1' + 2\,E_{10}\,Z_{2-2}\,(2\,z_1 - 2\,z_1')$$
$$+ 2\,E_{11}\,Z_{2-1}\,(2\,z_1 - z_1') + 2\,E_{01}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{1-1}\,Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{02}\,Z_{10}\,z_1$$
$$+ 2\,E_{2-1} Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{2-2} Z_{10}\,z_1$$

$$2\,\overline{Z}_{21} = 2\,e_0 Z_{21}\,(2\,z_1 + z_1') + 2\,E_{21}\,z_1 + 2\,E_{10}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{11}\,Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{20}\,Z_{01}\,z_1'$$
$$+ 2\,E_{12}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 4\,E_{01} Z_{20}\,z_1 + 4\,E_{01} Z_{22}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{1-1} Z_{12}\,(z_1 + 2\,z_1')$$
$$+ 2\,E_{22}\,Z_{01}\,z_1'$$

$$2\,\overline{Z}_{22} = 4\,e_0 Z_{22}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{22}\,z_1 + 2\,E_{10} Z_{12}\,(z_1 + 2\,z_1') + 2\,E_{11} Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{12} Z_{10}\,z_1$$
$$+ 2\,E_{01} Z_{21}\,(2\,z_1 + z_1') + 2\,E_{21} Z_{01}\,z_1'$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{02} = 4\,e_0\,Z_{02}\,z_1' + 2\,E_{02}\,z_1 + 2\,E_{10}\,Z_{12}\,(z_1 + 2\,z_1') + 2\,E_{10}\,Z_{1-2}\,(z_1 - 2\,z_1') + 2\,E_{11}Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{12}\,Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{01}\,Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{1-1}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{1-2}\,Z_{10}\,z_1$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{2-1} = 2\,e_0\,Z_{2-1}\,(2\,z_1 - z_1') + 2\,E_{2-1}\,z_1 + 2\,E_{10}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{11}\,Z_{1-2}\,(z_1 - 2\,z_1') + 2\,E_{20}\,Z_{01}\,z_1' + 4\,E_{01}Z_{20}\,z_1 + 2\,E_{01}\,Z_{2-2}\,(2\,z_1 - 2\,z_1') + 2\,E_{1-1}\,Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{2-2}\,Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{1-2}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1')$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{2-2} = 4\,e_0\,Z_{2-2}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{2-2}\,z_1 + 2\,E_{10}\,Z_{1-2}\,(z_1 - 2\,z_1') + 2\,E_{01}\,Z_{2-1}\,(2\,z_1 - z_1') + 2\,E_{1-1}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{2-1}\,Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{1-2}\,Z_{10}\,z_1$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{03} = 6\,e_0\,Z_{03}\,z_1' + 2\,E_{03}\,z_1 + 2\,E_{11}\,Z_{1-2}\,(z_1 - 2\,z_1') + 2\,E_{12}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 4\,E_{01}\,Z_{02}\,z_1' + 2\,E_{1-1}\,Z_{12}\,(z_1 + 2\,z_1') + 2\,E_{02}\,Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{1-2}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1')$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{31} = 2\,e_0\,Z_{31}\,(3\,z_1 + z_1') + 2\,E_{31}\,z_1 + 2\,E_{10}Z_{21}\,(2\,z_1 + z_1') + 4\,E_{11}\,Z_{20}\,z_1 + 2\,E_{20}\,Z_{11}\,(z + z_1') + 4\,E_{1-1}\,Z_{22}\,(z + z_1') + 2\,E_{21}\,Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{22}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1')$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{3-1} = 2\,e_0\,Z_{3-1}\,(3\,z_1 - z_1') + 2\,E_{3-1}\,z_1 + 2\,E_{10}\,Z_{2-1}\,(2\,z_1 - z_1') + 4\,E_{11}\,Z_{2-2}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{20}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 4\,E_{1-1}\,Z_{20}\,z_1 + 2\,E_{2-1}\,Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{2-2}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1')$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{32} = 2\,e_0\,Z_{32}\,(3\,z_1 + 2\,z_1') + 2\,E_{32}\,z_1 + 4\,E_{10}\,Z_{22}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{11}\,Z_{11}\,(2\,z_1 + z_1') + 2\,E_{21}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{22}\,Z_{10}\,z_1$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{3-2} = 2\,e_0\,Z_{3-2}\,(3\,z_1 - 2\,z_1') + 2\,E_{3-2}\,z_1 + 4\,E_{10}\,Z_{2-2}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{1-1}\,Z_{2-1}\,(2\,z_1 - z_1') + 2\,E_{2-1}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{2-2}\,Z_{10}\,z_1$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{13} = 2\,e_0\,Z_{13}\,(z_1 + 3\,z_1') + 2\,E_{13}\,z_1 + 4\,E_{11}\,Z_{02}\,z_1' + 2\,E_{12}\,Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{01}\,Z_{12}\,(z_1 + 2\,z_1') + 2\,E_{22}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{02}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 4\,E_{1-1}\,Z_{22}\,(z_1 + z_1')$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{1-3} = 2\,e_0\,Z_{1-3}\,(z_1 - 3\,z_1') + 2\,E_{1-3}\,z_1 + 4\,E_{11}\,Z_{2-2}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{01}\,Z_{1-2}\,(z_1 - 2\,z_1') + 4\,E_{1-1}\,Z_{02}\,z_1' + 2\,E_{02}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{2-2}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{1-2}\,Z_{01}$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{23} = 2\,E_{11}\,Z_{12}\,(z_1 + 2\,z_1') + 2\,E_{12}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1') + 4\,E_{01}\,Z_{22}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{22}\,Z_{01}\,z_1'$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{2-3} = 2\,E_{1-1}\,Z_{1-2}\,(z_1 - 2\,z_1') + 2\,E_{01}\,Z_{22}\,(2\,z_1 + 2\,z_1') + 2\,E_{22}\,Z_{01}\,z_1' + 2\,E_{1-2}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1')$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{33} = 4\,E_{11}\,Z_{22}\,(z_1 + z_1') + 2\,E_{22}\,Z_{11}\,(z_1 + z_1')$$

$$2\,\overline{\mathbf{Z}}_{3-3} = 4\,E_{1-1}\,Z_{2-2}\,(z_1 - z_1') + 2\,E_{2-2}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z_1')$$

Die rechte Seite der Gleichung für $e\,\frac{d\zeta}{dt}$ erfordert außer der schon erfolgten Darstellung von $e\,\frac{d\overline{\omega}}{dt}$ weiterhin die Entwicklung von $e\,\frac{d\varepsilon}{dt}$. Da nach (15): $\frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_{00} + \Sigma\, 2\,\varepsilon_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0')$, wo die Koeffizienten ε_{00} und $2\,\varepsilon_{\alpha\beta}$ unter (18) gegeben worden sind, so folgt hieraus:

$$(26)\qquad e\,\frac{d\varepsilon}{dt} = e_0\,\varepsilon_{00} + E\,\varepsilon_{00} + e_0\,\Sigma\, 2\,\varepsilon_{\alpha\beta}\cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0') + E\,\Sigma\, 2\,\varepsilon_{\alpha\beta}\cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0'),$$

oder wenn: $E\,\Sigma\, 2\,\varepsilon_{\alpha\beta}\cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0') = G_{00} + \Sigma\, 2\, G_{\alpha\beta}\cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0')$ gesetzt wird:

$$(27)\qquad e\,\frac{d\varepsilon}{dt} = e_0\,\varepsilon_{00} + G_{00} + \Sigma\,(2\,E_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{00} + 2\,e_0\,\varepsilon_{\alpha\beta} + 2\,G_{\alpha\beta})\cos(\alpha\zeta_0 + \alpha\zeta_0'),$$

wo die Koeffizienten $G_{\alpha\beta}$ folgendermaßen definiert sind:

$$(28)\qquad \mathbf{G_{00}} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{1-1}$$

$$2\,\mathbf{G_{10}} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{20} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{21} + 2\,E_{20}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{2-1} + 2\,E_{21}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{2-1}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{1-1}$$

$$2\,\mathbf{G_{20}} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{21} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{2-1} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{21}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{2-1}\,\varepsilon_{01}$$

$$2\,\mathbf{G_{30}} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{20} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{2-1} + 2\,E_{20}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{21} + E_{21}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{2-1}\,\varepsilon_{11}$$

$$2\,\mathbf{G_{11}} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{10}\,\varepsilon_{21} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{22} + 2\,E_{20}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{12}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{12} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{20} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{02} + 2\,E_{21}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{22}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{02}\,\varepsilon_{1-1}$$

$$2\,\mathbf{G_{12}} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{22} + 2\,E_{10}\,\varepsilon_{02} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{21} + 2\,E_{21}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{22}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{02}\,\varepsilon_{10}$$

$$2\,\mathbf{G_{01}} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{10}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{12} + 2\,E_{12}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{02} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{1-2} + 2\,E_{02}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{1-2}\,\varepsilon_{1-1}$$

$$2\,\mathbf{G_{1-1}} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{10}\,\varepsilon_{2-1} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{20} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{02} + 2\,E_{20}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{1-2} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{2-2} + 2\,E_{02}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{2-1}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{2-2}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{1-2}\,\varepsilon_{01}\,.$$

$$2\,\mathbf{G_{1-2}} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{02} + 2\,E_{10}\,\varepsilon_{2-2} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{2-1} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{02}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{2-1}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{2-2}\,\varepsilon_{10}$$

$$2\,G_{21} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{20}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{12}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{20} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{22} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{12} + 2\,E_{22}\,\varepsilon_{01}$$

$$2\,G_{22} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{12} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{12}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{21} + 2\,E_{21}\,\varepsilon_{01}$$

$$2\,G_{02} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{12} + 2\,E_{10}\,\varepsilon_{1-2} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{12}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{1-2}\,\varepsilon_{10}$$

$$2\,G_{2-1} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{1-2} + 2\,E_{20}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{20} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{2-2} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{2-2}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{1-2}\,\varepsilon_{11}$$

$$2\,G_{2-2} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{1-2} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{2-1} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{2-1}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{1-2}\,\varepsilon_{10}$$

$$2\,G_{03} = 2\,E_{11}\,\varepsilon_{1-2} + 2\,E_{12}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{02} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{12} + 2\,E_{02}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{1-2}\,\varepsilon_{11}$$

$$2\,G_{31} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{21} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{20} + 2\,E_{20}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{22} + 2\,E_{21}\,\varepsilon_{10} + 2\,E_{22}\,\varepsilon_{1-1}$$

$$2\,G_{3-1} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{2-1} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{2-2} + 2\,E_{20}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{20} + 2\,E_{2-2}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{2-1}\,\varepsilon_{10}$$

$$2\,G_{32} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{22} + 2\,E_{11}\,\varepsilon_{21} + 2\,E_{21}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{22}\,\varepsilon_{10}$$

$$2\,G_{3-2} = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{2-2} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{2-1} + 2\,E_{2-1}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{2-2}\,\varepsilon_{10}$$

$$2\,G_{13} = 2\,E_{11}\,\varepsilon_{02} + 2\,E_{12}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{12} + 2\,E_{22}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{02}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{22}$$

$$2\,G_{1-3} = 2\,E_{11}\,\varepsilon_{2-2} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{1-2} + 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{02} + 2\,E_{02}\,\varepsilon_{1-1} + 2\,E_{2-2}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{1-2}\,\varepsilon_{01}$$

$$2\,G_{23} = 2\,E_{11}\,\varepsilon_{12} + 2\,E_{12}\,\varepsilon_{11} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{22} + 2\,E_{2-2}\,\varepsilon_{01}$$

$$2\,G_{2-3} = 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{1-2} + 2\,E_{01}\,\varepsilon_{22} + 2\,E_{22}\,\varepsilon_{01} + 2\,E_{1-2}\,\varepsilon_{1-1}$$

$$2\,G_{33} = 2\,E_{11}\,\varepsilon_{22} + 2\,E_{22}\,\varepsilon_{11}$$

$$2\,G_{3-3} = 2\,E_{1-1}\,\varepsilon_{2-2} + 2\,E_{2-2}\,\varepsilon_{1-1}$$

Weiterhin ist zur Darstellung der rechten Seite von $e\frac{d\zeta}{dt}$ noch die Funktion $e\,(n - 2\,n')$ als Doppelfourierreihe zu entwickeln, wobei für n die schon vorhandene Reihe (11) zu benutzen ist. Da

$$e\,(n - 2\,n') = e_0\,n - 2\,e_0\,n' + E\,(n - 2\,n'),$$

so bleibt noch die Entwicklung der Funktion $E\,(n - 2\,n')$. Setzt man allgemein

(29) $$E\,(n - 2\,n') = n_0\,(M_{00} + \Sigma\,2\,M_{\alpha\beta}\cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0'),$$

so lautet schließlich die Definition der neuen Koeffizienten $M_{\alpha\beta}$, wenn noch zur Abkürzung $1-\frac{2n'}{n_0}=N$ gesetzt wird, wobei also N von der Ordnung der Abweichung der mittleren Bewegung des gestörten Körpers von der Kommensurabilität ist, und mit Rücksicht auf die Reihe $En=n_0\left(E-\frac{3}{2}AE+\frac{15}{8}A^2E+\cdots\right)$, wie folgt:

$$(30)\quad \mathbf{M}_{00}=-3E_{10}A_{10}-3E_{11}A_{11}-3E_{01}A_{01}-3E_{1-1}A_{1-1}$$

$$2M_{10}=2E_{10}N-3E_{10}A_{20}-3E_{11}A_{01}-3E_{11}A_{21}-3E_{20}A_{10}-3E_{01}A_{11}-3E_{01}A_{1-1}$$
$$-3E_{1-1}A_{01}-3E_{1-1}A_{2-1}-3E_{21}A_{11}-3E_{2-1}A_{1-1}$$

$$2M_{20}=2E_{20}N-3E_{10}A_{10}-3E_{11}A_{1-1}-3E_{01}A_{21}-3E_{01}A_{2-1}-3E_{1-1}A_{11}-3E_{21}A_{01}$$
$$-3E_{2-1}A_{01}$$

$$2M_{30}=2E_{30}N-3E_{10}A_{20}-3E_{11}A_{2-1}-3E_{20}A_{10}-3E_{1-1}A_{21}-3E_{21}A_{1-1}-3E_{2-1}A_{11}$$

$$2M_{40}=0$$

$$2M_{11}=2E_{11}N-3E_{10}A_{01}-3E_{10}A_{21}-3E_{11}A_{22}-3E_{20}A_{1-1}-3E_{12}A_{01}-3E_{01}A_{10}$$
$$-3E_{01}A_{12}-3E_{1-1}A_{20}-3E_{1-1}A_{02}-3E_{21}A_{10}-3E_{22}A_{11}-3E_{02}A_{1-1}$$

$$2M_{12}=2E_{12}N-3E_{10}A_{22}-3E_{10}A_{02}-3E_{11}A_{01}-3E_{01}A_{11}-3E_{1-1}A_{21}-3E_{21}A_{1-1}$$
$$-3E_{22}A_{10}-3E_{02}A_{10}$$

$$2M_{01}=2E_{01}N-3E_{10}A_{11}-3E_{10}A_{1-1}-3E_{11}A_{10}-3E_{11}A_{12}-3E_{12}A_{11}-3E_{01}A_{02}$$
$$-3E_{1-1}A_{10}-3E_{1-1}A_{1-2}-3E_{02}A_{01}-3E_{1-2}A_{1-1}$$

$$2M_{1-1}=2E_{1-1}N-3E_{10}A_{01}-3E_{10}A_{2-1}-3E_{11}A_{20}-3E_{11}A_{02}-3E_{20}A_{11}-3E_{01}A_{10}$$
$$-3E_{01}A_{1-2}-3E_{1-1}A_{2-2}-3E_{02}A_{11}-3E_{2-1}A_{10}-3E_{2-2}A_{1-1}$$
$$-3E_{1-2}A_{01}$$

$$2M_{1-2}=2E_{1-2}N-3E_{10}A_{02}-3E_{10}A_{2-2}-3E_{11}A_{2-1}-3E_{01}A_{1-1}-3E_{1-1}A_{01}$$
$$-3E_{02}A_{10}-3E_{2-1}A_{11}-3E_{2-2}A_{10}$$

$$2M_{21}=2E_{21}N-3E_{10}A_{11}-3E_{11}A_{10}-3E_{20}A_{01}-3E_{12}A_{1-1}-3E_{01}A_{20}-3E_{01}A_{22}$$
$$-3E_{1-1}A_{12}-3E_{22}A_{01}$$

$$2\,\mathbf{M_{22}} = 2\,E_{22}\,N - 3\,E_{10}\,A_{12} - 3\,E_{11}\,A_{11} - 3\,E_{12}\,A_{10} - 3\,E_{01}\,A_{21} - 3\,E_{21}\,A_{01}$$

$$2\,\mathbf{M_{02}} = 2\,E_{02}\,N - 3\,E_{10}\,A_{12} - 3\,E_{10}\,A_{1-2} - 3\,E_{11}\,A_{1-1} - 3\,E_{12}\,A_{10} - 3\,E_{01}\,A_{01} - 3\,E_{1-1}\,A_{11}$$
$$- 3\,E_{1-2}\,A_{10}$$

$$2\,\mathbf{M_{2-1}} = 2\,E_{2-1}\,N - 3\,E_{10}\,A_{1-1} - 3\,E_{11}\,A_{1-2} - 3\,E_{20}\,A_{01} - 3\,E_{01}\,A_{20} - 3\,E_{01}\,A_{2-2} - 3\,E_{1-1}\,A_{10}$$
$$- 3\,E_{2-2}\,A_{01} - 3\,E_{1-2}\,A_{11}$$

$$2\,\mathbf{M_{2-2}} = 2\,E_{2-2}\,N - 3\,E_{10}\,A_{1-2} - 3\,E_{01}\,A_{2-1} - 3\,E_{1-1}\,A_{1-1} - 3\,E_{2-1}\,A_{01} - 3\,E_{1-2}\,A_{10}$$

$$2\,\mathbf{M_{03}} = 2\,E_{03}\,N - 3\,E_{11}\,A_{1-2} - 3\,E_{12}\,A_{1-1} - 3\,E_{01}\,A_{02} - 3\,E_{1-1}\,A_{12} - 3\,E_{02}\,A_{01} - 3\,E_{1-2}\,A_{11}$$

$$2\,\mathbf{M_{31}} = 2\,E_{31}\,N - 3\,E_{10}\,A_{21} - 3\,E_{11}\,A_{20} - 3\,E_{20}\,A_{11} - 3\,E_{1-1}\,A_{22} - 3\,E_{21}\,A_{10} - 3\,E_{22}\,A_{1-1}$$

$$2\,\mathbf{M_{3-1}} = 2\,E_{3-1}\,N - 3\,E_{10}\,A_{2-1} - 3\,E_{11}\,A_{2-2} - 3\,E_{20}\,A_{1-1} - 3\,E_{1-1}\,A_{20} - 3\,E_{22}\,A_{11}$$
$$- 3\,E_{2-1}\,A_{10}$$

$$2\,\mathbf{M_{32}} = 2\,E_{32}\,N - 3\,E_{10}\,A_{22} - 3\,E_{11}\,A_{21} - 3\,E_{21}\,A_{11} - 3\,E_{22}\,A_{10}$$

$$2\,\mathbf{M_{3-2}} = 2\,E_{3-2}\,N - 3\,E_{10}\,A_{2-2} - 3\,E_{1-1}\,A_{2-1} - 3\,E_{2-1}\,A_{1-1} - 3\,E_{2-2}\,A_{10}$$

$$2\,\mathbf{M_{13}} = 2\,E_{13}\,N - 3\,E_{11}\,A_{02} - 3\,E_{12}\,A_{01} - 3\,E_{01}\,A_{12} - 3\,E_{22}\,A_{1-1} - 3\,E_{02}\,A_{11} - 3\,E_{1-1}\,A_{22}$$

$$2\,\mathbf{M_{1-3}} = 2\,E_{1-3}\,N - 3\,E_{11}\,A_{2-2} - 3\,E_{01}\,A_{1-2} - 3\,E_{1-1}\,A_{02} - 3\,E_{02}\,A_{1-1} - 3\,E_{2-2}\,A_{11}$$
$$- 3\,E_{1-2}\,A_{01}$$

$$2\,\mathbf{M_{23}} = 2\,E_{23}\,N - 3\,E_{11}\,A_{12} - 3\,E_{12}\,A_{11} - 3\,E_{01}\,A_{22} - 3\,E_{22}\,A_{01}$$

$$2\,\mathbf{M_{2-3}} = 2\,E_{2-3}\,N - 3\,E_{1-1}\,A_{1-2} - 3\,E_{01}\,A_{22} - 3\,E_{22}\,A_{01} - 3\,E_{1-2}\,A_{1-1}$$

$$2\,\mathbf{M_{33}} = - 3\,E_{11}\,A_{22} - 3\,E_{22}\,A_{11}$$

$$2\,\mathbf{M_{3-3}} = - 3\,E_{1-1}\,A_{2-2} - 3\,E_{2-2}\,A_{1-1}$$

Damit sind nunmehr alle erforderlichen Entwicklungen für beide Seiten der Differentialgleichung für $e\,\dfrac{d\zeta}{d\,t}$ ausgeführt, so daß sie jetzt die Form erhält:

$$(31)\qquad e\frac{d\zeta}{dt} = \overline{Z}_{00} + \Sigma\, 2\, \overline{Z}_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0') =$$

$$= e_0\, \varepsilon_{00} + G_{00} + P_{00} + \Sigma\, (2\, \varepsilon_{00}\, E_{\alpha\beta} + 2\, e_0\, \varepsilon_{\alpha\beta} + 2\, G_{\alpha\beta}) \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0')$$
$$+ e_0\, n_0 [N + N_{00} + \Sigma\, 2\, N_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0')] + n_0 [M_{00} + \Sigma\, 2\, M_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0$$
$$+ \beta\zeta_0')] + \Sigma\, 2\, P_{\alpha\beta} \cos(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta_0').$$

Für die Differentialgleichung für ζ':

$$(32)\qquad \frac{d\zeta'}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + n - 2n'$$

sind die erforderlichen Funktionen bereits entwickelt worden, so daß nur eine Zusammenziehung der Reihen für $\frac{d\varepsilon}{dt}$ und n verbleibt.

Die die Dimension und die Form der Bahn festlegenden Elemente a und e folgen, zunächst a, durch die Integration der Differentialgleichung:

$$(33)\qquad \frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} = \frac{2}{na}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta} + \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta'}\right) = \frac{2\,k^2\,m'}{na}\,(F_2\, e \sin\zeta - 2\, F_3\, e^2 \sin 2\zeta - F_4\, e' \sin\zeta'$$
$$+ 2\, F_5\, e\, e' \sin(\zeta + \zeta') - 2\, F_7\, e'^2 \sin 2\zeta'),$$

wobei die rechte Seite gemäß der getroffenen Festsetzung auf die Glieder 2. Grades beschränkt worden ist.

Die Entwicklung der rechten Seite von (33) nach Potenzen von e_0, e', A, E, Z u. Z' ergibt:

$$(34)\qquad \frac{da}{dt} = \frac{2\,k^2\,m'}{n_0\, a_0}\,[T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5], \text{ wo}$$

$$(35)\qquad \mathbf{T_1} = \frac{n_0\, a_0}{n\, a} F_2(a)\, e \sin\zeta = e_0 F_2(a_0) \sin\zeta_0 + E\, F_2 \sin\zeta_0 + \left(a_0\, F_2' + \frac{1}{2} F_2\right) e_0\, A \sin\zeta_0$$
$$+ \left(a_0\, F_2' + \frac{1}{2} F_2\right) E\, A \sin\zeta_0 + F_2\, e_0\, Z \cos\zeta_0 + F_2\, E\, Z \cos\zeta_0$$

$$\mathbf{T_2} = -2\,\frac{n_0\, a_0}{n\, a} F_3(a)\, e^2 \sin 2\zeta = -2\, F_3(a_0)\, [e_0^2 \sin 2\zeta_0 + 2\, e_0\, E \sin 2\zeta_0 + E^2 \sin 2\zeta_0]$$

$$\mathbf{T_3} = -\frac{n_0\, a_0}{n\, a} F_4(a)\, e' \sin\zeta' = -e'\left[F_4(a_0) \sin\zeta_0' + \left(\frac{1}{2} F_4 + a_0\, F_4'\right) A \sin\zeta_0' + F_4\, Z' \cos\zeta_0'\right]$$

$$\mathbf{T_4} = 2\,\frac{n_0\, a_0}{n\, a} F_5(a)\, e\, e' \sin(\zeta + \zeta') = 2\, F_5(a_0)\, e'\, [e_0 \sin(\zeta_0 + \zeta_0') + E \sin(\zeta_0 + \zeta_0')]$$

$$\mathbf{T_5} = -2\,\frac{n_0\, n_a}{n\, a} F_7(a)\, e'^2 \sin 2\zeta' = -2\, F_7(a_0)\, e'^2 \sin 2\zeta_0'.$$

Der aus der Entwicklung der T_i folgenden Fourierreihe nach ζ_0 und ζ'_0 geben wir die Form:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2k^2 m'}{n_0 a_0} \sum 2\, a_{\alpha\beta} \sin(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta'_0), \tag{36}$$

wobei die von den $A_{\alpha\beta}$, $E_{,\alpha\beta}$ $Z_{\alpha\beta}$ und $Z'_{\alpha\beta}$ abhängigen Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ in folgender Weise definiert sind:

$$\begin{aligned} (37)\quad \mathbf{2\,a_{10}} = {} & e_0 F_2 - e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right) A_{20} - F_2 E_{20} + \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right)(E_{10}A_{10} + 2\,E_{11}A_{11} \\ & - E_{11}A_{1-1} + 2\,E_{01}A_{01} - E_{1-1}A_{11} + 2\,E_{1-1}A_{1-1}) + e_0 F_2 Z_{20} + F_2(E_{10}Z_{10} \\ & + E_{11}Z_{1-1} + E_{1-1}Z_{11}) - 2\,F_3(2\,e_0 E_{10} + 2\,E_{01}E_{11} + 2\,E_{01}E_{1-1}) - e'\Bigl[\Bigl(\frac{1}{2}F_4 \\ & + a_0 F'_4\Bigr)(-A_{11} + A_{1-1}) + F_4(Z'_{11} + Z'_{1-1})\Bigr] + 2\,F_5 e'(E_{01} - E_{21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2\,a_{20}} = {} & e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right) A_{10} + F_2 E_{10} + e_0 F_2(Z_{10} + Z_{30}) + F_2(2\,E_{10}Z_{20} - E_{11}Z_{01} + E_{01}Z_{11} \\ & + E_{01}Z_{1-1} + E_{1-1}Z_{01}) - 2\,F_3(e_0^2 + 2\,E_{10}^2 + 2\,E_{11}^2 + 2\,E_{01}^2 + 2\,E_{1-1}^2) - e'\Bigl[-\frac{1}{2}F_4 A_{21} \\ & + F_4(Z'_{21} + Z'_{2-1}) - a_0 F'_4 A_{21} + 2\,F_5 e' E_{1-1}\Bigr] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2\,a_{30}} = {} & e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right) A_{20} + F_2 E_{20} + \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right)(E_{10}A_{10} + E_{11}A_{1-1} + E_{1-1}A_{11}) \\ & + e_0 F_2 Z_{20} + F_2(E_{10}Z_{10} + E_{11}Z_{1-1} + E_{1-1}Z_{11}) - 2\,F_3(2\,e_0 E_{10} + 2\,E_{01}E_{11} \\ & + 2\,E_{01}E_{1-1}) + 2\,e' F_5 E_{2-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2\,a_{40}} = {} & \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right)(E_{10}A_{20} + E_{20}A_{10}) + e_0 F_2 Z_{30} + F_2(E_{10}Z_{20} + E_{20}Z_{10}) - 2\,F_3(2\,e_0 E_{20} \\ & + E_{10}^2 + 2\,E_{11}E_{1-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2\,a_{11}} = {} & e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right)(A_{01} - A_{21}) + F_2(E_{01} - E_{21}) + \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right)(E_{10}A_{1-1} - E_{20}A_{01} \\ & - E_{01}A_{20} + E_{01}A_{02} + E_{02}A_{01}) + e_0 F_2(Z_{01} + Z_{21}) + F_2(2\,E_{10}Z_{11} - E_{10}Z_{1-1} \\ & + E_{20}Z_{01} - E_{01}Z_{20} + E_{01}Z_{02} + E_{1-1}Z_{10} - E_{02}Z_{01}) - 2\,F_3(2\,e_0 E_{1-1} + 2\,E_{01}E_{10}) \\ & - e'\left[+\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0 F'_4\right)(A_{10} - A_{12}) + F_4(Z'_{10} + Z'_{12})\right] + 2\,e' F_5(e_0 - E_{22}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2\,\boldsymbol{a}_{12} = {} & e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right) A_{02} + F_2\,E_{02} + \left(a_0\,F'_2 + \frac{1}{2}F_2\right)(-E_{11}\,A_{11} + E_{11}\,A_{1-1} + E_{01}\,A_{01} \\
& + E_{1-1}\,A_{11}) + e_0\,F_2\,(Z_{22} + Z_{02}) + F_2\,(E_{11}\,Z_{11} - E_{11}\,Z_{1-1} + E_{01}\,Z_{01} + E_{1-1}\,Z_{11}) \\
& - 2\,F_3\,(2\,e_0\,E_{1-2} + 2\,E_{01}\,E_{1-1}) - e' \Big[\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0\,F'_4\right) A_{11} + F_4 Z'_{11} + 2 F_5\,e'\,E_{01}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\,\boldsymbol{a}_{01} = {} & e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right)(-A_{11} + A_{1-1}) + F_2\,(-E_{11} + E_{1-1}) + \left(a'_0\,F_2 + \frac{1}{2}F_2\right)(-E_{10} A_{01} \\
& + E_{20}\,A_{11} - E_{20}\,A_{1-1} + E_{11}\,A_{20} + E_{11}\,A_{02} - E_{1-1}\,A_{20} - E_{1-1}\,A_{02} + E_{02}\,A_{11} \\
& - E_{02}\,A_{1-1}) + e_0\,F_2\,(Z_{11} - Z_{1-1}) + F_2\,\Big[2\,E_{10} Z_{01} + E_{20}\,Z_{11} - E_{20}\,Z_{1-1} - E_{11} Z_{20} \\
& + E_{11}\,Z_{02} + E_{1-1}\,Z_{20} + E_{1-1}\,Z_{02} - E_{02}\,Z_{11} + E_{02}\,Z_{1-1}\Big] - 2\,F_3\,\Big[2\,e_0\,(-E_{21} \\
& + E_{2-1}) - 2\,E_{10} E_{11} + 2\,E_{10} E_{1-1}\Big] - e'\Big[-\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0\,F'_4\right) A_{02} + F_4\,(1 + Z'_{02})\Big] \\
& + 2\,e'\,F_5\,(E_{10} - E_{12})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\,\boldsymbol{a}_{1-1} = {} & e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right)(A_{01} - A_{2-1}) + F_2\,(E_{01} - E_{2-1}) + \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0\,F'_2\right)(+\,E_{10}\,A_{11} \\
& - E_{20}\,A_{01} + E_{11}\,A_{10} - E_{01}\,A_{20} + E_{01}\,A_{02} + E_{02}\,A_{01}) + e_0\,F_2\,(-Z_{01} + Z_{2-1}) \\
& + F_2\,(-E_{10} Z_{11} + 2\,E_{10} Z_{1-1} - E_{20} Z_{01} + E_{11} Z_{10} + E_{01} Z_{20} - E_{01}\,Z_{02} + E_{02}\,Z_{01}) \\
& - 2\,F_3 (2 e_0\,E_{11} + 2\,E_{01}\,E_{10}) - e'\Big[+\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0\,F'_4\right)(-A_{10} + A_{1-2}) + F_4 (Z'_{10} + Z'_{1-2})\Big] \\
& + 2\,e'\,F_5\,(-E_{20} + E_{02})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\,\boldsymbol{a}_{1-2} = {} & e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right) A_{02} + F_2\,E_{02} + \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0\,F'_2\right)(E_{11}\,A_{1-1} + E_{01}\,A_{01} + E_{1-1}\,A_{11} \\
& - E_{1-1}\,A_{1-1}) + e_0\,F_2\,(-Z_{02} + Z_{2-2}) + F_2\,(E_{11}\,Z_{1-1} - E_{01}\,Z_{01} - E_{1-1}\,Z_{11} \\
& + E_{1-1} Z_{1-1}) - 2\,F_3\,(2\,e_0\,E_{12} + 2\,E_{01}\,E_{11}) - e'\Big[+\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0\,F'_4\right) A_{1-1} + F_4 Z_{1-1}\Big] \\
& - 2\,e'\,F_5\,E_{2-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\,\boldsymbol{a}_{21} = {} & e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right) A_{11} + F_2\,E_{11} + \left(a_0\,F'_2 + \frac{1}{2}F_2\right)(E_{10}\,A_{01} - E_{20}\,A_{11} + E_{20}\,A_{1-1} \\
& - E_{11}\,A_{20} + E_{01}\,A_{10} + E_{1-1}\,A_{20} + E_{1-1}\,A_{02} + E_{02}\,A_{1-1}) + e_0 F_2 Z_{11} + F_2 (E_{10} Z_{01} \\
& + E_{20}\,Z_{11} - E_{20}\,Z_{1-1} + E_{11}\,Z_{20} + E_{01}\,Z_{10} + E_{1-1}\,Z_{20} + E_{1-1}\,Z_{02} + E_{02} Z_{1-1}) \\
& - 2\,F_3 (2\,e_0\,E_{01} + 2\,E_{10}\,E_{11} + 2\,E_{10}\,E_{1-1}) - e'\Big[+\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0\,F'_4\right)(A_{20} - A_{22}) + F_4 (Z'_{20} \\
& + Z'_{22})\Big]\, 2\,e'\,F_5\,E_{10}
\end{aligned}
$$

$$2\,\boldsymbol{a}_{22} = e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + a_2 F'_2\right)A_{12} + F_2 E_{12} + \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right)(E_{10}A_{02} + E_{11}A_{01} + E_{01}A_{11} + E_{02}A_{10}) + e_0 F_2 Z_{12} + F_2(E_{10}Z_{02} + E_{11}Z_{01} + E_{01}Z_{11} + E_{02}Z_{10}) - 2F_3(2e_0E_{02} + E_{01}^2 + 2E_{11}E_{1-1}) - e'\left[\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0F'_4\right)A_{21} + F_4 Z'_{21}\right] + 2e'F_5E_{11}$$

$$2\,\boldsymbol{a}_{02} = e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + a_0 F'_2\right)(-A_{12} + A_{1-2}) + F_2(-E_{12} + E_{1-2}) + \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0F'_2\right)(E_{10}A_{02} - E_{11}A_{01} - E_{01}A_{11} + E_{01}A_{1-1} + E_{1-1}A_{01}) + e_0F_2(Z_{12} - Z_{1-2}) + F_2(2E_{10}Z_{02} + E_{11}Z_{01} + E_{01}Z_{11} - E_{01}Z_{1-1} + E_{1-1}Z_{01}) - 2F_3\left[2e_0(-E_{22} + E_{2-2}) - E_{11}^2 + E_{1-1}^2\right] - e'\left[+\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0F'_4\right)A_{01} + F_4(Z'_{01} + Z'_{03})\right] + 2F_5e'E_{1-1} - 2F_7e'^2$$

$$2\,\boldsymbol{a}_{2-1} = e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + F'_2a_0\right)A_{1-1} + F_2E_{1-1} + \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0F'_2\right) + E_{10}A_{01} + E_{20}A_{11} - E_{20}A_{1-1} + E_{11}A_{20} + E_{11}A_{02} + E_{01}A_{10} - E_{1-1}A_{20} + E_{02}A_{11}) + e_0F_2Z_{1-1} + F_2(-E_{10}Z_{01} - E_{20}Z_{11} + E_{20}Z_{1-1} + E_{11}Z_{20} - E_{11}Z_{02} + E_{01}Z_{10} + E_{1-1}Z_{20} + E_{02}Z_{11}) - 2F_3(2e_0E_{01} + 2E_{10}E_{11} + 2E_{10}E_{1-1}) - e'\left[\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0F'_4\right)(-A_{20} + A_{2-2}) + F_4(Z'_{20} + Z'_{2-2}\right] + 2F_5e'E_{1-2}$$

$$2\,\boldsymbol{a}_{2-2} = e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + F'_2a_0\right)A_{1-2} + F_2E_{1-2} + \left(a_0F'_2 + \frac{1}{2}F_2\right)(E_{10}A_{02} + E_{01}A_{1-1} + E_{1-1}A_{01} + E_{02}A_{10}) + e_0F_2Z_{1-2} + F_2(-E_{10}Z_{02} + E_{01}Z_{1-1} - E_{1-1}Z_{01} + E_{02}Z_{10}) - 2F_3(2e_0E_{02} + E_{01}^2 + 2E_{11}E_{1-1}) - e'\left[-\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0F'_4\right)A_{2-1} + F_4Z'_{2-1}\right] + 0$$

$$2\,\boldsymbol{a}_{03} = \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0F'_2\right)(-E_{11}A_{02} + E_{1-1}A_{02} - E_{02}A_{11} + E_{02}A_{1-1}) + F_2(E_{11}Z_{02} + E_{1-1}Z_{02} + E_{02}Z_{11} - E_{02}Z_{1-1}) - e'\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0F'_4\right)A_{02} + F_4Z'_{02} + 2F_5e'E_{1-2}$$

$$2\,\boldsymbol{a}_{31} = e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + F'_2a_0\right)A_{21} + F_2E_{21} + \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0F'_2\right)E_{10}A_{11} + E_{20}A_{01} + E_{11}A_{10} + E_{01}A_{20}) + e_0F_2Z_{21} + F_2(E_{10}Z_{11} + E_{20}Z_{01} + E_{11}Z_{10} + E_{01}Z_{20}) - 2F_3(2e_0E_{11} + 2E_{01}E_{10}) - e'F_4Z'_{30} + 2F_5e'E_{20}$$

$$2\,a_{3-1} = e_0\left(\frac{1}{2}F_2 + F_2'\,a_0\right)A_{2-1} + F_2\,E_{2-1} + \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0\,F_2'\right)(E_{10}\,A_{1-1} + E_{20}\,A_{01} + E_{01}\,A_{20}$$
$$+ E_{1-1}\,A_{10}) + e_0\,F_2\,Z_{2-1} + F_2\,(E_{10}\,Z_{1-1} - E_{20}\,Z_{01} + E_{01}\,Z_{20} + E_{1-1}\,Z_{10})$$
$$- 2\,F_3\,(2\,e_0\,E_{1-1} + 2\,E_{01}\,E_{10}) - e'\,F_4\,Z_{30}' + 2\,F_5\,e'\,E_{2-2}$$

$$2\,a_{32} = \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0\,F_2'\right)E_{11}\,A_{11} + e_0 F_2 Z_{22} + F_2\,E_{11} Z_{11} - 2\,F_3\,(2\,e_0\,E_{12} + 2\,E_{01}\,E_{11}) + 2\,F_5\,e'\,E_{21}$$

$$2\,a_{3-2} = \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0\,F_2'\right)E_{1-1}\,A_{1-1} + e_0 F_2 Z_{2-2} + F_2\,E_{1-1} Z_{1-1} - 2\,F_3\,(2\,e_0\,E_{1-2} + 2\,E_{01}\,E_{1-1})$$

$$2\,a_{41} = \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0\,F_2'\right)(E_{20}\,A_{11} + E_{11}\,A_{20}) + F_2\,(E_{20}\,Z_{11} + E_{11}\,Z_{20}) - 2\,F_3\,(2\,e_0\,E_{21}$$
$$+ 2\,E_{10}\,E_{11})$$

$$2\,a_{4-1} = \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0\,F_2'\right)(E_{20}\,A_{1-1} + E_{1-1}\,A_{20}) + F_2\,(E_{20} Z_{1-1} + E_{1-1} Z_{20}) - 2\,F_3\,(2\,e_0\,E_{2-1}$$
$$+ 2\,E_{10}\,E_{1-1})$$

$$2\,a_{42} = -2\,F_3\,(2\,e_0\,E_{22} + E_{11}^2)$$

$$2\,a_{4-2} = -2\,F_3\,(2\,e_0\,E_{2-2} + E_{1-1}^2)$$

$$2\,a_{13} = \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0\,F_2'\right)(E_{01}\,A_{02} + E_{02}\,A_{01}) + e_0\,F_2\,Z_{03} + F_2\,(E_{01}\,Z_{02} + E_{02}\,Z_{01}) - e'\Bigg[\left(\frac{1}{2}F_4\right.$$
$$\left. + a_0\,F_4'\right)A_{12} + F_4\,Z_{03}'\Bigg] + 2\,F_5\,e'\,E_{02}$$

$$2\,a_{1-3} = \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0\,F_2'\right)(E_{01}\,A_{02} + E_{02}\,A_{01}) - e_0\,F_2\,Z_{03} + F_2\,(-E_{01}\,Z_{02} - E_{02}\,Z_{01})$$
$$- e'\left[-\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0\,F_4'\right)A_{1-2} - F_4\,Z_{03}'\right] - 2\,F_5\,e'\,E_{2-2}$$

$$2\,a_{2+3} = \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0\,F_2'\right)(E_{11}\,A_{02} + E_{02}\,A_{11}) + F_2(E_{11}Z_{02} + E_{02}\,Z_{11}) - e'\left(\frac{1}{2}F_4 + a_0\,F_4'\right)A_{22}$$
$$+ 2\,F_5\,e'\,E_{12}$$

$$2\,a_{2-3} = \left(\frac{1}{2}F_2 + a_0\,F_2'\right)(E_{1-1}\,A_{02} + E_{02}\,A_{1-1}) + F_2\,(-E_{1-1}\,Z_{02} + E_{02}\,Z_{1-1}) + e'\left(\frac{1}{2}F_4\right.$$
$$\left. + a_0\,F_4'\right)A_{2-2}$$

$$2\,a_{14} = 0$$

$$2\,a_{1-4} = 0$$

$$2\,a_{33} = 2\,e'\,F_5\,E_{22}$$

$$2\,a_{3-3} = 0.$$

Die letzte zu entwickelnde Differentialgleichung ist die für die Exzentrizität, also nach (6):

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2\,e}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\overline{\omega}} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2\,e}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon},$$

wo der 2. Term rechter Hand bei Potenzentwicklung nach e übergeht in: $-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n\,a^2}\,e\,\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$. Da im 1. Term der Faktor $\frac{\partial\Omega}{\partial\overline{\omega}}$ infolge einer Differentiation nach der Perihellänge $\overline{\omega}$ notwendig an eine Potenz der Exzentrizität e gebunden ist, so beginnt $\frac{1}{e}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\overline{\omega}}$ mindestens mit einem Gliede 0. Grades in e. Um die Entwicklung des 1. Gliedes rechter Hand bis zu den Termen 2. Grades, wie bisher immer, treiben zu können, ist also die Entwicklunge von Ω bis zum 3. Grade der Exzentrizitäten e und e' notwendig. Im 2. Gliede rechter Hand braucht $\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$ nur bis zu den in e und e' linearen Gliedern entwickelt zu werden, weil der hinzukommende Faktor e die Überführung dieser Glieder in den 2. Grad veranlaßt.

Ferner ist der Faktor $\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{1}{2}\,e^2 + \cdots$ im 1. Gliede rechter Hand bis zum 2. Grade zu entwickeln, um mit dem dadurch entstehenden Faktor e^2 zusammen mit dem Gliede 0. Grades in $\frac{1}{e}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\overline{\omega}}$ zu einem zu berücksichtigenden Terme 2. Grades zu führen.

Auf Grund der obigen Differentialgleichung für $\frac{de}{dt}$ ergibt sich zunächst:

$$(38)\quad \frac{de}{dt} = \frac{k^2\,m'}{n\,a^2}\Big[-F_2\sin\zeta + 2\,F_3\,e\sin 2\zeta - F_5\,e'\sin(\zeta+\zeta') + F_6\,e'\sin(\zeta-\zeta') + \frac{1}{2}\,F_4\,e\,e'\sin\zeta'$$
$$+ F_8\,e^2\sin\zeta + F_9\,e'^2\sin\zeta + 2\,F_{12}\,e\,e'\sin(2\zeta-\zeta') + F_{13}\,e'^2\sin(\zeta-2\zeta')$$
$$+ 3\,F_{14}\,e^2\sin 3\zeta + 2\,F_{15}\,e\,e'\sin(2\zeta+\zeta') + F_{16}\,e'^2\sin(\zeta+2\zeta')\Big]$$

$$= \frac{k^2\,m'}{n_0\,a_0^2}\,[T_1 + T_2 + \cdots + T_{12}],$$ wobei, wenn wieder $\frac{n_0\,a_0^2}{n\,a^2} = r$ gesetzt und die T_i nach Potenzen von e_0, e', A, E, Z und Z' entwickelt werden:

$$(39)\quad T_1 = -r\,F_2(a)\sin\zeta_0 = -F_2(a_0)\sin\zeta_0 + \left(\frac{1}{2}\,F_2 - a_0\,F_2'\right)A\sin\zeta_0 - F_2\,Z\cos\zeta_0 - \left(\frac{3}{8}\,F_2\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\,a_0\,F_2' + \frac{1}{2}\,a_0^2\,F_2''\right)A^2\sin\zeta_0 - \left(-\frac{1}{2}\,F_2 + a_0\,F_2'\right)A\,Z\cos\zeta_0 + \frac{1}{2}\,F_2\,Z^2\sin\zeta_0$$

$$T_2 = +2\,r F_3(a)\, e \sin 2\zeta = +2\,F_3(a_0)\,(e_0+E)\sin 2\,\zeta_0 + 2\left(-\frac{1}{2}F_3 + a_0 F_3'\right) e_0 A \sin 2\,\zeta_0$$
$$+\,2\left(-\frac{1}{2}F_3 + a_0 F_3'\right) A E \sin 2\zeta_0 + 4\,F_3\, e_0 Z \cos 2\zeta_0 + 4\,F_3\, E Z \cos 2\,\zeta_0$$

$$T_3 = -r F_5(a)\, e' \sin(\zeta+\zeta') = -F_5(a_0)\, e' \sin(\zeta_0+\zeta_0') - \left(-\frac{1}{2}F_5 + a_0 F_5'\right) e' A \sin(\zeta_0+\zeta_0')$$
$$-\,F_5\, e'\,(Z+Z')\cos(\zeta_0+\zeta_0')$$

$$T_4 = r F_6(a)\, e' \sin(\zeta-\zeta') = F_6(a_0)\, e' \sin(\zeta_0-\zeta_0') + \left(a_0 F_6' - \frac{1}{2}F_6\right) e' \;A \sin(\zeta_0-\zeta_0')$$
$$+\,F_6\, e'\,(Z-Z')\cos(\zeta_0-\zeta_0')$$

$$T_5 = \frac{1}{2} r F_4(a)\, e\, e' \sin\zeta' = \frac{1}{2}F_4(a_0)\,(e_0+E)\, e' \sin\zeta_0'$$

$$T_6 = r F_8(a)\, e^2 \sin\zeta = F_8(a_0)\, e_0^2 + 2\,e_0 E + E^2) \sin\zeta_0$$

$$T_7 = r F_9(a)\, e'^2 \sin\zeta = F_9(a_0)\, e'^2 \sin\zeta_0$$

$$T_8 = 2\,r F_{12}(a)\, e\, e' \sin(2\zeta-\zeta') = 2\,F_{12}(a_0)\,(e_0+E)\, e' \sin(2\,\zeta_0-\zeta_0')$$

$$T_9 = r F_{13}(a)\, e'^2 \sin(\zeta-2\zeta') = F_{13}(a_0)\, e'^2 \sin(\zeta_0-2\,\zeta_0')$$

$$T_{10} = 3\,r F_{14}(a)\, e^2 \sin 3\,\zeta = 3\,F_{14}(a_0)\,(e_0^2 + 2\,e_0 E + E^2)\sin 3\,\zeta_0$$

$$T_{11} = 2\,r F_{15}(a)\, e\, e' \sin(2\zeta+\zeta') = 2\,F_{15}(a_0)\,(e_0+E)\, e' \sin(2\,\zeta_0+\zeta_0')$$

$$T_{12} = r F_{16}(a)\, e'^2 \sin(\zeta+2\zeta') = F_{16}(a_0)\, e'^2 \sin(\zeta_0+2\,\zeta_0').$$

Bei der nunmehr durchzuführenden Entwicklung der T_i in Fourierreihen nach ζ_0 und ζ_0' zur Darstellung von $\frac{de}{dt}$ in der gleichen Form mögen für die häufig wiederkehrenden Koeffizienten die folgenden Abkürzungen eingeführt werden:

$$(40)\qquad \begin{cases} \frac{3}{8}F_2 - \frac{1}{2}a_0 F_2' + \frac{1}{2}a_0^2 F_2'' = h \\ a_0 F_i' - \frac{1}{2}F_i \qquad\qquad = f_i, \end{cases}$$

wobei $i = 2,\ 3,\ 5,\ 6$ vorkommt.

Dann wird:

$$(41)\qquad \frac{de}{dt} = \frac{k^2 m'}{n_0 a_0^2}\,\Sigma\, 2\,e_{\alpha\beta}\sin(\alpha\,\zeta_0 + \beta\,\zeta_0'),$$

wobei:

$$(42)\qquad 2\,e_{10} = -F_2 - \left(\frac{1}{2}F_2 - a_0 F_2'\right) A_{20} - F_2 Z_{20} + 2\,F_3\, E_{10} + \frac{1}{2}\, e'\; F_4\,(-\,E_{11} + E_{1-1})$$
$$+\,F_8\,[e_0^2 - 2\,e_0 E_{20} + E_{10}^2 + 2\,E_{11}^2 + 2\,E_{01}^2 + 2\,E_{1-1}^2 - 2\,E_{11}E_{1-1}] + F_9\, e'^2$$

$$+ 2 F_{12} e' E_{1-1} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{20} + E_{10}^2 + 2 E_{11} E_{1-1}] + 2 F_{15} e' E_{11} - h [A_{10}^2$$
$$+ 2 A_{11}^2 + 2 A_{01}^2 + 2 A_{1-1}^2 - 2 A_{1-1} A_{11}] - f_2 [A_{10} Z_{10} + A_{11} Z_{1-1} + A_{1-1} Z_{11}]$$
$$+ \frac{1}{2} F_2 [Z_{10}^2 + Z_{01}^2 - 2 Z_{01} Z_{21} + 2 Z_{01} Z_{2-1} + 2 Z_{11}^2 + Z_{1-1} Z_{11} + 2 Z_{1-1}^2]$$
$$+ 2 e_0 f_3 (A_{10} - A_{30}) + 2 f_3 [A_{11} E_{01} + A_{01} E_{11} + A_{01} E_{1-1} + A_{1-1} E_{01}]$$
$$+ 4 e_0 F_3 [- Z_{10} + Z_{30}] + 4 F_3 [2 E_{20} Z_{10} + E_{11} Z_{01} - E_{01} Z_{11} - E_{01} Z_{1-1}$$
$$- E_{1-1} Z_{01} + E_{21} Z_{11} + E_{21} Z_{1-1} + E_{2-1} Z_{11} + E_{2-1} Z_{1-1}] - e' [f_5 (A_{01} - A_{21})$$
$$+ F_5 [- Z_{01} + Z'_{01} + Z_{21} + Z'_{21}]] + e' [f_6 (A_{01} - A_{2-1}) + F_6 (Z_{01} - Z'_{01}$$
$$+ Z_{2-1} - Z'_{2-1})]$$

$$2 e_{20} = - f_2 A_{10} - F_2 (Z_{10} + Z_{30}) + 2 F_3 e_0 + \frac{1}{2} e' F_4 [- E_{21} + E_{2-1}] + F_8 [2 e_0 E_{10}$$
$$+ 2 E_{01} E_{11} + 2 E_{01} E_{1-1}] + 2 F_{12} e' E_{01} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{10} + 2 E_{01} E_{11}$$
$$+ 2 E_{01} E_{1-1}] + 2 F_{15} e' E_{01} - h [2 A_{01} A_{11} + 2 A_{01} A_{1-1}] - f_2 [2 A_{10} Z_{20}$$
$$- A_{11} Z_{01} + A_{01} Z_{1-1} + A_{1-1} Z_{01}] + \frac{1}{2} F_2 [+ 4 Z_{10} Z_{20} + 2 Z_{01} Z_{11} - Z_{01} Z_{1-1}$$
$$+ 2 Z_{11} Z_{21} + 2 Z_{11} Z_{2-1} + Z_{12} Z_{02} + Z_{21} Z_{1-1} + Z_{2-1} Z_{1-1}] + 2 f_3 [2 A_{10} E_{10}$$
$$- A_{30} E_{10} + 2 A_{11} E_{11} + 2 A_{01} E_{01} + 2 A_{1-1} E_{1-1}] + 4 F_3 [E_{10} Z_{30} + E_{30} Z_{10}]$$
$$- e' [f_5 A_{1-1} + F_5 (Z_{1-1} + Z'_{1-1})] + e' [f_6 A_{11} + F_6 (Z_{11} - Z'_{11})]$$

$$2 e_{30} = - f_2 A_{20} - F_2 Z_{20} + 2 F_3 E_{10} + F_8 [2 e_0 E_{20} + E_{10}^2 + 2 E_{11} E_{1-1}] + 2 F_{12} e' E_{11}$$
$$+ 3 F_{14} [e_0^2 + 2 E_{10}^2 + 2 E_{11}^2 + 2 E_{01}^2 + 2 E_{1-1}^2] + 2 F_{15} e' E_{1-1} - h (A_{10}^2$$
$$+ 2 A_{11} A_{1-1}) - f_2 (A_{10} Z_{10} + A_{1-1} Z_{11} + A_{11} Z_{1-1}) + \frac{1}{2} F_2 [- Z_{10}^2 + 2 Z_{01} Z_{21}$$
$$- 2 Z_{01} Z_{2-1} - 2 Z_{11} Z_{1-1}] + 2 e_0 f_3 A_{10} + 2 f_3 [A_{10} E_{20} + A_{20} E_{10} + A_{11} E_{01}$$
$$+ A_{01} E_{11} + A_{01} E_{1-1} + A_{1-1} E_{01}] + 4 e_0 F_3 Z_{10} + 4 F_3 [E_{10} Z_{20} - E_{20} Z_{10}$$
$$- E_{11} Z_{01} + E_{01} Z_{11} + E_{01} Z_{1-1} + E_{1-1} Z_{01} - E_{21} Z_{11} - E_{2-1} Z_{1-1}]$$
$$- e' [f_5 A_{2-1} + F_5 (Z_{2-1} + Z'_{2-1})] + e' [f_6 A_{21} + F_6 (Z_{21} - Z'_{21})]$$

$$2 e_{40} = - F_2 Z_{30} + 2 F_3 E_{20} + 2 F_{12} e' E_{21} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{10} + 2 E_{01} E_{11} + 2 E_{01} E_{1-1}]$$
$$+ 2 F_{15} e' E_{2-1} - f_2 (A_{10} Z_{20} + A_{20} Z_{10}) + \frac{1}{2} F_2 [- 2 Z_{10} Z_{20} - 2 Z_{11} Z_{2-1}$$
$$- Z_{21} Z_{1-1}] + 2 e_0 f_3 A_{20} + 2 f_3 (A_{10} E_{10} + A_{11} E_{1-1} + A_{01} E_{21} + A_{01} E_{2-1}$$

$$+ A_{1-1} E_{11} + A_{21} E_{01} + A_{2-1} E_{01}) + 4 e_0 F_3 Z_{20} + 4 F_3 [E_{10} Z_{10} + E_{11} Z_{1-1} + E_{01} Z_{21} + E_{01} Z_{2-1} + E_{1-1} Z_{11} - E_{21} Z_{01} + E_{2-1} Z_{01}]$$

$$\mathbf{2\,e_{11}} = -f_2 (A_{01} - A_{21}) - F_2 (Z_{01} + Z_{21}) + 2 F_3 E_{1-1} - F_5 e' + \frac{1}{2} e' F_4 [E_{10} - E_{12}] + F_8 [2 e_0 (E_{01} - E_{21}) + 2 E_{10} E_{1-1}] + 2 F_{12} e' [-E_{30} + E_{1-2}] + 3 F_{14} [2 e_0 E_{2-1} + 2 E_{10} E_{1-1}] + 2 F_{15} e' E_{10} - 2 h A_{10} A_{11} - f_2 (2 A_{10} Z_{11} - A_{10} Z_{1-1} + A_{20} Z_{01} + A_{01} Z_{20} + A_{01} Z_{02} + A_{1-1} Z_{10} - A_{02} Z_{01}) + \frac{1}{2} F_2 [4 Z_{10} Z_{11} + 2 Z_{10} Z_{1-1} + 2 Z_{20} Z_{01} + 2 Z_{01} Z_{02} + 2 Z_{11} Z_{12} + 2 Z_{12} Z_{1-1} + 2 Z_{1-2} Z_{1-1} - 2 Z_{22} Z_{01}] + 2 e_0 f_3 A_{1-1} + 2 f_3 [A_{10} E_{01} - A_{10} E_{21} + A_{10} E_{2-1} - A_{30} E_{01} + A_{11} E_{02} + A_{01} E_{10} + A_{01} E_{1-2} + A_{1-2} E_{01} - A_{21} E_{10} + A_{02} E_{11}] - 4 F_3 e_0 Z_{1-1} + 4 F_3 [E_{10} Z_{01} + E_{10} Z_{21} - E_{10} Z_{2-1} + 2 E_{20} Z_{11} + E_{11} Z_{02} - E_{01} Z_{10} - E_{01} Z_{1-2} - E_{1-2} Z_{01} + E_{21} Z_{10} - E_{02} Z_{11} + E_{2-1} Z_{10}] - e' [f_5 A_{22} + F_5 (Z_{22} + Z'_{22})] + e' [f_6 (-A_{20} + A_{02}) + F_6 (Z_{20} - Z'_{20} + Z_{02} - Z'_{02})]$$

$$\mathbf{2\,e_{12}} = -f_2 (-A_{22} + A_{02}) - F_2 (Z_{22} + Z_{02}) + 2 F_3 E_{1-2} + \frac{1}{2} e' F_4 E_{11} + F_8 [2 e_0 E_{02} + E_{01}^2 + 2 E_{11} E_{1-1} - E_{11}^2] + 3 F_{14} [2 e_0 E_{2-2} + E_{1-1}^2] + 2 F_{15} e' E_{1-1} + F_{16} e'^2 - h (A_{01}^2 + 2 A_{11} A_{1-1} - A_{11}^2) - f_2 (A_{11} Z_{11} - A_{11} Z_{1-1} + A_{01} Z_{01} + A_{1-1} Z_{11}) + \frac{1}{2} F_2 [-Z_{01}^2 + 2 Z_{01} Z_{21} + Z_{11}^2 + 2 Z_{11} Z_{1-1} + 2 Z_{12} Z_{10} + 2 Z_{1-2} Z_{10} + 2 Z_{21} Z_{01}] + 2 e_0 f_3 A_{1-2} + 2 f_3 (-A_{10} E_{22} - A_{22} E_{10} + A_{10} E_{02} + A_{10} E_{2-2} + A_{01} E_{1-1} + A_{1-1} E_{01} + A_{02} E_{10} + A_{2-2} E_{10}) - 4 F_3 e_0 Z_{1-2} + 4 F_3 [E_{10} Z_{22} + E_{10} Z_{02} - E_{10} Z_{2-2} - E_{01} Z_{1-1} + E_{1-1} Z_{01} + E_{21} Z_{11} + E_{22} Z_{10} - E_{02} Z_{10} + E_{2-1} Z_{11} + E_{2-2} Z_{10}] - e' [f_5 A_{01} + F_5 (Z_{01} + Z'_{01})] + e' [f_6 (-A_{21} + A_{03}) + F_6 (Z_{21} - Z'_{21} + Z_{03} - Z'_{03})]$$

$$\mathbf{2\,e_{01}} = -f_2 (-A_{11} + A_{1-1}) - F_2 (Z_{11} - Z_{1-1}) + 2 F_3 (-E_{21} + E_{2-1}) + \frac{1}{2} e' F_4 [e_0 - E_{02}] + F_8 [2 e_0 (-E_{11} + E_{1-1})] + 2 F_{12} e' [-E_{20} + E_{2-2}] + 2 F_{15} e' [E_{20} - E_{22}] - 4 h A_{01} A_{10} - f_2 (2 A_{10} Z_{01} + A_{20} Z_{11} - A_{20} Z_{1-1} - A_{11} Z_{20} + A_{11} Z_{02} + A_{1-1} Z_{20} + A_{1-1} Z_{02} - A_{02} Z_{11} + A_{02} Z_{1-1}) + \frac{1}{2} F_2 [2 Z_{10} Z_{01} + 2 Z_{20} Z_{11}$$

$$
\begin{aligned}
&-2 Z_{20} Z_{1-1} - 2 Z_{01} Z_{12} - 2 Z_{01} Z_{1-2} + 2 Z_{11} Z_{02} + 2 Z_{1-1} Z_{02} - 2 Z_{21} Z_{10} \\
&-2 Z_{22} Z_{11} + 2 Z_{2-1} Z_{10} + Z_{2-2} Z_{1-1}] + 2 e_0 f_3 (-A_{21} + A_{2-1}) + 2 f_3 [-A_{10} E_{11} \\
&+ A_{10} E_{1-1} - A_{20} E_{01} - A_{11} E_{10} - A_{22} E_{01} - A_{01} E_{22} + A_{01} E_{2-2} + A_{1-1} E_{10} \\
&- A_{2-2} E_{01}] + 4 F_3 e_0 [Z_{21} - Z_{2-1}] + 4 F_3 [E_{10} Z_{11} - E_{10} Z_{1-1} + 2 E_{20} Z_{01} \\
&+ E_{11} Z_{10} + E_{12} Z_{1-1} - E_{1-1} Z_{10} - E_{1-2} Z_{11} - E_{22} Z_{01} - E_{2-2} Z_{01}] \\
&- e' [f_5 (A_{10} - A_{12}) + F_5 (-Z_{10} - Z'_{10} + Z_{12} + Z'_{12})] + e' [f_6 (-A_{10} + A_{1-2}) \\
&+ F_6 (Z_{10} - Z'_{10} - Z_{1-2} + Z'_{1-2})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2 e_{1-1} = &-f_2 (A_{01} - A_{2-1}) - F_2 (-Z_{01} + Z_{2-1}) + 2 F_3 E_{11} + F_6 e' + \frac{1}{2} e' F_4 [-E_{10} \\
&+ E_{1-2}] + F_8 [2 e_0 (E_{01} - E_{2-1}) + 2 E_{10} E_{11}] + 2 F_{12} e' E_{10} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{21} \\
&+ 2 E_{10} E_{11}] + 2 F_{15} e' [-E_{30} + E_{12}] - h (2 A_{10} A_{11} + 2 A_{10} A_{1-1} - 2 A_{10} A_{1-1}) \\
&- f_2 (-A_{10} Z_{11} + 2 A_{10} Z_{1-1} - A_{20} Z_{01} + A_{11} Z_{10} + A_{01} Z_{20} - A_{01} Z_{02} + A_{02} Z_{01}) \\
&+ \frac{1}{2} F_2 [2 Z_{10} Z_{11} + 4 Z_{10} Z_{1-1} - 2 Z_{20} Z_{01} + 2 Z_{01} Z_{02} + 2 Z_{11} Z_{12} + 2 Z_{11} Z_{1-2} \\
&+ 2 Z_{1-2} Z_{1-1} + 2 Z_{2-2} Z_{01}] + 2 e_0 f_3 A_{11} + 2 f_3 [A_{10} E_{01} + A_{10} E_{21} - A_{10} E_{2-1} \\
&+ A_{12} E_{01} + A_{01} E_{10} + A_{01} E_{12} + A_{1-1} E_{02} + A_{21} E_{10} + A_{02} E_{1-1} - A_{2-1} E_{10}] \\
&- 4 F_3 e_0 Z_{11} + 4 F_3 [-E_{10} Z_{01} - E_{10} Z_{21} + E_{10} Z_{2-1} + 2 E_{20} Z_{1-1} + E_{12} Z_{01} \\
&- E_{01} Z_{10} - E_{01} Z_{12} - E_{1-1} Z_{02} + E_{21} Z_{10} - E_{02} Z_{1-1} + E_{2-1} Z_{10}] - e' [f_5 (-E_{20} \\
&+ E_{02}) + F_5 (Z_{20} + Z'_{20} - Z_{02} - Z'_{02})] + e' [-f_6 A_{2-2} + F_6 (Z_{2-2} - Z'_{2-2})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2 e_{1-2} = &-f_2 (A_{02} - A_{2-2}) - F_2 (-Z_{02} + Z_{2-2}) + 2 F_3 E_{12} - \frac{1}{2} e' F_4 E_{1-1} + F_8 [2 e_0 E_{02} \\
&+ E_{01}^2 + 2 E_{11} E_{1-1} + E_{1-1}^2] + 2 F_{12} e' E_{11} + F_{13} e'_2 + 3 F_{14} [2 e_0 E_{22} + E_{11}^2] \\
&- h (A_{01}^2 + 2 A_{11} A_{1-1} - A_{1-1}^2) - f_2 (A_{11} Z_{1-1} - A_{01} Z_{01} - A_{1-1} Z_{11} \\
&+ A_{1-1} Z_{1-1}) + \frac{1}{2} F_2 (-Z_{01}^2 - Z_{01} Z_{2-1} + 2 Z_{11} Z_{1-1} + 2 Z_{12} Z_{10} + Z_{1-1}^2 \\
&+ 2 Z_{1-2} Z_{10} - 2 Z_{2-1} Z_{01}) + 2 e_0 f_3 A_{12} + 2 f_3 [A_{10} E_{22} + A_{22} E_{10} + A_{10} E_{02} \\
&- A_{10} E_{2-2} + A_{11} E_{01} + A_{01} E_{11} + A_{02} E_{10} - A_{2-2} E_{10}] - 4 F_3 e_0 Z_{12} \\
&+ 4 F_3 [-E_{10} Z_{22} - E_{10} Z_{02} + E_{10} Z_{2-2} - E_{11} Z_{01} - E_{01} Z_{11} + E_{21} Z_{1-1} \\
&+ E_{22} Z_{10} - E_{02} Z_{10} + E_{2-1} Z_{1-1} + E_{2-2} Z_{10}] - e' [f_5 (-A_{2-1} + A_{03}) \\
&+ F_5 (Z_{2-1} + Z'_{2-1} - Z_{03} - Z'_{03})] + e' [f_6 A_{01} + F_6 (-Z_{01} + Z'_{01})]
\end{aligned}
$$

$$2\,\mathbf{e_{21}} = -f_2 A_{11} - F_2 Z_{11} + 2 F_3 E_{01} + \frac{1}{2} e' F_4 [E_{20} - E_{22}] + F_8 [2 e_0 E_{11} + 2 E_{01} E_{10}]$$
$$+ 2 F_{12} e' E_{02} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{1-1} + 2 E_{01} E_{10}] + 2 F_{15} e' e_0 - 2 h A_{01} A_{10}$$
$$- f_2 (A_{10} Z_{01} + A_{20} Z_{11} - A_{20} Z_{1-1} + A_{11} Z_{20} + A_{01} Z_{10} + A_{1-1} Z_{20} + A_{1-1} Z_{02}$$
$$+ A_{02} Z_{1-1}) + \frac{1}{2} F_2 (-2 Z_{10} Z_{01} + 2 Z_{20} Z_{11} + 2 Z_{20} Z_{1-1} + 2 Z_{01} Z_{12} - 2 Z_{1-1} Z_{02}$$
$$+ 2 Z_{21} Z_{10} + 2 Z_{11} Z_{22} + 2 Z_{22} Z_{1-1}) + 2 e_0 f_3 A_{01} + 2 f_3 [A_{10} E_{11} + A_{10} E_{1-1}$$
$$+ A_{11} E_{10} + A_{01} E_{02} + A_{1-1} E_{10} + A_{02} E_{01}] + 4 F_3 e_0 Z_{01} + 4 F_3 [E_{10} Z_{11}$$
$$+ E_{10} Z_{1-1} - E_{11} Z_{10} - E_{12} Z_{11} + E_{01} Z_{02} + E_{1-1} Z_{10} + E_{1-2} Z_{1-1}$$
$$- E_{02} Z_{01}] - e' [f_5 A_{10} + F_5 (Z_{10} + Z'_{10})] + e' [f_6 (-A_{30} + A_{12}) + F_6 (Z_{30}$$
$$- Z'_{30} + Z_{12} - Z'_{12})]$$

$$2\,\mathbf{e_{22}} = -f_2 A_{12} - F_2 Z_{12} + 2 F_3 E_{02} + \frac{1}{2} e' F_4 E_{21} + F_8 [2 e_0 E_{12} + 2 E_{01} E_{11}]$$
$$+ 2 F_{12} e' E_{03} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{1-2} + 2 E_{01} E_{1-1}] + 2 F_{15} e' E_{01} - 2 h A_{01} A_{11}$$
$$- f_2 (A_{10} Z_{02} + A_{11} Z_{01} + A_{01} Z_{11} + A_{02} Z_{10}) + \frac{1}{2} F_2 (-2 Z_{10} Z_{02} - 2 Z_{01} Z_{11}$$
$$+ 2 Z_{11} Z_{21} + 2 Z_{21} Z_{1-1} + 2 Z_{22} Z_{10}) + 2 e_0 f_3 A_{02} + 2 f_3 [A_{10} E_{12} + A_{10} E_{1-2}$$
$$+ A_{11} E_{1-1} + A_{12} E_{10} + A_{01} E_{01} + A_{1-1} E_{11} + A_{1-2} E_{10}] + 4 F_3 e_0 Z_{02}$$
$$+ 4 F_3 [E_{10} Z_{12} - E_{10} Z_{1-2} - E_{11} Z_{1-1} - E_{12} Z_{10} + E_{01} Z_{01} + E_{1-1} Z_{11}$$
$$+ E_{1-2} Z_{10}] - e' [f_5 A_{11} + F_5 (Z_{11} + Z'_{11})]$$

$$2\,\mathbf{e_{02}} = -f_2 (-A_{12} + A_{1-2}) - F_2 (Z_{12} - Z_{1-2}) + 2 F_3 (-E_{22} + E_{2-2}) + \frac{1}{2} e' F_4 E_{01}$$
$$+ F_8 [2 e_0 (E_{1-2} - E_{12}) - 2 E_{01} E_{11} + 2 E_{01} E_{1-1}] - 2 F_{12} e' E_{21} + 2 F_{15} e' E_{2-1}$$
$$+ h A_{01} A_{11} - f_2 (2 A_{10} Z_{02} + A_{11} Z_{01} + A_{01} Z_{11} - A_{01} Z_{1-1} + A_{1-1} Z_{01})$$
$$+ \frac{1}{2} F_2 (4 Z_{10} Z_{02} + 2 Z_{01} Z_{10} + 2 Z_{01} Z_{11} + 2 Z_{01} Z_{1-1} + 2 Z_{11} Z_{2-1} - 2 Z_{21} Z_{1-1}$$
$$+ 2 Z_{22} Z_{10} + 2 Z_{2-2} Z_{10}) + 2 e_0 f_3 (-A_{22} + A_{2-2}) + 2 f_3 [-A_{10} E_{12} + A_{10} E_{1-2}$$
$$- A_{11} E_{11} - A_{12} E_{10} - A_{01} E_{21} + A_{01} E_{2-1} + A_{1-1} E_{1-1} + A_{1-2} E_{10} - A_{21} E_{01}$$
$$- A_{2-1} E_{01}] + 4 F_3 e_0 [Z_{22} - Z_{2-2}] + 4 F_3 [E_{10} Z_{12} - E_{10} Z_{1-2} + E_{11} Z_{11}$$
$$+ E_{12} Z_{10} + E_{01} Z_{21} + E_{01} Z_{2-1} - E_{1-1} Z_{1-1} - E_{1-2} Z_{10} + E_{21} Z_{01} + E_{2-1} Z_{01}]$$
$$- e' [f_5 A_{1-1} + F_5 (-Z_{1-1} + Z'_{1-1})] + e' [-f_6 A_{11} + F_6 (Z_{11} - Z'_{11})]$$

$$\begin{aligned}
2\,\mathbf{e}_{2-1} = & -f_2 A_{1-1} - F_2 Z_{1-1} + 2 F_3 E_{01} + \frac{1}{2} e' F_4 (- E_{20} + E_{2-2}) + F_8 [2 e_0 E_{1-1} \\
& + 2 E_{01} E_{10}] + 2 F_{12} e' e_0 + 3 F_{14} [2 e_0 E_{11} + 2 E_{01} E_{10}] + 2 F_{15} e' E_{02} \\
& - 2 h A_{01} A_{10} - f_2 (- A_{10} Z_{01} - A_{20} Z_{11} + A_{20} Z_{1-1} + A_{11} Z_{20} - A_{11} Z_{02} \\
& + A_{01} Z_{10} + A_{1-1} Z_{20} + A_{02} Z_{11}) + \frac{1}{2} F_2 [2 Z_{10} Z_{01} + 2 Z_{20} Z_{11} + 2 Z_{20} Z_{1-1} \\
& - Z_{30} Z_{01} - 2 Z_{01} Z_{1-2} + 2 Z_{11} Z_{02} + 2 Z_{10} Z_{2-1} + 2 Z_{2-2} Z_{11} + 2 Z_{2-2} Z_{1-1}] \\
& + 2 e_0 f_3 A_{01} + 2 f_3 (A_{10} E_{11} + A_{10} E_{1-1} + A_{11} E_{10} + A_{01} E_{02} + A_{1-1} E_{10} \\
& + A_{02} E_{01}) - 4 F_3 e_0 Z_{01} + 4 F_3 [- E_{10} Z_{11} + E_{10} Z_{1-1} + E_{11} Z_{10} + E_{12} Z_{11} \\
& - E_{01} Z_{02} - E_{1-1} Z_{10} - E_{1-2} Z_{1-1} + E_{02} Z_{01}] - e' [f_5 A_{1-2} + F_5 (Z_{30} + Z'_{30} \\
& + Z_{1-2} + Z'_{1-2})] + e' [f_6 A_{10} + F_6 (Z_{10} - Z'_{10})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\,\mathbf{e}_{2-2} = & -f_2 A_{1-2} - F_2 Z_{1-2} + 2 F_3 E_{02} - \frac{1}{2} e' F_4 E_{2-1} + F_8 [2 e_0 E_{1-2} + 2 E_{01} E_{1-1}] \\
& + 2 F_{12} e' E_{01} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{12} + 2 E_{01} E_{11} + 2 F_{15} e' E_{03} - 2 h A_{01} A_{1-1} \\
& - f_2 (- A_{10} Z_{02} + A_{01} Z_{1-1} - A_{1-1} Z_{01} + A_{02} Z_{10}) + \frac{1}{2} F_2 (2 Z_{10} Z_{02} + 2 Z_{01} Z_{1-1} \\
& + 2 Z_{11} Z_{2-1} + 2 Z_{12} Z_{20} + 2 Z_{22} Z_{10} + 2 Z_{2-1} Z_{1-1} + 2 Z_{2-2} Z_{10}) + 2 e_0 f_3 A_{02} \\
& + 2 f_3 (A_{10} E_{12} + A_{10} E_{1-2} + A_{11} E_{1-1} + A_{12} E_{10} + A_{01} E_{01} + A_{1-1} E_{11} \\
& + A_{1-2} E_{10} - 4 F_3 e_0 Z_{02} + 4 F_3 [- E_{10} Z_{12} + E_{10} Z_{1-2} + E_{11} Z_{1-1} + E_{12} Z_{10} \\
& - E_{01} Z_{01} - E_{1-1} Z_{11} - E_{1-2} Z_{10}] + e' [f_6 A_{1-1} + F_6 (Z_{1-1} - Z'_{1-1})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\,\mathbf{e}_{03} = & \frac{1}{2} e' F_4 E_{02} - 2 F_{12} e' E_{22} + 2 F_{15} e' E_{2-2} - f_2 (A_{11} Z_{02} + A_{1-1} Z_{02} + A_{02} Z_{11} \\
& - A_{02} Z_{1-1}) + \frac{1}{2} F_2 (2 Z_{01} Z_{12} + 2 Z_{01} Z_{1-2} + 2 Z_{11} Z_{02} + 2 Z_{1-1} Z_{02} - 2 Z_{22} Z_{1-1} \\
& + 2 Z_{02} Z_{1-1} + 2 Z_{2-2} Z_{11} + 2 f_3 (- A_{01} E_{22} - A_{22} E_{01} + A_{01} E_{2-2} + A_{2-2} E_{01}) \\
& + 4 F_3 [E_{12} Z_{11} - E_{1-2} Z_{1-1} + E_{22} Z_{01} + E_{2-2} Z_{01}] - e' [f_5 A_{1-2} - F_5 Z_{1-2} \\
& - Z'_{1-2})] + e' [- f_6 A_{12} + F_6 (Z_{12} - Z'_{12})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\,\mathbf{e}_{31} = & -f_2 A_{21} - F_2 Z_{21} + 2 F_3 E_{11} + F_8 [2 e_0 E_{21} + 2 E_{10} E_{11}] + 2 F_{12} e' E_{12} \\
& + 3 F_{14} [2 e_0 E_{01} + 2 E_{10} E_{11} + 2 E_{10} E_{1-1}] + 2 F_{15} e' E_{10} - 2 h A_{10} A_{11} \\
& - f_2 (A_{10} Z_{11} + A_{20} Z_{01} + A_{11} Z_{10} + A_{01} Z_{20}) + \frac{1}{2} F_2 [- 2 Z_{01} Z_{20} - 2 Z_{10} Z_{11} \\
& - Z_{12} Z_{1-1} + Z_{22} Z_{01}] + 2 e_0 f_3 A_{11} + 2 f_3 (A_{10} E_{01} + A_{10} E_{21} + A_{20} E_{1-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ A_{12} E_{01} + A_{01} E_{10} + A_{01} E_{12} + A_{1-1} E_{20} + A_{1-1} E_{02} + A_{21} E_{10} + A_{02} E_{1-1}) \\
&+ 4 F_3 e_0 Z_{11} + 4 F_3 [E_{10} Z_{01} + E_{10} Z_{21} - E_{20} Z_{1-1} - E_{12} Z_{01} + E_{01} Z_{10} + E_{01} Z_{12} \\
&+ E_{1-1} Z_{20} + E_{1-1} Z_{02} - E_{21} Z_{10} + E_{02} Z_{1-1}] - e' [f_5 A_{20} + F_5 (Z_{20} + Z'_{20})] \\
&+ e' [f_6 A_{22} + F_6 (Z_{22} - Z'_{22})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{2\, e_{3-1}} = &- f_2 A_{2-1} - F_2 Z_{2-1} + 2 F_3 E_{1-1} + F_8 [2 e_0 E_{2-1} + 2 E_{10} E_{1-1}] + 2 F_{12} e' E_{10} \\
&+ 3 F_{14} [2 e_0 E_{01} + 2 E_{10} E_{11} + 2 E_{10} E_{1-1}] + 2 F_{15} e' E_{1-2} - 2 h A_{10} A_{1-1} \\
&- f_2 (A_{10} Z_{1-1} - A_{20} Z_{01} + A_{01} Z_{20} + A_{1-1} Z_{10}) + \frac{1}{2} F_2 [-2 Z_{10} Z_{1-1} + 2 Z_{20} Z_{01} \\
&- 2 Z_{11} Z_{1-2} - 2 Z_{2-2} Z_{01}] + 2 e_0 f_3 A_{1-1} + 2 f_3 (A_{10} E_{01} + A_{10} E_{2-1} + A_{20} E_{11} \\
&+ A_{11} E_{20} + A_{11} E_{02} + A_{01} E_{10} + A_{01} E_{1-2} + A_{1-2} E_{01} + A_{02} E_{11} + A_{2-1} E_{10}) \\
&+ 4 F_3 e_0 Z_{1-1} + 4 F_3 [- E_{10} Z_{01} + E_{10} Z_{2-1} - E_{20} Z_{11} + E_{11} Z_{20} - E_{11} Z_{02} \\
&+ E_{01} Z_{10} + E_{01} Z_{1-2} + E_{1-2} Z_{01} + E_{02} Z_{11} - E_{2-1} Z_{10}] - e' [f_5 A_{2-2} \\
&+ F_5 (Z_{2-2} + Z'_{2-2})] + e' [f_6 A_{20} + F_6 (Z_{20} - Z'_{20})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{2\, e_{32}} = &- f_2 A_{22} - F_2 Z_{22} + 2 F_3 E_{12} + F_8 E_{11}^2 + 3 F_{14} [2 e_0 E_{02} + E_{01}^2 + 2 E_{11} E_{1-1}] \\
&+ 2 F_{15} E_{11} - h A_{11}^2 - f_2 A_{11} Z_{11} + \frac{1}{2} F_2 [- 2 Z_{01} Z_{21} - Z_{11}^2 - 2 Z_{12} Z_{10}] \\
&+ 2 e_0 f_3 A_{12} + 2 f_3 (A_{10} E_{22} + A_{22} E_{10} + A_{10} E_{02} + A_{11} E_{01} + A_{01} E_{11} + A_{02} E_{10}) \\
&+ 4 F_3 e_0 Z_{12} + 4 F_3 [E_{10} Z_{22} + E_{10} Z_{02} + E_{11} Z_{01} + E_{01} Z_{11} - E_{21} Z_{1-1} - E_{22} Z_{10} \\
&+ E_{02} Z_{10}] - e' [f_5 A_{21} + F_5 (Z_{21} + Z'_{21})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{2\, e_{3-2}} = &- f_2 A_{2-2} - F_2 Z_{2-2} + 2 F_3 E_{1-2} + F_8 E_{1-1}^2 + 2 F_{12} e' E_{1-1} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{02} \\
&+ E_{01}^2 + 2 E_{11} E_{1-1}] - h A_{1-1}^2 - f_2 (- A_{20} Z_{02} + A_{1-1} Z_{1-1}) + \frac{1}{2} F_2 [2 Z_{01} Z_{2-1} \\
&- Z_{1-1}^2 - 2 Z_{1-2} Z_{10}] + 2 e_0 f_3 A_{1-2} + 2 f_3 (A_{10} E_{02} + A_{10} E_{2-2} + A_{01} E_{1-1} \\
&+ A_{1-1} E_{01} + A_{02} E_{10} + A_{2-2} E_{10}) + 4 F_3 e_0 Z_{1-2} + 4 F_3 [- E_{10} Z_{02} + E_{10} Z_{2-2} \\
&+ E_{01} Z_{1-1} - E_{1-1} Z_{01} + E_{02} Z_{10} - E_{2-1} Z_{11} - E_{2-2} Z_{10}] + e' [f_6 A_{2-1} \\
&+ F_6 (Z_{2-1} - Z'_{21})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{2\, e_{41}} = &\, 2 F_3 E_{21} + 2 F_{12} e' E_{22} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{11} + 2 E_{01} E_{10}] + 2 F_{15} e' E_{20} \\
&- f_2 (A_{20} Z_{11} + A_{11} Z_{20}) + \frac{1}{2} F_2 [- 2 Z_{11} Z_{20} - 2 Z_{21} Z_{10} - 2 Z_{22} Z_{1-1}] + 2 e_0 f_3 A_{21}
\end{aligned}
$$

$$+ 2 f_3 (A_{10} E_{11} + A_{22} E_{01} + A_{20} E_{01} + A_{11} E_{10} + A_{01} E_{20} + A_{01} E_{22}) + 4 F_3 e_0 Z_{21}$$
$$+ 4 F_3 [E_{10} Z_{11} + E_{20} Z_{01} + E_{11} Z_{10} + E_{12} Z_{1-1} + E_{01} Z_{20} - E_{22} Z_{01}]$$
$$- e' F_5 (Z_{30} + Z'_{30})$$

$$2\,\mathbf{e}_{4-1} = 2 F_3 E_{2-1} + 2 F_{12} e' E_{20} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{1-1} + 2 E_{01} E_{10}] + 2 F_{15} e' E_{2-2}$$
$$- f_2 (A_{20} Z_{1-1} + A_{1-1} Z_{20}) + \frac{1}{2} F_2 [- 2 Z_{20} Z_{1-1} - 2 Z_{2-1} Z_{10} - 2 Z_{2-2} Z_{11}]$$
$$+ 2 e_0 f_3 A_{2-1} + 2 f_3 (A_{10} E_{1-1} + A_{20} E_{01} + A_{01} E_{20} + A_{1-1} E_{10} + A_{01} E_{2-2})$$
$$+ 4 F_3 e_0 Z_{2-1} + 4 F_3 [E_{10} Z_{1-1} - E_{20} Z_{01} + E_{1-1} Z_{10} + E_{01} Z_{20} + E_{1-2} Z_{11}$$
$$+ E_{2-2} Z_{01}] + e' [f_6 A_{30} + F_6 (Z_{30} - Z'_{30})]$$

$$2\,\mathbf{e}_{42} = 2 F_3 E_{22} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{12} + 2 E_{01} E_{11}] + 2 F_{15} e' E_{21} + 2 e_0 f_3 A_{22} + 2 f_3 (A_{10} E_{12}$$
$$+ A_{11} E_{11} + A_{12} E_{10} + A_{01} E_{21} + A_{21} E_{01}) + 4 F_3 e_0 Z_{22} + 4 F_3 [E_{10} Z_{12}$$
$$+ E_{11} Z_{11} + E_{12} Z_{10} + E_{01} Z_{21} + E_{21} Z_{01}]$$

$$2\,\mathbf{e}_{4-2} = 2 F_3 E_{2-2} + 2 F_{12} e' E_{2-1} + 3 F_{14} (2 e_0 E_{1-2} + 2 E_{01} Z_{1-1}) + 2 e_0 f_3 A_{2-2}$$
$$+ 2 f_3 (A_{10} E_{1-2} + A_{01} E_{2-1} + A_{1-1} E_{1-1} + A_{1-2} E_{10} + A_{2-1} E_{01}) + 4 F_3 e_0 Z_{2-2}$$
$$+ 4 F_3 [E_{10} Z_{1-2} + E_{1-1} Z_{1-1} + E_{1-2} Z_{10} - E_{2-1} Z_{01} + E_{01} Z_{2-1}]$$

$$2\,\mathbf{e}_{13} = - F_2 Z_{03} + \frac{1}{2} e' F_4 E_{12} + 2 F_{15} e' E_{1-2} - f_2 (A_{01} Z_{02} + A_{02} Z_{01}) + \frac{1}{2} F_2 [- 2 Z_{01} Z_{02}$$
$$+ 2 Z_{11} Z_{12} + 2 Z_{11} Z_{1-2} + 2 Z_{12} Z_{1-1} + 2 Z_{22} Z_{01} - 2 Z_{02} Z_{01}] + 2 f_3 (A_{01} E_{1-2}$$
$$+ A_{1-1} E_{02} + A_{1-2} E_{01} + A_{02} Z_{1-1}) + 4 F_3 [E_{10} Z_{03} - E_{01} Z_{1-2} + E_{1-1} Z_{02}$$
$$+ E_{1-2} Z_{01} - E_{02} Z_{1-1}] - e' [f_5 A_{02} + F_5 (Z_{02} + Z'_{02})] + e' [- f_6 A_{22}$$
$$+ F_6 (Z_{22} - Z'_{22})]$$

$$2\,\mathbf{e}_{1-3} = F_2 Z_{03} - \frac{1}{2} e' F_4 E_{1-2} + 2 F_{12} e' E_{12} - f_2 (- A_{01} Z_{02} - A_{02} Z_{01}) + \frac{1}{2} F_2 [- 2 Z_{01} Z_{02}$$
$$+ 2 Z_{11} Z_{1-2} + 2 Z_{12} Z_{1-1} + 2 Z_{1-2} Z_{1-1} - 2 Z_{2-2} Z_{01}] + 2 f_3 (A_{11} E_{02}$$
$$+ A_{12} E_{01} + A_{01} E_{12} + A_{02} E_{11}) + 4 F_3 [- E_{10} Z_{03} - E_{11} Z_{02} - E_{12} Z_{01}$$
$$- E_{01} Z_{12} - E_{02} Z_{11}] - e' [- f_5 A_{2-2} + F_5 (- Z_{2-2} - Z'_{2-2})] + e' [f_6 A_{02}$$
$$+ F_6 (- Z_{02} + Z'_{02})]$$

$$2\,\mathbf{e}_{23} = \frac{1}{2} e' F_4 E_{22} + 2 F_{15} e' E_{02} - f_2 (A_{11} Z_{02} + A_{02} Z_{11}) + \frac{1}{2} F_2 [-2 Z_{01} Z_{12} - 2 Z_{11} Z_{02} + 2 Z_{22} Z_{11} + 2 Z_{22} Z_{1-1}] + 2 e_0 f_3 A_{03} + 2 f_3 (A_{01} E_{02} + A_{02} Z_{01}) + 4 F_3 e_0 Z_{03} + 4 F_3 [-E_{12} Z_{1-1} + E_{01} Z_{02} + E_{1-2} Z_{11} + E_{02} Z_{01}] - e' [f_5 A_{12} + F_5 (Z_{12} + Z'_{12})]$$

$$2\,\mathbf{e}_{2-3} = -\frac{1}{2} e' F_4 E_{2-2} + 2 F_{12} e' E_{02} - f_2 (-A_{1-1} Z_{02} + A_{02} Z_{1-1}) + \frac{1}{2} F_2 [2 Z_{01} Z_{1-2} + 2 Z_{1-1} Z_{02} + Z_{2-2} Z_{11} + Z_{2-2} Z_{1-1}] + 2 e_0 f_3 A_{03} + 2 f_3 (A_{01} E_{02} + A_{02} E_{01}) - 4 F_3 e_0 Z_{03} + 4 F_3 [E_{12} Z_{1-1} - E_{01} Z_{02} - E_{1-2} Z_{11} - E_{02} Z_{01}] + e' [f_6 A_{1-2} + F_6 (Z_{1-2} - Z'_{1-2})]$$

$$2\,\mathbf{e}_{14} = -e' [f_5 A_{03} + F_5 (Z_{03} + Z'_{03})]$$

$$2\,\mathbf{e}_{1-4} = e' [f_6 A_{03} + F_6 (-Z_{03} + Z'_{03})]$$

$$2\,\mathbf{e}_{33} = 6 F_{14} e_0 E_{03} + 2 F_{15} e' E_{12} - F_2 Z_{22} Z_{01} + 2 f_3 (A_{11} E_{02} + A_{12} E_{01} + A_{01} E_{12} + A_{02} E_{11}) - e' [f_5 A_{22} + F_5 (Z_{22} + Z'_{22})]$$

$$2\,\mathbf{e}_{3-3} = 2 F_{12} e' E_{1-2} + 6 F_{14} e_0 E_{03} + \frac{1}{2} F_2 (Z_{2-2} Z_{01}) + 2 f_3 (A_{01} E_{1-2} + A_{1-1} E_{02} + A_{1-2} E_{01} + A_{02} E_{1-1}) + e' [f_6 A_{2-2} + F_6 (Z_{2-2} - Z'_{2-2})]$$

$$2\,\mathbf{e}_{24} = 2 F_{15} e' E_{03}$$

$$2\,\mathbf{e}_{2-4} = 2 F_{12} e' E_{03}$$

$$2\,\mathbf{e}_{51} = 3 F_{14} (2 e_0 E_{21} + 2 E_{10} E_{11}) + 2 F_{15} e' E_{30} + 2 f_3 (A_{10} E_{21} + A_{20} E_{11} + A_{11} E_{20} + A_{21} E_{10}) + 4 F_3 [E_{10} Z_{21} + E_{20} Z_{11} + E_{11} Z_{20} + E_{21} Z_{10}]$$

$$2\,\mathbf{e}_{5-1} = 2 F_{12} e' E_{30} + 3 F_{14} [2 e_0 E_{2-1} + 2 E_{10} E_{1-1}] + 2 f_3 (A_{10} E_{2-1} + A_{20} E_{1-1} + A_{1-1} E_{20} + A_{2-1} E_{10}) + 4 F_3 [E_{10} Z_{2-1} + E_{20} Z_{1-1} + E_{1-1} Z_{20} + E_{2-1} Z_{10}]$$

$$2\,\mathbf{e}_{52} = 3 F_{14} [2 e_0 E_{22} + E_{11}^2] + 2 f_3 (A_{10} E_{22} + A_{22} E_{10}) + 4 F_3 [E_{10} Z_{22} + E_{21} Z_{11} + E_{22} Z_{10}]$$

$$2\,e_{5-2} = 3\,F_{14}\,[2\,e_0\,E_{2-2} + E_{1-1}^2] + 2\,f_3\,(A_{10}\,E_{2-2} + A_{2-2}\,E_{10}) + 4\,F_3\,[E_{10}\,Z_{2-2} + E_{2-1}\,Z_{1-1} + E_{2-2}\,Z_{10}]$$

$$2\,e_{43} = -\frac{1}{2}\,F_2\,Z_{22}\,Z_{11} + 2\,f_3\,(A_{01}\,E_{22} + A_{22}\,E_{01}) + 4\,F_3\,[E_{12}\,Z_{11} + E_{22}\,Z'_{01}]$$

$$2\,e_{4-3} = -\frac{1}{2}\,F_2\,Z_{2-2}\,Z_{1-1} + 2\,f_3\,(A_{01}\,E_{2-2} + A_{2-2}\,E_{01}) + 4\,F_3\,[-E_{2-2}\,Z_{01} + E_{1-2}\,Z_{1-1}]$$

$$2\,e_{50} = 2\,e_0\,f_3\,A_{30} + 2\,f_3\,(A_{10}\,E_{20} + A_{20}\,E_{10}) + 4\,F_3\,e_0\,Z_{30} + 4\,F_3\,[E_{10}\,Z_{20} + E_{20}\,Z_{10} + E_{21}\,Z_{1-1} + E_{2-1}\,Z_{11}]$$

$$2\,e_{34} = 0$$

$$2\,e_{3-4} = 0.$$

§ 3. Die Bestimmung der Koeffizienten der Integralreihen.

Zur Bestimmung der Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ und $Z'_{\alpha\beta}$ sowie der in den beiden Winkelargumenten ζ_0 und ζ'_0 enthaltenen Koeffizienten z_1 und z'_1 der linear auftretenden Zeit haben wir den Vergleich der Koeffizienten derselben trigonometrischen Funktion oder Konstanten auf beiden Seiten unserer Differentialgleichungen der Variablen vorzunehmen, wobei sich in Strenge ein System unendlich vieler Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten ergibt. Deshalb kann es sich bei der notwendig vorzunehmenden Beschränkung der Anzahl der Unbekannten nur um ein sukzessives Annäherungsverfahren handeln.

Zuerst sind z_1 und z'_1 abzuleiten, da sie in allen Bestimmungsgleichungen der unbekannten Koeffizienten wiederkehren. Vergleichen wir deshalb zunächst in der Differentialgleichung

$$e\,\frac{d\zeta}{dt} = e\,\frac{d\varepsilon}{dt} + e\,(n - 2\,n') + e\,\frac{d\overline{\omega}}{dt}$$

gemäß den Darstellungen beider Seiten dieser Gleichung nach (22), (27) und (29) die konstanten Teile beiderseits, so ergibt sich die Gleichung:

$$(43)\qquad e_0\,z_1 + 2\,E_{10}\,Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{11}\,Z_{11}\,(z_1 + z'_1) + 2\,E_{01}\,Z_{01}\,z'_1 + 2\,E_{1-1}\,Z_{1-1}\,(z_1 - z'_1)$$
$$= e_0\,\varepsilon_{00} + G_{00} + P_{00} + e_0\,n_0\,(N + N_{00}) + n_0\,M_{00}.$$

Explizit lautet die rechte Seite, wenn der Faktor $-\dfrac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}$ gemäß der Beziehung $a_0^3\,n_0^2 = k^2$ in die neue Form $-2\,n_0\,a_0^2\,m'$ übergeführt wird:

$$-2\,n_0\,a_0^2\,m'\,e_0\,F_0'+2\,n_0\,m'\,e_0\,a_0\,F_1+e_0\,n_0\,N+n_0\,m'\,a_0\,F_2 Z_{10}+n_0\,a_0\,m'\left(\frac{1}{2}\,F_2-a_0\,F_2'\right)A_{10}=$$

$$=-2\,n_0\,a_0^2\,m'\,e_0\,F_0'+e_0\,n_0-2\,e_0\,n'+\left(\frac{1}{2}\,F_2-a_0\,F_2'\right)A_{10}.$$

Folglich wird, da links neben $e_0\,z_1$ als vom 2. Grade, alle übrigen Terme vom 3. Grade sind, in 1. Näherung:

(44)
$$z_1=-2\,n_0\,a_0^2\,m'\,F_0'+2\,n_0\,m'\,a_0\,F_1+n_0-2\,n'+\frac{n_0\,m'}{e_0}\,a_0\,F_2\,Z_{10}$$
$$+\frac{n_0\,a_0\,m'}{e_0}\left(\frac{1}{2}\,F_2-a_0\,F_2'\right)A_{10}.$$

Analog folgt mittels der Differentialgleichung für $\frac{d\zeta'}{dt}$ in 1. Näherung:

(45)
$$z_1'=-2\,n_0\,a_0^2\,m'\,F_0'+n_0-2\,n',$$

wobei zu beachten ist, daß die Gleichung für $\frac{d\zeta'}{dt}$ sich von der für $e\,\frac{d\zeta}{dt}$ dadurch unterscheidet, daß die Gleichung für $\frac{d\zeta}{dt}$ frei von dem Gliede $\frac{d\overline{\omega}}{dt}$ ist. Zur Bestimmung von z_1 verbleibt zunächst die Ermittelung des Koeffizienten Z_{10} und A_{10} und zwar in erster Näherung unter Heranziehung der Differentialgleichung für $e\,\frac{d\zeta}{dt}$ und a; der Vergleich der Koeffizienten von $\sin\zeta_0$ auf beiden Seiten ergibt bei $\frac{da}{dt}$:

(46)
$$-2\,a_0\,A_{10}\,z_1=\frac{2\,k^2\,m'}{n_0\,a_0}\,e_0\,F_2$$

in Bezug auf die Glieder niedrigsten Grades und niedrigster Ordnung der Indices in $E_{\alpha\beta}$ usw.; folglich wird, wenn $\frac{k^2}{n_0\,a_0^2}=n_0\,a_0$ gesetzt wird:

(47)
$$A_{10}=-\frac{n_0\,a_0\,m'\,e_0}{z_1}\,F_2,$$

wobei bemerkt sei, daß die von den Laplaceschen Transzendenten abhängigen Koeffizienten: $a_0\,F_2$ und $a_0^2\,F_2'$ vom 0. Grade in a_0 und a', also nur von $\frac{a_0}{a'}=\alpha_0$ abhängig sind.

Analog folgt E_{10} in erster Annäherung aus dem Vergleich der Koeffizienten von $\cos\zeta_0$ auf beiden Seiten der Differentialgleichung für $\frac{de}{dt}$, wobei sich die Gleichung ergibt:

(48)
$$E_{10}=+\frac{1}{2}\,\frac{n_0\,m'}{z_1}\,a_0\,F_2.$$

Nach E_{10} und A_{10} folgt Z_{10} mittels der Gleichung (23) in Verbindung mit der Gleichung (33) unter Vergleich der beiderseitigen Koeffizienten von $\cos \zeta_0$:

$$(49) \quad 2\,\overline{Z}_{10} = 2\,e_0 Z_{10}\,z_1 + 2\,E_{10}\,z_1 + (EZz) = 2\,E_{10}\,\varepsilon_{00} + 2\,e_0\,\varepsilon_{10} + 2\,G_{10} + 2\,e_0\,n_0\,N_{10} + 2\,n_0\,M_{10} + 2\,P_{10}.$$

Der erste Term links enthält die Unbekannte Z_{10}, der 2. Term ist nach obigem bereits in 1. Näherung bekannt; der 3., symbolisch mit (EZz) bezeichnete Term ist von der 3. Ordnung, wie auch der 1. Term; aber wie die Formel (25) für $2\,\overline{Z}_{10}$ zeigt, sind die einzelnen Terme (EZz) alle von höherer Ordnung in den Indices, so daß wir sie in der 1. Näherung gegen den 1. Term vernachlässigen dürfen. In Bezug auf die rechte Seite ist der 1. Term wegen E_{10} und $\varepsilon_{00} = -2\,n_0\,m'\,a_0^2\,F_0'$ wieder bekannt, der 2. Term: $2\,e_0\,\varepsilon_{10}$ ist ebenfalls bekannt, und vom 2. Grade, weil ε_{10} im Hauptterm vom 1. Grade ist. Der nächste Term $2\,G_{10}$ darf vernachlässigt werden, weil er nach Definition von G_{10} nur aus Produkten $E_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\gamma\delta}$ mit höherer Ordnung der Indices als sonst in der Gleichung besteht; der nächste Term ist $2\,e_0\,n_0\,N_{10} = -3\,e_0\,n_0\,A_{10}$, ist also bekannt. Der vorletzte Term $2\,n_0\,M_{10}$ ist von der 3. Ordnung, da n_0 und $N = 1 - \frac{2\,n'}{n_0}$ von der 1., wenn nicht in der Nähe der Kommensurabilität von höherer Ordnung, wobei der Hauptterm $2\,n_0\,M_{10} = 2\,n_0\,E_{10}\,N$ bekannt ist; der letzte Term $2\,P_{10} = -n_0\,a_0\,m'\,F_2$ ist bekannt. Folglich ergibt sich Z_{10} als nunmehr in 1. Näherung bekannte Größe, analog Z_{10}', wobei in der der Unbekannten Z_{10}' entsprechenden Gleichung gegenüber der für Z_{10} nur das Glied für P_{10} fehlt, weil ζ' von $\overline{\omega}$ unabhängig ist. Die Gleichung für Z_{10}' folgt auch direkt aus der Differentialgleichung für $\frac{d\zeta'}{dt}$, so daß

$$(50) \quad 2\,Z_{10}'\,z_1 = -2\,n_0\,m'\,e_0\left(-a_0^2\,F_2' + \frac{1}{4}\,a_0\,F_2\right) + A_{10}\left[-3\,n_0 - 4\,n_0\,m'\left(\frac{1}{2}\,a_0^2\,F_0' + a_0^3\,F_0''\right)\right].$$

Zur nunmehrigen Bestimmung von z_1 aus (44) sind zuerst noch die für Z_{10}, A_{10}, E_{10} gefundenen Ausdrücke in (44) zu substituieren. Vor allem ist deshalb Z_{10} nach (49) auf die entsprechende Form zu bringen, man erhält:

$$(51) \quad Z_{10} = -\frac{E_{10}}{e_0} + \frac{1}{e_0\,z_1}\,E_{10}\,\varepsilon_{00} + \frac{\varepsilon_{10}}{z_1} - \frac{3}{2}\,\frac{n_0}{z_1}\,A_{10} + \frac{N}{z_1}\,E_{10} - \frac{1}{2\,e_0}\,\frac{n_0\,m'}{z_1}\,a_0\,F_2$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{m'}{e_0}\,\frac{n_0}{z_1}\,a_0\,F_2 - \frac{m'^2}{e_0}\,\frac{n_0^2}{z_1^2}\,a_0^2\,F_2'\,a_0\,F_2 + \frac{\varepsilon_{10}}{z_1} + \frac{3}{2}\,m'\,e_0\,\frac{n_0^2}{z_1^2}\,a_0\,F_2$$

$$+ \frac{1}{2}\,m'\,\frac{n_0\,N}{z_1^2}\,a_0\,F_2 - \frac{1}{2}\,\frac{m'}{e_0}\,\frac{n_0}{z_1}\,a_0\,F_2,$$

so daß also bei Substitution in (44) eine Gleichung 3. Grades in z_1 entsteht, die aber analytisch nicht niedergeschrieben zu werden braucht, zweckmäßigerweise vielmehr nur numerisch angesetzt wird. Für die Unbekannten e_0 wie a_0 sind zunächst Näherungswerte zu substituieren, die sukzessive im Laufe der Rechnung zu verbessern sind. In Strenge sind die

6 Unbekannten a_0, e_0, z_0, z_0', z_1 und z_1' aus den 6 Gleichungen (44), (45) und (52) (s. den nächsten § 4) zu ermitteln; es kann aber wesentlich nur die numerische Rechnung entscheiden, ob der oben eingeschlagene Näherungsweg oder von vorneweg ein engerer Anschluß an die Gleichungen (52) am schnellsten und sichersten zum Ziel führt.

Dagegen ist nun von den weiteren Koeffizienten E_{01} von höherer Ordnung und darf deshalb in 1. Näherung gleich 0 gesetzt werden, was dadurch plausibel ist, daß ein entsprechender Term $\cos \zeta'$ in der Differentialgleichung für e [s. die entsprechende Gleichung (6)] im von $\frac{\partial \Omega}{\partial \varpi}$ abhängigen Hauptteil überhaupt nicht auftreten kann, soweit es sich zunächst um einen Beitrag niedrigsten, also 0. Grades in e resp. e' handelt, sondern erst vom 1. Grade sein kann, wenn man den Divisor e des 1. Teiles rechter Hand von $\frac{de}{dt}$ berücksichtigt; der 2. Teil, von $\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}$ abhängig, ist erst vom 2. Grade. Dagegen ist der zu einem Terme in E_{10} führende von $\frac{\partial \Omega}{\partial \varpi}$ abhängende Teil vom 0. Grade, und zwar abhängig von dem Hauptgliede $e \cos \zeta$ in Ω, so daß E_{01} von einem um 1 höheren Grade als E_{10} ist.

In analoger Weise ergeben sich nun sukzessive die ersten Näherungen der folgenden Koeffizienten; unter Substitution in die erweiterten Ausgangsgleichungen ergeben sich dann die 2. Näherungen für zunächst z_1 und z_1' und dann für die $A_{\alpha\beta}$ usw., wobei nunmehr aber die Kenntnis der Integrationskonstanten a_0 und e_0 vorauszusetzen ist. Diese ergeben sich aber auf Grund der Beobachtungsergebnisse in folgender Weise.

§ 4. Die Bestimmung der Integrationskonstanten nebst Kontrollen und Verallgemeinerungen.

Die Bestimmung der 4 Integrationskonstanten a_0, e_0, z_0 und z_0' erfolgt mittels der für $t = 0$ gültigen Werte $(a)_0$, $(e)_0$, $(\zeta)_0$ und $(\zeta')_0$ der entsprechenden Veränderlichen, indem:

$$(52) \qquad \left\{\begin{array}{l} 1.\ (a)_0 = a_0 + 2\,\Sigma\, A_{\alpha\beta} \cos(\alpha z_0 + \beta z_0') \\ 2.\ (e)_0 = e_0 + 2\,\Sigma\, E_{\alpha\beta} \cos(\alpha z_0 + \beta z_0') \\ 3.\ (\zeta)_0 = z_0 + 2\,\Sigma\, Z_{\alpha\beta} \sin(\alpha z_0 + \beta z_0') \\ 4.\ (\zeta')_0 = z_0' + 2\,\Sigma\, Z'_{\alpha\beta} \sin(\alpha z_0 + \beta z_0') \end{array}\right\},$$

wo zu beachten ist, daß die $A_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$, und $Z'_{\alpha\beta}$ Funktionen von a_0 und e_0 sind, und wo

$$(53) \qquad (\zeta)_0 = l_0 - 2\, l_0' + \varpi_0 \quad \text{und} \quad (\zeta')_0 = l_0 - 2\, l_0' + \varpi'$$

durch die Anfangslängen l_0, l_0' und die Perihellänge ϖ_0 gemäß (1) definiert sind.

In 1. Annäherung ist unter Vernachlässigung der $Z_{\alpha\beta}$ und $Z'_{\alpha\beta}$:

$$z_0 = (\zeta)_0 \quad \text{und} \quad z'_0 = (\zeta')_0, \tag{54}$$

so daß

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= (a)_0 - 2\,\Sigma\, A_{\alpha\beta} \cos(\alpha z_0 + \beta z'_0) \\ e_0 &= (e)_0 - 2\,\Sigma\, E_{\alpha\beta} \cos(\alpha z_0 + \beta z'_0) \end{aligned}\right\}, \tag{55}$$

nachdem die a_0 und e_0 in den $A_{\alpha\beta}$ und $E_{\alpha\beta}$ erstmalig durch $(a)_0$ und $(e)_0$ ersetzt sind.

Die Substitution der numerisch erhaltenen Werte in die Difinitionsgleichungen für z_1, z'_1 und die Koeffizienten liefert dann die 1. Näherung dieser Koeffizienten und die sukzessive Verbesserung infolge Resubstitution dann die 2. Näherung usw., bis keine Änderung mehr eintritt und damit die Endwerte der Koeffizienten wie der Integrationskonstanten erlangt worden sind.

Die für eine beliebige Zeit gültige Perihellänge $\overline{\omega}$ folgt dann noch mittels der Gleichungen für ζ und ζ', so daß $\overline{\omega} - \overline{\omega}' = \zeta - \zeta'$ und somit:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}' + z_0 - z'_0 + (z_1 - z'_1)\, t + 2\,\Sigma\,(Z_{\alpha\beta} - Z'_{\alpha\beta}) \sin(\alpha\zeta_0 + \beta\zeta'_0), \tag{56}$$

wobei $z_1 - z'_1$ die säkulare Perihelbewegung fixiert.

Eine Kontrolle für die Rechnungsergebnisse bietet das Integral von Jacobi, falls $e' = 0$, an dessen Stelle bei $e' \neq 0$ das von mir erweiterte Integral tritt, wie auch ein zweites im Falle nahezu kommensurabler Bewegungen gültiges Integral von Tisserand, das ebenfalls von mir auf den Fall $e' \neq 0$ erweitert worden ist (s. Astron. Nachrichten, Bd. 228, S. 417 f. sowie Sitzber. der Bayer. Akademie der Wiss., 1934, Math.-naturwiss. Abt., S. 195 f.). Die erweiterten Integrale lauten:

$$\left\{\begin{aligned} &\text{a)}\ \frac{k^2}{2a} + k n' \sqrt{a(1-e^2)} + \Omega \qquad - \int \frac{\partial\Omega}{\partial t}\, dt = C_1 \\ &\text{b)}\ (h+i)\, k \sqrt{a} - i k \sqrt{a(1-e^2)} - i \int \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{\omega}'}\, dt = C_2 \end{aligned}\right\},$$

wo der Quotient $\frac{h+i}{i} = \frac{n}{n'}$, das kritische Verhältnis der mittleren Bewegungen mittels der ganzen Zahlen h und i fixiert, und wo C_1 und C_2 die Integrationskonstanten sind. In die Ableitungen der Störungsfunktion sind noch die Delaunay-Reihen zu substituieren, bevor die Kontrolle der Rechnungen möglich ist. Bei der praktischen Anwendung, die der vorliegenden Theorie folgen wird, werde ich hierauf zurückkommen.

Die obige auf den schwierigsten Fall der Störungstheorie gemünzte Theorie ist in gleicher Weise auf alle anderen Typen anwendbar; bei allen Typen, bei denen allgemein das Verhältnis der mittleren Bewegungen $\frac{i+1}{i} = \frac{n}{n'}$, also gleich dem Verhältnis zweier aufeinander folgender Zahlen ist, bleibt die Schwierigkeit der Darstellung dieselbe, dagegen ist sie schon erheblich vermindert, wenn das Verhältnis der mittleren Bewegungen $\frac{n}{n'} = \frac{i+2}{i}$, also gleich dem Verhältnis der um 2 Einheiten verschiedenen ganzen Zahlen ist, wofür der Hestiatypus mit $\frac{n}{n'} = \frac{3}{1}$ den charakteristischsten Fall darstellt. In diesem Falle sind die kritischen Glieder der Störungsfunktion erst vom 2. Grade der Exzentrizitäten und weiterhin vom 4., 6. Grade usw., so daß hier in der Störungsfunktion wie in ihren Ableitungen und deren Entwicklungen nach e_0, e', A, E, Z und Z' eine wesentlich verminderte Zahl von Gliedern auftritt, so daß die Bestimmung der Koeffizienten der Delaunay-Reihen wesentlich erleichtert ist.