BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 102

GOTTFRIED ECKART

Wellenoptische Behandlung der Strahlung eines magnetischen Dipols in einem eben geschichteten Medium nach der Methode von Epstein

Mit 20 Figuren

Vorgelegt von Herrn Winfried Otto Schumann
am 11. Dezember 1959

MÜNCHEN 1960
VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

Diese Arbeit entstand unter Mitwirkung von
The Office Chief in Research and Development U. S. Department of The Army
gemäß Vertrag Nr. DA–91–508–EUC–182 mit dessen europäischer Dienststelle.

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

Herrn Joseph Lense zum 70. Geburtstag

am 28. Oktober 1960

gewidmet

INHALT

1	Einleitung, Übersicht, Problemstellung	7
2	Die Epstein-Methode nach Rawer	8
2.1	Das sich ergebende $\varepsilon = f(z)$ nach 2	13
3	„Ebene" Wellen im Epsteinmedium	15
3.1	Die Wellengleichung für die Feldstärke $\vec{E}$	16
3.2	Lösung der Wellengleichung durch Separieren der Variablen	16
3.3	Die Werte der Parameter α, β, γ	18
3.4	Reflexionsstudien	18
3.4.1	Wellentypen	19
3.4.1.1	Tabulierung der Wellentypen	19
3.4.2	Reflexions- und Übertragungskoeffizienten	22
3.4.3	Diskussion der Reflexions- und Übertragungskoeffizienten	23
3.4.3.1	Der Fall des Welleneinfalls von unten her	23
3.4.3.1.1	Nicht umkehrende Strahlen: partielle Reflexion	23
3.4.3.1.2	Umkehrende Strahlen: Totalreflexion	24
3.4.3.1.3	Stehende Wellen und Interferenzstreifen	25
3.4.3.1.4	Das Feld in der Umgebung des Umkehrniveaus	26
3.4.3.2	Welleneinfall von oben her	27
3.4.4	Die Reflexion ebener Wellen in einem homogenen Halbraum, der mit stetigem Übergang von $\varepsilon(z)$ an ein Epsteinmedium grenzt	27
3.4.4.1	Einfall von unten; Trennebene in $z_0 > 0$	28
3.4.4.2	Einfall von unten her $z_0 < 0$	30
3.4.4.3	Einfall von oben her $z_0 < 0$	32
3.5	Grenzübergänge im Falle „ebener" Wellen	33
3.5.1	Der Grenzübergang zum homogenen Medium	33
3.5.2	Der Grenzübergang $\varkappa \to \infty$ (unstetiger Übergang von $\varepsilon = 1$ zu $\varepsilon = 1 + \delta$) Entwicklung der Reflexions- und Übertragungskoeffizienten nach Potenzen von $\frac{1}{\varkappa}$ (dünne Übergangsschicht)	34
4	Der strahlende magnetische Dipol	37
4.1	Die Aufstellung der Wellengleichung für den Hertzschen Vektor	38
4.2	Die allgemeine Lösung der Wellengleichung durch Trennung der Variablen	40
4.2.1	Ermittlung der Werte von α, β, γ als Funktionen von λ und Vergleich mit 3.3	42
4.3	Die Integraldarstellung der Strahlung des magnetischen Dipols	43
4.3.1	Das Integral von Lamb-Sommerfeld im homogenen Medium	43
4.3.2	Das analoge Integral im Epsteinmedium	44
4.3.2.1	Die allgemeine Integraldarstellung	44

4.3.2.2 Berechnung der in der Lösung erscheinenden Wronskideterminante . . . 47
4.4 Die zwölf Lösungsintegrale . . . 48
4.4.1 Tabulierung dieser Integrale . . . 49
4.5 Diskussion der Integrale . . . 53
4.5.1 Grenzübergang zu $\delta \to 0$ . . . 53
4.5.2 Grenzübergang zu $\varkappa \to \infty$ (Unstetiger Übergang von $\varepsilon = 1$ zu $\varepsilon = 1 + \delta$) . . . 53
4.5.3 Die Konvergenz der Integrale . . . 54
4.5.4 Studium der Pole des Integranden . . . 57
4.5.5 Berechnung der Integrale in erster Näherung mittels Sattelpunktsmethode . . . 59
4.5.6 Tabellierung der Sattelpunktsnäherungen der zwölf Integrale . . . 60
4.5.7 Physikalische Diskussion der Lösungsintegrale in Sattelpunktsnäherung . . . 67
4.5.8 Vergleich mit der Strahlenoptik . . . 69

ANHANG

A 1 Strahlenoptische Behandlung . . . 70
A 1.1 Die betrachtete Funktion $\varepsilon = f(z)$ . . . 70
A 1.2 Die $\varepsilon = f(z)$ entsprechenden Strahlen . . . 71
A 1.2.1 Nicht umkehrende Strahlen . . . 71
A 1.2.1.1 Der Grenzwinkel für nicht umkehrende Strahlen . . . 71
A 1.2.1.2 Die Differentialgleichung für die Strahlen . . . 72
A 1.2.1.2.1 Ihre Integration für nicht umkehrende Strahlen . . . 72
A 1.2.2 Umkehrende Strahlen . . . 73
A 1.2.2.1 Integration der Differentialgleichung . . . 74
A 1.2.3 Das Strahlenbüschel durch einen Punkt . . . 75
A 1.2.3.1 Asymptotische Darstellung der Strahlen; Kaustik . . . 75
A 1.2.3.2 Die asymptotische Darstellung einer Kaustik . . . 76
A 1.3 Näherungsdarstellung des Eikonals . . . 77
A 2 Γ-Formeln . . . 79
A 2.1 Werte der Parameter α, β, γ . . . 79
A 2.2 Γ-Formeln für $\varepsilon(z_0) = 1$ . . . 79
A 2.3 Γ-Formeln für $\varepsilon(z_0) = 1 + \delta$ . . . 80
A 3 Unstetiger Übergang zwischen $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = 1 + \delta$, $\varkappa \to \infty$. Die Sommerfeldschen Integrale . . . 81
A 4 Sattelpunktsbehandlung des Integrals von Lamb-Sommerfeld . . . 82
A 5 Verzeichnis der Abbildungen . . . 84
Literaturverzeichnis . . . 85

1. EINLEITUNG, ÜBERSICHT, PROBLEMSTELLUNG.

Große Reichweiten, Überreichweiten bei Ultrakurzwellen, d. h. Wellen, die von der Jonosphäre nicht wesentlich beeinflußt werden, sind auf folgende Ursachen zurückzuführen:

1. Die Bildung von atmosphärischen Wellenleitern (Ducts) und
2. Reflexion an atmosphärischen Inhomogenitäten.

Die Wirkung der Ducts ist bekannt. Wir werden uns hier nur mit den atmosphärischen Inhomogenitäten befassen.

Gordon und Booker [1] führen die großen, über die Wirkung von Ducts hinausgehenden Reichweiten auf Streuung an Inhomogenitäten zurück, die von atmosphärischer Turbulenz herrühren. Der Verfasser hat diesem Vorgang mehrere Arbeiten gewidmet [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8].

Doch haben andere Autoren Rechnungen angestellt über die Frage, ob nicht auch die Reflexion an der Schichtung der ruhenden Atmosphäre ebenso dieselbe Größenordnung des Streufeldes hervorrufen könne. Es wurden überschlägige Rechnungen durchgeführt. Eine strenge Behandlung des Problems ist schwierig. Sie muß zweckmäßig in mehreren Schritten erfolgen: mathematisch lösbar ist zunächst das Problem der Schichtreflexion an ebener Schichtung, wobei die Reflexion der Dipolstrahlung zu untersuchen ist. Dies ist das Hauptproblem der vorliegenden Arbeit.

Die Reflexion an der ebenen Schichtung soll also hier genauer studiert werden. Dabei ist von Interesse, wie sich eine strahlenoptische Lösung gestalten würde, die die Reflexion vernachlässigt, jedoch die Krümmung der Strahlen im inhomogenen Medium berücksichtigt.

Für die wellenoptische Behandlung von Reflexionen an inhomogenen Schichten hat Epstein eine Methode ersonnen [10], die von ihm und später von Rawer [11] für die Untersuchung des senkrechten Einfalls ebener Wellen an der Jonosphäre benutzt wurde. Carl Eckart (Pasadena) hat [12] dieselbe Methode für die wellenmechanische Berechnung des Tunneleffekts verwendet.

Bekanntlich wird der mathematische Ausdruck für die Dipolstrahlung im homogenen Medium aus ebenen Wellen oder aus Zylinderwellen zusammengesetzt. Es erscheint auch im inhomogenen Medium nützlich, dieses Verfahren zu benützen, da bei den anderen Autoren dieser Wellentyp nur unter speziellen Voraussetzungen untersucht wurde. Ferner ergeben sich aus ihm nachher klare Einblicke in den Mechanismus der Vorgänge auch bei der Reflexion am inhomogenen Medium. Es ergibt sich hier ein klarer Einblick in die Phänomene der Totalreflexion, der Bildung von Interferenzstreifen. Für den zu verwendenden Ausdruck für $\varepsilon = f(z)$ kann der Grenzübergang zum homogenen Medium ($\delta \to 0$) und der zum Sprung zwischen zwei Werten ($\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1 + \delta$) ($\varkappa \to \infty$) einfach durchgeführt werden. Dies gibt andrerseits die Möglichkeit, die Reflexion an einer dünnen Schicht zu untersuchen, in der ε von einem Wert zu einem größeren übergeht.

Eine Behandlung der für die Dipolstrahlung resultierenden 12 Integrale mittels der Sattelpunktsmethode liefert eine 1. Näherung, die die Möglichkeit gibt, die Resultate physikalisch zu diskutieren. Einen Überblick über den gesamten Rahmen gibt das Inhaltsverzeichnis.

2. DIE EPSTEIN-METHODE NACH RAWER.

Um dem Leser die Mühe zu ersparen, umfangreiche Literatur nachzuschlagen, wollen wir hier im Anschluß an Rawer [11] die verwendete Methode kurz skizzieren, die in der vorliegenden Arbeit weitergebildet wird. Es wird sich dabei ergeben, wie wir $\varepsilon = f(z)$ zweckmäßig zu wählen haben, damit ein in allen Ableitungen stetiger Übergang zwischen zwei Werten der Dielektrizitätskonstante entsteht, der mittels unserer Methode wellenoptisch behandelt werden kann.

Für geeignete Wahl der Polarisation, über die wir noch zu sprechen haben, lautet für eine sich ausbreitende Feldgröße U die Wellengleichung:

$$\Delta U + k_0^2\, \varepsilon(z)\, U = 0, \tag{1}$$

wo

$$k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \tag{2}$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \text{Wellenlänge im Vakuum}, \\ \mu_0 &= \text{Permeabilität des Vakuums} = 4\pi \cdot 10^{-7}, \\ \varepsilon_0 &= \text{Dielektrizitätskonstante des Vakuums} = {}^1/_{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}. \end{aligned} \tag{3}$$

Wir beschränken uns zunächst auf die eine Koordinate z, dann wird aus (1)

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + k_0^2\, \varepsilon(z)\, U = 0. \tag{4}$$

Um (4) zu lösen, kann man den Versuch machen, von einer anderen, möglichst allgemeinen Differentialgleichung 2. Ordnung auszugehen, deren Lösung bekannt ist. Man sucht dann eine Transformation der Variablen, die (4) in die genannte Differentialgleichung überführt. Als die genannte Differentialgleichung 2. Ordnung wählt man die Gaußsche hypergeometrische, die in Variablen u, v lautet:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{(\gamma - (\alpha + \beta + 1)\, v)}{v(1-v)} \frac{du}{dv} - \frac{\alpha\beta}{v(1-v)}\, u &= 0 \\ = \frac{d^2 u}{dv^2} + P(v) \frac{du}{dv} + Q(v)\, u &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

α, β, γ sind drei willkürliche Konstanten, die später als Parameter der hypergeometrischen Funktion erscheinen werden.

Nach Rawer [11] wählen wir die Transformation:

$$v = v(z) \quad u = U \cdot r(z). \tag{6}$$

Da in der Wellengleichung (4) das Glied mit $\frac{dU}{dz}$ fehlt, ergibt sich die Forderung:

$$2\,\frac{dr}{dz}\,\frac{dv}{dz} - r(z)\left(\frac{d^2v}{dz^2} - P(v)\left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right) = 0. \tag{7}$$

Man kann die Funktion $v(z)$ noch beliebig wählen und muß dann u aus (6) und (7) bestimmen. Durch Integration von (7) findet man:

$$r(z) = r_0\, v^{-\frac{\gamma}{2}}\,(1-v)^{-\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}\left(\frac{dv}{dz}\right)^{1/2} \tag{8}$$

$$r_0 = \text{Integrationskonstante.}$$

Mit diesem Wert von r wendet man die Transformation (6) auf die hypergeometrische Differentialgleichung an und erhält:

$$\frac{d^2U}{dz^2} + \left[P\frac{dv}{dz} + \frac{1}{r}\,\frac{dr}{dz} + \frac{1}{r}\,\frac{d^2r}{dz^2} - Q\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 - \frac{1}{r}\,\frac{dr}{dz}\left(\frac{d^2v}{dz^2}\Big/\frac{dv}{dz}\right)\right]U = 0. \tag{9}$$

Dies ist eine Wellengleichung in der Art von (4). Indem wir für den Koeffizienten von U die Abkürzung $g(z)$ wählen, haben wir:

$$\frac{d^2U}{dz^2} + g(z)\,U = 0. \tag{10}$$

Nun interessiert uns vor allem das Aussehen von $g(z)$; $\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dz}$ können wir aus (8) entnehmen. Anstatt P und Q wollen wir wieder v, α, β, γ verwenden und erhalten:

(11)
$$g(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^3v}{dz^3}\Big/\frac{dv}{dz}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{d^2v}{dz^2}\Big/\frac{dv}{dz}\right)^2 - \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\frac{\gamma(\gamma-2) - 2[2\alpha\beta-\gamma(\alpha+\beta-1)]\,v + ((\alpha-\beta)^2-1)\,v^2}{4\,v^2\,(1-v)^2}.$$

Faßt man die Glieder etwas anders zusammen, so schreibt man auch

(12)
$$g(z) = \left[\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dz^2}\left(\ln\frac{dv}{dz}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dz}\left(\ln\frac{dv}{dz}\right)\right)^2\right] - \left(\frac{d}{dz}\ln v\right)^2\cdot\left\{K_1 + K_2\,\frac{v}{1-v} + K_3\,\frac{v}{(1-v)^2}\right\}$$

mit

$$\begin{aligned} 4K_1 &= \gamma(\gamma-2), \quad 4K_2 = 1-(\alpha-\beta)^2 + \gamma(\gamma-2),\\ 4K_3 &= (\alpha+\beta-\gamma)^2 - 1 \end{aligned} \tag{13}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4K_1} + \sqrt{1+4K_3} - \sqrt{1+4(K_1-K_2)}\right),\\ \beta &= \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4K_1} + \sqrt{1+4K_3} + \sqrt{1+4(K_1-K_2)}\right),\\ \gamma &= 1 + \sqrt{1+4K_1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Vorzeichen der Wurzeln, die hier noch nicht festliegen, werden später, im Anschluß an Gl. (35), (36) S. 12, festgelegt werden.

Ferner erweist sich folgende Definition als nützlich:

$$p(z) = \ln(-v). \tag{15}$$

Dann wird in (12)

$$g(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{d^3p}{dz^3}\Big/\frac{dp}{dz} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2p}{dz^2}\Big/\frac{dp}{dz}\right)^2\right] - \left(\frac{dp}{dz}\right)^2\left[\left(K_1 + \frac{1}{4}\right) - K_2\,\frac{\exp(p(z))}{1+\exp(p(z))} - K_3\,\frac{\exp(p(z))}{(1+\exp(p(z)))^2}\right]. \tag{16}$$

Damit haben wir die hypergeometrische Differentialgleichung in eine Wellengleichung mit ortsabhängiger DK übergeführt. Die Form der DK ergibt sich aus (11) (12) (16).

Welche Funktionen $\varepsilon = f(z)$ sich ergeben, werden wir später sehen.

Zunächst widmen wir uns der Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung, indem wir uns daran erinnern, daß nach (6)

$$u = U \cdot r(z) \tag{6}$$

ist.

Die Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung ist bekannt [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25]. Sie geht in ihren Grundlagen auf Gauß zurück. Da wir aber laufend davon Gebrauch machen und diese Theorie das Kernstück der Epsteinischen Methode ist, wollen wir das Wesentliche kurz referieren:

Im Konvergenzkreis $|v| < 1$ konvergiert die bekannte hypergeometrische Reihe:

$$u_1(v) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; v) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\,v + \frac{\alpha(\alpha-1)\,\beta(\beta-1)}{1\cdot 2\,\gamma(\gamma-1)}\,v^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1\cdot 2\cdot 3\,\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}\,v^3 + \cdots\cdots; \tag{17}$$

in dem gleichen Gebiet ist auch

$$u_5(v) = v^{(1-\gamma)}\,{}_2F_1(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1;\ 2-\gamma;\ v)^1 \tag{18}$$

eine Lösung. Beide Lösungen u_1 und u_5 sind linear unabhängig und bilden ein Fundamentalsystem.

Nun hat ersichtlich die hypergeometrische Differentialgleichung die drei singulären Stellen: $v = 0, 1, \infty$. Für jede dieser Stellen gibt es ein in deren Umgebung konvergierendes Fundamental-System. Wie man durch Ausübung einfacher Transformationen auf die Variable v zeigt, haben diese Fundamentalsysteme alle den Charakter hypergeometrischer Reihen, deren Parameter lineare Kombinationen der Ausgangsparameter α, β, γ sind. Diese Reihen sind dann noch mit geeigneten Potenzen von v, $(1-v)$, $v(1-v)$ multipliziert.

Da die allgemeinste Lösung stets als Linearkombination von zwei Fundamentallösungen darstellbar ist, so muß die analytische Fortsetzung jeder Fundamentallösung über ihren

---

[1] u_5 ist die in [20] benutzte Bezeichnung.

ursprünglichen Konvergenzbereich hinaus, stets durch zwei Fundamentallösungen darstellbar sein. Es bestehen also zwischen den Fundamentallösungen Zusammenhangsformeln, die ein wesentliches Werkzeug unserer Untersuchungen sein werden.

Wir schreiben einmal drei Fundamentalsysteme an, indem wir der Bezeichnungsweise und Normierung folgen, die von Magnus-Oberhettinger-Tricomi in [2] gewählt wurde:

In der Umgebung von $v = 0$ haben wir, wie bereits bemerkt:

$$u_1(v) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; v) \tag{19}$$

$$u_5(v) = v^{(1-\gamma)} \; {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; v). \tag{20}$$

In der Umgebung von $v = 1$ haben wir:

$$u_2(v) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - v) \tag{21}$$

$$u_6(v) = (1 - v)^{\gamma-\alpha-\beta} \; {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - v). \tag{22}$$

In der Umgebung von $v = \infty$:

$$u_3(v) = (-v)^{-\alpha} \; {}_2F_1\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1; \alpha - \beta + 1; \frac{1}{v}\right) \tag{23}$$

$$u_4(v) = (-v)^{-\beta} \; {}_2F_1\left(\beta, \beta - \gamma + 1; \beta - \alpha + 1; \frac{1}{v}\right). \tag{24}$$

In (23) und (24) ist $(-)^{-\alpha}$; $(-)^{-\beta}$ respektive als $e^{j\pi\alpha}$, $e^{j\pi\beta}$ zu wählen.

Die vielleicht etwas befremdlichen Bezeichnungen $u_1 \ldots u_6$ wurden nach [20] gewählt; dort stehen die nun gleich zu nennenden Zusammenhangsformeln, in denen $u_1 \ldots . u_6$ dann genau die hier angegebenen Bedeutungen haben. Nach [20] S. 107f. gelten die Beziehungen:

$$u_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, u_3 + \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)}\, u_4 \tag{25}$$

$$u_3 = \frac{\Gamma(1-\gamma\,(\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma\,(\alpha+1-\gamma)}\, u_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)}\, e^{j\pi(\gamma-1)}\, u_5 \tag{26}$$

$$u_4 = \frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(1+\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1+\beta-\gamma)}\, u_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, e^{j\pi(\gamma-1)}\, u_5 \tag{27}$$

$$u_5 = \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)\,e^{j\pi(1-\gamma)}}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta+1-\gamma)}\, u_3 + \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)\,e^{j\pi(1-\gamma)}}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\, u_4. \tag{28}$$

Diese Formeln wurden vom Verfasser sämtlich kontrolliert. Aus jeder Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung erhalten wir vermittels unserer Transformation nach (6) auch eine Lösung der Wellengleichung:

$$U_j = r_0^{-1}\, v^{\gamma/2}\, (1 - v)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}} \left(\frac{dv}{dz}\right)^{-1/2} u_j. \tag{29}$$

Hier wäre $v = v(z)$ noch frei zu wählen. Nun hat Epstein erkannt, daß bei der speziellen Wahl von $v(z)$

2*

(30) $$v = -e^{\varkappa z} \quad (\varkappa > 0, \ \varkappa \text{ reell})$$

(„Epstein-Transformation")

die Zusammenhangsformeln (25) (26) (27) (28) anschauliche Bedeutungen bekommen, die wir am Beispiel von (26) studieren wollen. Mit (30) wird

(31) $$\frac{dv}{dz} = \varkappa v$$

und man erhält für große negative Werte von v, d. h. große positive Werte von z, asymptotisch:

(32) $$U_3 = r_0^{-1} \varkappa^{-1/2} v^{\frac{\gamma-1-2\alpha}{2}} (1-v)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}} {}_2F_1\left(\alpha, \alpha-\gamma+1; \alpha-\beta+1; \frac{1}{v}\right) \sim$$
$$\sim r_0^{-1} \varkappa^{-1/2} (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \exp\left(\frac{\beta-\alpha}{2} \varkappa z\right).$$

Man kann sich nämlich in der hypergeometrischen Reihe ${}_2F_1\left(\ldots\ldots; \frac{1}{v}\right)$ $(v \to \infty)$ auf das 1. Glied 1 beschränken.

($v(z)$ bildet die z-Achse $(-\infty < z < +\infty)$ ab auf $0 > v > -\infty$.)

Ähnliche Entwicklungen erhält man für U_1 und U_5 in der Umgebung von $v = 0$, $(z \to -\infty)$

(33) $$U_1 = r_0^{-1} \varkappa^{-1/2} (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \exp\left(\frac{\gamma-1}{2} \varkappa z\right)$$

(34) $$U_5 = r_0^{-1} \varkappa^{-1/2} (-1)^{\frac{1-\gamma}{2}} \exp\left(\frac{1-\gamma}{2} \varkappa z\right).$$

Wenn wir nun die Parameter in der hypergeometrischen Differentialgleichung so wählen, daß

(35) $$\frac{1-\gamma}{j} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha-\beta}{j}$$

reell und negativ sind, die Zeitfunktion $\exp(-j\omega t)$ nehmen, so stellt die in (32) angegebene Näherung für U_3 den Ortsanteil einer ebenen Welle dar, die in der Richtung der $+z$-Achse läuft:

(36) $$\exp\left[-j\omega t + j\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \varkappa z\right].$$

Entsprechend enthält (33) und (34) mit U_1 für große negative z eine in der $+z$-Richtung U_5 für große negative z eine in der $-z$-Richtung laufende Welle. Hier haben wir nun das Kriterium für die Wahl der Wurzelvorzeichen in (14) gefunden.

Aus der Verknüpfungsformel (26) wird aber durch geeignetes Erweitern eine solche für drei Lösungen der Wellengleichung U_j: U_3 ist für große positive z-Werte eine in der $+z$-Richtung laufende ebene Welle; verfolgt man U_3 nach rückwärts zu großen negativen z, so setzt es sich dort aus U_1 und U_5 zusammen, von denen U_1 eine in der $+z$-Richtung laufende „einfallende" Welle, U_5 eine in der $-z$-Richtung laufende, reflektierte Welle darstellt. Physikalisch beschreibt man diesen Zusammenhang in anderer Reihenfolge, indem man in Richtung der einfallenden Welle mitgeht: Eine Welle U_1 fällt bei $z = -\infty$ ein und zerlegt sich beim Passieren einer Zone stark veränderlicher DK in eine durchlaufende Welle U_3 und eine reflektierte U_5. Die Zusammenhangsformel (26) gibt den Reflexions- und Durchgangsfaktor nach Amplitude und Phase. Wir haben mit (29) und der Normierung $r_0 = 1$:

Einfallende Welle:

$$U_1 = \varkappa^{-1/2}\, v^{\frac{\gamma-1}{2}}\, (1-v)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}\, u_1 \tag{37}$$

Reflektierte Welle:

$$U_5 = \varkappa^{-1/2}\, v^{\frac{\gamma-1}{2}}\, (1-v)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}\, u_5 \tag{38}$$

Durchlaufende Welle:

$$U_3 = \varkappa^{-1/2}\, v^{\frac{\gamma-1}{2}}\, (1-v)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}\, u_3. \tag{39}$$

Das Verhältnis $\frac{U_3}{U_1}$ bezeichnen wir als Durchgangsfaktor D, das Verhältnis $\frac{U_5}{U_1}$ als Reflexionsfaktor R. Nach Kürzen mit $\varkappa^{-1/2}\, v^{\frac{\gamma-1}{2}}\, (1-v)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}$ können wir U_j durch u_j $(j = 1, 3, 5)$ ersetzen und erhalten aus (26) und (20) mit $v = -e^{\varkappa z}$

$$D = \frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+1-\beta)} \tag{40}$$

$$R = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)}.\ ^{1} \tag{41}$$

Unter Berücksichtigung des Ergänzungssatzes der Γ-Funktion sieht man leicht, daß sich dies mit dem Rawerschen Resultat in [11] deckt.

Somit haben wir die Grundzüge der Methode erläutert, die wir für das vorliegende Problem verwenden wollen.

2.1. Das sich ergebende $\varepsilon = f(z)$ nach 2.

Wenn wir den Wellenvorgang in einem x, y, z-Koordinatensystem beschreiben, wo $\varepsilon = f(z)$, so veranlaßt das physikalische Problem folgendes:

Wir wollen die Reflexion von Wellen in der Troposphäre beschreiben. Dort soll für große positive z $\varepsilon = 1$ werden; dann kommt für kleinere z eine Zone, wo ε von 1 auf $1 + \delta$ steigt, wobei im troposphärischen Fall δ als sehr klein zu gelten hat. Unsre Rechnungen werden aber von dieser Einschränkung nicht berührt werden, so daß wir δ beliebig positiv annehmen wollen.

Mit

$$v = -e^{\varkappa z}, \quad \ln v = \pm j\pi + \varkappa z \tag{42}$$

[1] Das Fehlen von $e^{j\pi(\gamma-1)}$ rührt von $(-1)^{(1-\gamma)}$ in $v^{(1-\gamma)}\, {}_2F_1(\,) = (-e^{\varkappa z})^{(1-\gamma)}\, {}_2F_1(\,)$ her.

müssen wir jetzt in (12) die Konstanten K_1, K_2, K_3 geeignet bestimmen. Im Falle (42) verschwindet in (12) die erste eckige Klammer. Es wird:

$$\left(\frac{d}{dz}\ln v\right)^2 = \varkappa^2 \tag{43}$$

und wir erhalten:

$$\varepsilon(z) = -\frac{\varkappa^2}{k_0^2}\left(K_1 + \frac{1}{4} - \frac{K_2 e^{\varkappa z}}{1+e^{\varkappa z}} - \frac{K_3 e^{\varkappa z}}{(1+e^{\varkappa z})^2}\right). \tag{44}$$

In der Troposphäre muß ε von $1+\delta$ nach 1 monoton übergehen. Damit wird $K_3 = 0$, da das Glied mit K_3 nach Epstein und Rawer eine parabelartige Kurve mit negativem Minimum ergeben würde ([11] S. 395). Daraus ergeben sich für K_1 und K_2 folgende beiden Gleichungen:

$$\varepsilon(-\infty) = 1+\delta \curvearrowright K_1 + \frac{1}{4} = -\frac{k_0^2}{\varkappa^2}(1+\delta) \tag{45}$$

$$\varepsilon(+\infty) = 1 \qquad \curvearrowright K_1 + \frac{1}{4} - K_2 = -\frac{k_0^2}{\varkappa^2}. \tag{46}$$

Also

$$K_1 = -\frac{k_0^2}{\varkappa^2}(1+\delta) - \frac{1}{4} \tag{47}$$

$$K_2 = -\frac{k_0^2}{\varkappa^2}\,\delta,\quad K_3 = 0 \tag{48}$$

somit

$$\varepsilon(z) = 1 + \frac{\delta}{1+e^{\varkappa z}}. \tag{49}$$

Wenn wir uns mit Rawer auf senkrechten Einfall beschränken, eine Voraussetzung, von der wir uns alsbald befreien werden, folgen für α, β, γ die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + j\frac{k_0}{\varkappa}\left(\sqrt{1+\delta} - 1\right) \\ \beta &= 1 + j\frac{k_0}{\varkappa}\left(\sqrt{1+\delta} + 1\right) \\ \gamma &= 1 + 2j\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{1+\delta}. \end{aligned} \tag{50}$$

Wir haben uns noch mit der graphischen Darstellung von $\varepsilon(z)$ zu befassen. Sie ist gegeben in Figur 1.

Für $z \to +\infty$ ist $\varepsilon = 1$, für $z \to -\infty$ ist $\varepsilon = 1+\delta$.

In $z = 0$ ist $\varepsilon = 1 + \frac{\delta}{2}$. Etwa zwischen $z = +\frac{2}{\varkappa}$ und $z = -\frac{2}{\varkappa}$ geht ε ziemlich „gradlinig" von 1 auf $1+\delta$ über. Die Tangente in $z = 0$, $\varepsilon = 1 + \delta/2$ trifft die Gerade $\varepsilon = 1$ in $z = \frac{2}{\varkappa}$, die Gerade $\varepsilon = 1+\delta$ in $z = -\frac{2}{\varkappa}$.

Wenn wir die Zone zwischen diesen beiden z-Werten als „Übergangszone" bezeichnen, so hat diese eine Dicke von $\frac{4}{\varkappa}$; $\varkappa$ ist sozusagen die „reziproke Schichtdicke". Bei $\varkappa \to \infty$ wird der Übergang zwischen $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = 1+\delta$ unstetig, wir erhalten einen ε-Sprung.

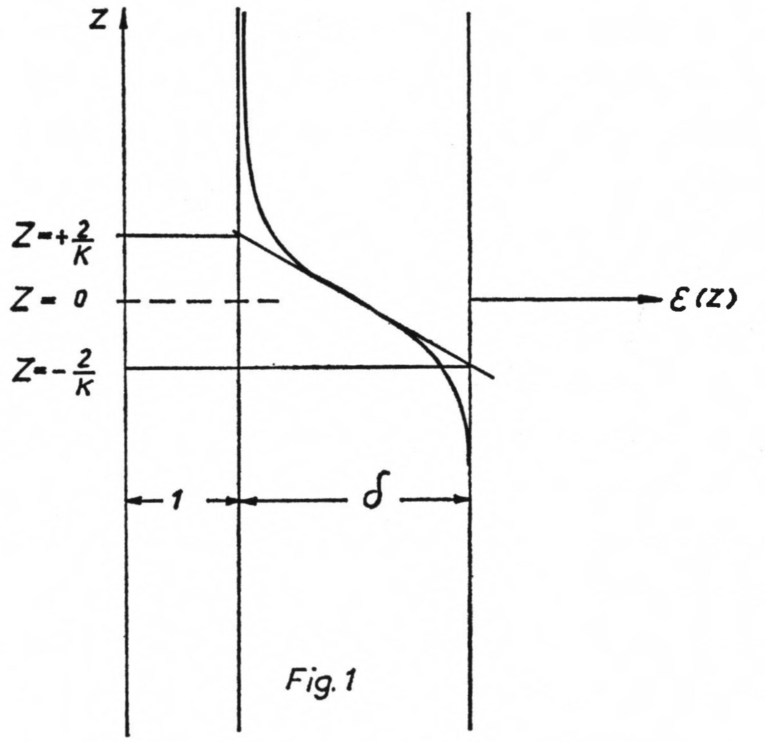

Fig. 1

3. „EBENE" WELLEN IM EPSTEINMEDIUM.

Wenn wir das soeben angegebene Medium als „Epsteinmedium" bezeichnen, so wollen wir in diesem Medium zunächst „ebene" Wellen studieren, d. h. Wellen, die entweder für $z = \pm\infty$ oder für $\delta \to 0$, $\varkappa \to \infty$ sich auf ebene Wellen reduzieren. Zu diesem Zwecke

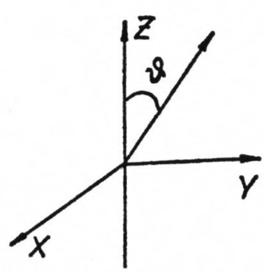

Fig. 2

müssen wir jetzt im x, y, z-Koordinatensystem die Wellengleichung aufstellen. Wir benützen das System der Figur 2, wobei die Wellennormale in der y z-Ebene gelegen sein soll. Die ebene Wellenfront ist durch ihre Spur gekennzeichnet, die in der y z-Ebene senkrecht zur Wellennormalen liegt.

3.1. Die Wellengleichung für die Feldstärke $\vec{E}$.

Bekanntlich lautet für die Feldstärke $\vec{E}$ die Wellengleichung [6] [11]

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu\, \varepsilon(x, y, z)\, \vec{E} = -\operatorname{grad}\left(\vec{E}, \frac{\operatorname{grad} \varepsilon(x, y, z)}{\varepsilon(x, y, z)}\right). \tag{51}$$

Wenn wir für $\vec{E}$ allein die Komponente E_x vorsehen, dann bekommen wir die Wellengleichung: $(\varepsilon = \varepsilon(z))$

$$\Delta E_x + \omega^2 \varepsilon_0\, \varepsilon(z)\, \mu_0 \mu E_x = 0. \tag{52}$$

Die Feldstärke $\vec{H}$ ergibt sich dann aus:

$$+ j\omega \mu_0 \mu \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{E} \qquad \text{(Zeitfunktion } e^{-j\omega t}!) \tag{53}$$

also:

$$H_x = 0, \quad H_y = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu} \frac{\partial E x}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu} \frac{\partial E x}{\partial y}. \tag{54}$$

Somit haben wir Wellen, deren Normale in der $y\,z$-Ebene liegt, die zu betrachtenden Feldvektoren sind E_x, H_y, H_z.

3.2. Lösung der Wellengleichung durch Separieren der Variablen.

In bekannter Weise lösen wir (52) durch den Ansatz

$$E_x = X(x)\; Y(y)\; Z(z). \tag{55}$$

Wir studieren aber Wellen, die unabhängig von x sind, somit $X(x)$ konstant, und wir haben nur mehr $Y(y)$ und $Z(z)$ zu betrachten. Aus (52) erhalten wir dann in bekannter Weise:

$$Z(z) \frac{d^2 Y(y)}{d y^2} + Y(y) \frac{d^2 Z}{d z^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu\, \varepsilon(z)\, Y(y)\, Z(z) = 0. \tag{56}$$

Mittels Division durch $Z\;Y$ finden wir

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{d y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{d (z)^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu\, \varepsilon(z) = 0 \tag{57}$$

und wir können schreiben:

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{d y^2} = -c_y^2 \tag{58}$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{d z^2} = -c_z^2 \tag{59}$$

mit:

(60) $$c_y^2 + c_z^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu \, \varepsilon(z).$$

Mit

(61) $$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 = k_0^2 (\mu = 1)$$

wird

(62) $$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu \, \varepsilon(z) = k_0^2 \, \varepsilon(z).$$

Setzen wir

(63) $$c_y^2 = k_0^2 \, \varepsilon(z_0) \cos^2 \beta_0, \qquad (z_0 \text{ willkürlicher Wert von } z)$$

so wird

(64) $$c_z^2 = k_0^2 \left(\varepsilon(z) - \varepsilon(z_0) \cos^2 \beta_0\right).$$ [1]

In (64) wird $\varepsilon(z)$ um die Konstante $\varepsilon(z_0) \cos^2 \beta$ vermindert. $\varepsilon(z_0)$: Wir denken uns ebene Wellen, in einem homogenen Medium mit einem Wert von ε, der in der Höhe z_0 herrscht. Mit $\varepsilon(z_0) \cos^2 \beta_0$ haben wir durch die Wahl von β die Richtung der Wellennormalen in z_0 angegeben. Nehmen wir z. B. $\varepsilon(z_0) = 1 + \delta$, so haben wir die Wellennormale in $z = -\infty$ bestimmt, mit $\varepsilon(z_0) = 1$ in $z = +\infty$. Die Wellennormale ist durch das Brechungsgesetz $\varepsilon(z) \cos \beta = \text{const}$ festgelegt. In $z = z_0$ ist:

(65) $$\varepsilon(z) - \varepsilon(z_0) \cos^2 \beta_0 = \varepsilon(z_0) \sin^2 \beta_0.$$

Die Gleichung (58) können wir sofort lösen:

(66) $$Y(y) = M e^{\pm j c_y y}.$$

Die Gleichung (59) schreiben wir nochmals an:

(67) $$\frac{d^2 Z}{d z^2} + k_0^2 \left(\varepsilon(z) - \varepsilon(z_0) \cos^2 \beta_0\right) Z(z) = 0.$$

Diese Gleichung wird durch die Epsteintransformation in eine hypergeometrische verwandelt.

Mit

(68) $$\zeta = -e^{\varkappa z}$$

erhalten wir nach (4), (6), (8) die Lösung

(69) $$Z(z) = N \zeta^{\frac{\gamma}{2}} (1 - \zeta)^{\frac{\alpha + \beta - \gamma + 1}{2}} \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-1/2} u_j(\alpha, \beta; \gamma; \zeta).$$

Mit den verschiedenen Lösungen u_j entspricht dies Wellen, die von $z = \pm\infty$ herkommen oder dorthin laufen.

---

[1] β_0 = Winkel der Wellennormalen in $z = z_0$ mit der y-Achse.

3.3. Die Werte der Parameter α, β, γ.

Wir müssen jetzt noch die Werte von α, β, γ bestimmen.

Da $\varepsilon = 1 + \delta/(1 + e^{\varkappa z})$ und in der Wellengleichung $\varepsilon(z) - \varepsilon(z_0) \cos^2 \beta_0$ steht, wird nach (14) und (50) mit

(70) $$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \sin \vartheta_0 = \cos \beta_0$$

(71) $$\begin{aligned}
\alpha &= 1 + j \frac{k_0}{\varkappa} \left(\sqrt{(1+\delta) - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0} - \sqrt{1 - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0}\right) \\
\beta &= 1 + j \frac{k_0}{\varkappa} \left(\sqrt{(1+\delta) - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0} + \sqrt{1 - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0}\right) \\
\gamma &= 1 + 2j \frac{k_0}{\varkappa} \sqrt{(1+\delta) - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0}.
\end{aligned}$$

Da in unseren Gleichungen eine Reihe linearer Kombinationen von α, β, γ auftreten, wollen wir einige gleich anschreiben:

(72) $$\begin{aligned}
\gamma - 1 &= 2j \frac{k_0}{\varkappa} \sqrt{(1+\delta) - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0} \\
1 - \beta &= -j \frac{k_0}{\varkappa} \left(\sqrt{(1+\delta) - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0} + \sqrt{1 - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0}\right) \\
\gamma - \beta &= \alpha - 1 \\
&= j \frac{k_0}{\varkappa} \left(\sqrt{(1+\delta) - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0} - \sqrt{1 - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0}\right) \\
\alpha + \beta - \gamma + 1 &= 2 \\
\alpha + 1 - \gamma &= 2 - \beta = \\
&= 1 - j \frac{k_0}{\varkappa} \left(\sqrt{(1+\delta) - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0} + \sqrt{1 - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0}\right) \\
\frac{\beta - \alpha}{2} &= j \frac{k_0}{\varkappa} \sqrt{1 - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0}.
\end{aligned}$$

Mit (66) und (69) haben wir die Lösung der Wellengleichung in der Hand. Wenn in u_j der Index j die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6 durchläuft, haben wir die Gesamtheit der uns interessierenden Lösungen vor uns, deren Zusammenhangsformeln die Reflexions- und Durchgangskoeffizienten geben.

3.4. Reflexionsstudien.

Wenn wir einfallende, durchlaufende und reflektierte Wellen untersuchen, so müssen wir für jede die Komponenten E_x, H_y, H_z betrachten, die durch (53) (54) miteinander gekoppelt sind. Wir gehen von E_x aus und geben dazu jeweils mittels (54) die beiden H-Komponenten. Die Reflexions- und Durchgangsfaktoren sind immer die Verhältnisse von E_x in $z = +\infty$ oder $-\infty$, wo sich unsere Wellen auf ebene reduzieren.

Dort ist das Medium nahezu homogen. In der Übergangsschicht haben wir [26] eine Überlagerung von laufenden und von stehenden Wellen, die kaum zu trennen sind, weil an jeder Stelle durch „innere“ Reflexion reflektierte Wellen entstehen, die sich gegenseitig überlagern. Der Wellenzustand in dieser Zone wird durch unsere Beziehungen streng beschrieben und müßte dann numerisch ausgewertet werden.

3.4.1. *Wellentypen.*

Die nun anzugebenden Wellentypen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie in $z \to \pm\infty$ oder $\zeta \to {}^{\,0}_{-\infty}$ beziehungsweise in ebene Wellen übergehen; dort wird $\varepsilon(z)$ konstant. Die Normale dieser Wellen soll so gewählt sein, daß sie stets eine positive y-Komponente hat. Ihre z-Komponente kann positiv oder negativ sein, je nachdem, ob die Welle nach oben oder nach unten läuft. Wir wählen die Zeitfunktion $\exp(-j\omega t)$, dann muß eine nach $+y$ laufende Welle den Faktor $\exp(+jc_y y)$ haben. Eine nach $+z$ laufende muß im homogenen Medium den Faktor $\exp(+jc_z z)$ haben, eine nach $-z$ laufende, den Faktor $\exp[-jc_z z]$. Wenn wir dies auf unsere Ausdrücke anwenden, so muß eine bei $z = -\infty$ in $+y$, $+z$ Sinn einlaufende Welle die Form haben:

$$E_x = e^{jc_y y}\, \zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\, (1-\zeta)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}\, \underbrace{{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\zeta)}_{u_1(\alpha,\beta;\gamma;\zeta)}. \tag{73}$$

Da sich ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\zeta)$ für $\zeta \to 0$ auf 1 reduziert, ebenso $(1-\zeta)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}} \to 1$ für $\zeta \to 0$ (cf. 72), so bleibt asymptotisch nur übrig:

$$E_x \sim e^{jc_y y}\, \zeta^{\frac{\gamma-1}{2}} \to e^{jc_y y} \exp\left[jk_0 z \sqrt{1+\delta-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}\right]. \tag{74}$$

Wenn wir $z_0 = -\infty$ wählen, haben wir

$$E_x \sim \exp\left[jk_0\sqrt{1+\delta}\,\cos\beta_0 y\right]\, \exp\left[jk_0 z\sqrt{1+\delta}\,\cos\vartheta_0\right]; \tag{75}$$

oder z. B.: Wellen, die in $\zeta = -\infty$, $z = +\infty$ nach $+y$ und $\pm z$ laufen, werden charakterisiert durch $\exp[+jc_y y]\,\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,\zeta^{\varrho}$, wo ϱ der in den zugehörigen u_j vorkommende Exponent ist. Dies diene nur zum vorläufigen Überblick. Im nächsten Abschnitt werden wir dies in allen Einzelheiten sehen.

3.4.1.1. TABULIERUNG DER WELLENTYPEN.

Zunächst wollen wir jeder Welle, die nach oben läuft, den Index $\uparrow$ zufügen, jeder Welle, die nach unten läuft, den Index $\downarrow$ ($z \to -\infty$). In bezug auf y wollen wir nur die positive Richtung nach rechts ins Auge fassen. Konstante Faktoren werden wir zunächst weglassen und nur die Typen angeben. Später wollen wir die einfallenden Wellen mit 1 normieren, den reflektierten den Faktor R und den durchlaufenden den Faktor D geben, die sich aus den Zusammenhangsformeln errechnen.

1. Die in $\zeta = 0$, $z = -\infty$ in der $+z$-Richtung einfallende Welle lautet:

$$E_{xe}\uparrow = e^{jc_y y}\,\underbrace{\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}\;{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\zeta)}_{u_1} \tag{76}$$

$$H_{ze}\uparrow = -\frac{1}{j\,\omega\,\mu_0\,\mu}\,\frac{\partial E_{xe}\uparrow}{\partial y} = -\frac{c_y}{\omega\,\mu_0\,\mu}\,e^{jc_y y}\,(1-\zeta)\,u_1, \tag{77}$$

da $\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2} = 1$ (vgl. 72).

$$H_{ye}\uparrow = \frac{1}{j\,\omega\,\mu_0\,\mu}\,\frac{\partial E_{xe}\uparrow}{\partial z}. \tag{78}$$

Mit $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \varkappa\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}$ wird:

$$H_{ye}\uparrow = \frac{e^{jc_y y}}{j\omega\mu_0\mu}\,\varkappa\zeta\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,u_1\right). \tag{79}$$

In $E_{xe}\uparrow$ lautet hier der Exponent von $\zeta = -e^{\varkappa z}$:

$$\frac{\gamma-1}{2} = j\,\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{(1+\delta)-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0} \tag{80}$$

ist positiv imaginär, so daß wir mit $e^{-j\omega t}$ die in der $+z$-Richtung einlaufende Welle haben.

2. Die zugehörige reflektierte Welle, die in $z \to -\infty$ in der $-z$-Richtung läuft, wird, abgesehen von dem Reflexionsfaktor, den wir weglassen:

$$E_{xr}\downarrow = e^{jc_y y}\,\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,\underbrace{\zeta^{(1-\gamma)}\,{}_2F_1(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;\zeta)}_{u_5}. \tag{81}$$

Dazu wird

$$H_{zr}\downarrow = -\frac{c_y}{\omega\mu_0\mu}\,e^{jc_y y}\,\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,u_5 \tag{82}$$

und

$$H_{yr}\downarrow = \frac{e^{jc_y y}}{j\omega\mu_0\mu}\,\varkappa\zeta\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta^{(\gamma-1)}\,(1-\zeta)\,u_5\right). \tag{83}$$

Wenn wir in $z \to -\infty$, $\zeta \to 0$ für $E_{xr}\downarrow$ den Exponenten von ζ prüfen, so kommen zu dem in (80) genannten $\frac{\gamma-1}{2}$ aus u_5 $1-\gamma$ dazu und es entsteht $\frac{1-\gamma}{2}$; also haben wir hier das Umgekehrte von (80), den negativ imaginären Exponenten, der der abwärts laufenden Welle entsrpicht.

3. Für die durchlaufende Welle, die sich in $\zeta \to -\infty$, $z \to +\infty$ als ebene Welle präsentiert, erhalten wir in analoger Weise, abgesehen von dem Faktor D:

(84) $$E_{xd}\uparrow = e^{jc_y y}\,\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,(-\zeta)^{-\alpha}\;{}_2F_1\underbrace{\left(\alpha,\alpha-\gamma+1;\alpha-\beta+1;\frac{1}{\zeta}\right)}_{u_3};$$

(85) $$H_{zd}\uparrow = -\frac{c_y}{\omega\mu_0\mu}\,e^{jc_y y}\,\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,u_3;$$

(86) $$H_{yd}\uparrow = \frac{e^{jc_y y}}{\omega\mu_0\mu}\,\varkappa\zeta\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,u_3\right);$$

Der Exponent von ζ ist hier

(87) $$\frac{\gamma-1-2\alpha+2}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2} = j\,\frac{k_0}{\varkappa}\,\sqrt{1-\varepsilon(z_0)\,\sin^2\vartheta_0}$$

als positiv imaginär, solange die Wurzel reell ist. Dies entspricht der Laufrichtung nach oben. Wenn die Wurzel imaginär ist, haben wir den später noch zu diskutierenden Fall des umkehrenden Strahles.

4. Jetzt wenden wir uns Wellen zu, die bei $z = +\infty$ in der $-z$-Richtung einfallen:

(88) $$E_{xe}\downarrow = e^{jc_y y}\,\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,\underbrace{(-\zeta)^{-\beta}\;{}_2F_1\left(\beta,\beta-\gamma+1;\beta-\alpha+1;\frac{1}{\zeta}\right)}_{u_4};$$

wobei $(-)^{-\beta} = e^{j\pi\beta}$

(89) $$H_{ze}\downarrow = \frac{-c_y}{\omega\mu_0\mu}\,e^{jc_y y}\,\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,u_4;$$

(90) $$H_{ye}\downarrow = \frac{e^{jc_y y}}{j\omega\mu_0\mu}\,\varkappa\zeta\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,u_4\right).$$

Der Exponent von ζ ist jetzt:

(91) $$\frac{\gamma-1-2\beta+2}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2} = -j\,\frac{k_0}{\varkappa}\,\sqrt{1-\varepsilon(z_0)\,\sin^2\vartheta_0}$$

umgekehrt wie in (87).

5. Die zugehörige reflektierte Welle lautet:

(92) $$E_{xr}\uparrow = e^{jc_y y}\,\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,u_3,$$

sie entspricht $E_{xd}\uparrow$ bis auf den zugehörigen Koeffizienten; dies ist klar: eine oben auslaufende Welle stellt immer ihren Typ dar, unabhängig davon, ob sie von der Reflexion herrührt oder von einer unten einlaufenden Welle.

6. Die nach unten auslaufende Welle hat denselben Typ wie $E_{xr}\downarrow$, sie stellt sich mittels u_5 dar.

3.4.2. *Reflexions- und Übertragungskoeffizienten.*

Wir beziehen alle Reflexions- und Übertragungsfaktoren auf E_x und definieren sie folgendermaßen:

1. Einfall von unten: In der Umgebung von $z \to -\infty$, $\zeta \to 0$ fällt eine Welle nach (76) mit dem Faktor 1 ein:

$$E_{xe}\uparrow = e^{jc_y y}\, \zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\, (1-\zeta)\, u_1, \tag{76}$$

Dort tritt eine reflektierte Welle auf nach

$$E_{xr}\downarrow = R e^{jc_y y}\, \zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\, (1-\zeta)\, u_5. \tag{81}$$

In $z \to +\infty$, $\zeta \to -\infty$, haben wir eine durchlaufende Welle nach

$$E_{xd}\uparrow = D e^{jc_y y}\, \zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\, (1-\zeta)\, u_3. \tag{84}$$

Diese Welle würde analytisch nach $z \to -\infty$, $\zeta \to 0$ fortgesetzt: $RE_{xr}\downarrow + E_{xe}\uparrow$ ergeben.

R und D finden wir nun aus der Zusammenhangsformel (26), die den Zusammenhang der Funktionen u_1, u_3, u_5 enthält und die wir nochmals anschreiben wollen:

$$u_3\uparrow = \frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\, u_1\uparrow - \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)}\, e^{j\pi(\gamma-1)}\, u_5\downarrow\,. \tag{26}$$

Wenn wir u_1 den Faktor 1 geben, also durch den Koeffizienten von u_1 dividieren, erhält u_3 den Koeffizienten D, u_5 den Koeffizienten R. Diese Koeffizienten sind dann

$$R\downarrow = -\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)}\,; \tag{93}$$

$\exp[j\pi(\gamma-1)]$ fällt heraus: u_5 lautet

$$u_5 = \zeta^{(1-\gamma)}\ {}_2F_1(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1;\ 2-\gamma;\ \zeta) \quad \text{vgl. (20).} \tag{94}$$

Da $\zeta = -e^{\varkappa z}$, wird $\zeta^{(1-\gamma)} = (-)^{1-\gamma}\, e^{\varkappa z(1-\gamma)}$; $(-)^{1-\gamma}$ hebt sich gegen $e^{j\pi(\gamma-1)}$ weg, da ja D als Koeffizient der asymptotisch resultierenden Exponentialfunktion der auslaufenden bzw. einlaufenden Welle definiert ist.

Ebenso ergibt sich für D:

$$D\uparrow = \frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(1+\alpha-\beta)}\,. \tag{95}$$

2. Einfall von oben:

Abgesehen von den Faktoren $\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)$ wird die einfallende Welle durch $u_4\downarrow$, die reflektierte durch $u_3\uparrow$, die nach unten auslaufende Welle durch $u_5\downarrow$ dargestellt.

Der Zusammenhang zwischen diesen Funktionen ist durch (28) gegeben:

(28) $$u_5 = \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)\,e^{j\pi(1-\gamma)}}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta+1-\gamma)}\,u_3 + \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)\,e^{j\pi(1-\gamma)}}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\,u_4 .$$

Daraus resultiert für R und D, wobei wieder $e^{j\pi(1-\gamma)}$ herausfällt, in ähnlicher Weise wie oben:

(96) $$R\uparrow = \frac{\Gamma(\beta-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta+1-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}$$

(97) $$D\downarrow = \frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)} .$$

3.4.3. *Diskussion der Reflexions- und Übertragungskoeffizienten.*

Wir haben nun diese Beziehungen physikalisch zu diskutieren. Dabei werden wir folgendes sehen: Beim Einfall von unten her werden sich bei steilerem Einfall partielle Reflexion und eine auslaufende Welle ausbilden. Bei flachem Einfall wird der Reflexionsfaktor wie bei der Totalreflexion den Betrag 1 bekommen und oberhalb der Schicht wird das Feld exponentiell mit z abnehmen. Beim Einfall von oben her werden wir nur partielle Reflexion erhalten, bei streifendem Einfall wird der Reflexionsfaktor — 1 in allen Fällen. Dies wollen wir jetzt aus den Gleichungen (93) (95) (96) (97) entnehmen.

3.4.3.1. DER FALL DES WELLENEINFALLS VON UNTEN HER.

Wenn wir uns der strahlenoptischen Sprechweise bedienen, so müssen wir hier Einfallsrichtungen von $z = -\infty$ her unterscheiden, für die die Strahlen nicht umkehren, und solche, für die die Strahlen umkehren; für die letzteren Strahlen wird wellenoptisch totale Reflexion eintreten, für die ersteren nur partielle Reflexion.

3.4.3.1.1. Nicht umkehrende Strahlen: partielle Reflexion.

Wie bemerkt, haben wir hier partielle Reflexion; Reflexions- und Übertragungsfaktor sind durch (93) und (95) gegeben. Im strahlenoptischen Anhang werden wir sehen, daß der Grenzwinkel für die Strahlenumkehr, hier der Totalreflexion, gegeben ist durch:

(98) $$(1+\delta)\sin^2\vartheta_{0g} = 1,$$

wo $\varepsilon(z_0) = 1 + \delta$.

(99) $$\sin\vartheta_{0g} = \sqrt{\frac{1}{1+\delta}}$$

$$\vartheta_{0g} = \vartheta_{0\,Grenz}$$

Steiler einfallende Strahlen werden partiell reflektiert, flacher einfallende total.

3.4.3.1.2. Umkehrende Strahlen: Totalreflexion.

(98) und (99) geben $\sin\vartheta_{0g}$ für Strahlen, die bei $z = -\infty$ einfallen und gerade noch umkehren, also bei $z = +\infty$ horizontal verlaufen. Noch flacher als mit ϑ_{0g} einfallende Wellen haben ihr Umkehrniveau, d. h. das Niveau, wo die Strahlen horizontal verlaufen, schon in endlicher Höhe, dort wo $\sin\vartheta_0 = 1$ ist:

$$(1+\delta)\,\sin^2\vartheta_{-\infty g} = \varepsilon(z_u)\,\underbrace{\sin^2\vartheta_u}_{1} \tag{100}$$

$$z_u,\ \vartheta_u = z_{Umkehr},\ \vartheta_{Umkehr}$$

$$\sin\vartheta_{-\infty} = \sqrt{\frac{\varepsilon(z_u)}{1+\delta}}\,. \tag{101}$$

Um nun die Totalreflexion am Reflexionsfaktor $R\downarrow$ zu zeigen, gehen wir folgendermaßen vor: Es ist

$$R\downarrow = -\frac{\Gamma(\gamma)\;\Gamma(1-\beta)\;\Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\;\Gamma(\gamma-\beta)\;\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(\gamma-1)\;\Gamma(1-\beta)\;\Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)\;\Gamma(\gamma-\beta)\;\Gamma(\alpha)}\,. \tag{93}$$

Die letzte Form rührt her von der Identität:

$$\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(1-\gamma)} = -\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)}\,. \tag{102}$$

Setzen wir hier α, β, γ explizit ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} R\downarrow &= \frac{\Gamma\left(2j\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{(1+\delta)-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}\right)}{\Gamma\left(-2j\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{(1+\delta)-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}\right)} \\ &\times \frac{\Gamma\left(-j\frac{k_0}{\varkappa}\left(\sqrt{(1+\delta)-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}+\sqrt{1-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}\right)\right)}{\Gamma\left(+j\frac{k_0}{\varkappa}\left(\sqrt{(1+\delta)-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}-\sqrt{1-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}\right)\right)} \\ &\times \frac{\Gamma\left(1-j\frac{k_0}{\varkappa}\left(\sqrt{(1+\delta)-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}+\sqrt{1-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}\right)\right)}{\Gamma\left(1+j\frac{k_0}{\varkappa}\left(\sqrt{(1+\delta)-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}-\sqrt{1-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}\right)\right)} \\ &= F_1\times F_2\times F_3. \end{aligned} \tag{103}$$

Da nun die Γ-Funktion auf der reellen Achse reell ist, so muß sie in zu dieser Achse spiegelbildlichen Punkten nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip konjungiert komplexe Werte annehmen. Nun ist aber

$$\varepsilon(z_0)\,\sin^2\vartheta_0 \leq 1+\delta \tag{104}$$

und somit der Faktor F_1 stets dem Betrage nach $= 1$. In bezug auf die Faktoren F_2 und F_3 können wir folgendes Verhalten ablesen:

Wenn $1-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0$ Null oder negativ wird, dann werden F_2 und F_3 ersichtlich ebenfalls Quotienten zweier konjungiert komplexen Größen und somit dem Betrage nach $= 1$.

Damit haben wir die Totalreflexion aus der Gleichung für den Reflexionsfaktor herausgelesen.

Im Falle streifenden Einfalls ist $\vartheta_{-\infty}$ schon $\pi/2$, $\sin\vartheta_{-\infty} = 1$.

Dann wird $\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0 = 1+\delta$, $\sqrt{1+\delta-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}$ verschwindet; wie die später noch öfters herangezogene Entwicklung der Γ-Funktion im Nullpunkt zeigt, wird der 1. Faktor $F_1 = -1$. Die beiden anderen Faktoren ergeben folgendes Bild:

Es wird

$$\sqrt{1-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0} = j\sqrt{\delta}. \tag{105}$$

Wir haben

$$F_2 \times F_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{\delta}\right)\,\Gamma\left(1+\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{\delta}\right)\,\Gamma\left(1+\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{\delta}\right)} = 1. \tag{106}$$

Somit wird im Falle streifenden Einfalls $\left(\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ in } z = -\infty\right)$

$$R\!\downarrow\; = F_1 \times F_2 \times F_3 = -1. \tag{107}$$

3.4.3.1.3. Stehende Wellen und Interferenzstreifen.

Wenn wir umkehrende Strahlen haben, so muß sich oberhalb des Umkehrniveaus eine Art Oberflächenwelle ausbilden wie bei der Totalreflexion an einer scharfen Trennfläche. Es muß sich zum mindesten asymptotisch für große z eine exponentielle Abnahme der Intensität von E_x ausbilden, in Abhängigkeit von z muß dort der Feldzustand gleichphasig sein, E_x und H_y müssen 90° Phasenverschiebung haben, damit in der $+z$-Richtung im Mittel keine Energie läuft. Unterhalb des Umkehrniveaus müssen Interferenzstreifen auftreten. Dieses Verhalten wollen wir jetzt aus unseren Gleichungen ablesen:

Da unsere Betrachtung zunächst nur Abhängigkeit von z betrifft, so lassen wir für die Diskussion den Faktor $\exp[jc_y y]$ weg.

Für sehr große z, $\zeta \to -\infty$, also oberhalb der Schicht haben wir die auslaufende Welle, also für $E_{xd}\!\uparrow$ und $H_{yd}\!\uparrow$ die Ausdrücke (84) und (86).

Für $E_{xd}\!\uparrow$ erhalten wir dann asymptotisch abgesehen von konstanten Faktoren

$$E_{xd}\!\uparrow \sim \zeta^{\frac{\beta-\alpha}{2}}\,{}_2F_1(\alpha, \alpha-\gamma+1;\ \alpha-\beta+1;\ 1/\zeta) \sim \left(-e^{\varkappa z}\right)^{j\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{1-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0}} \cdot 1 \qquad (\vartheta_0 = \vartheta_{-\infty}). \tag{108}$$

Wenn $1-\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0$ negativ ist, wird der Exponent reell und E_{xd} exponentiell abnehmend, d. h. in sich gleichphasig.

Aus (54) sehen wir, daß $H_{yd}\!\uparrow\; = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu}\,\frac{\partial E_{xd}\!\uparrow}{\partial z}$. Also ist $H_{yd}\!\uparrow$ mit einem imaginären Faktor versehen die Ableitung einer reellen Größe (bis auf einen beiden Größen gemeinsamen komplexen Faktor). Somit ist $H_{yd}\!\uparrow$ gegenüber $E_{xd}\!\uparrow$ um 90° in der Phase verschoben, wie es auch sein muß.

Asymptotisch in dem homogenen Medium oberhalb der Schichtung haben wir also exponentielle Abnahme des Feldes in Form einer stehenden Welle.

Unterhalb des Umkehrniveaus haben wir stehende Wellen mit Interferenzstreifen, wie wir gleich sehen werden:

Wir können dieses Verhalten direkt aus der Differentialgleichung für die z-Abhängigkeit ablesen. Wir hatten ((52) (59) (64)):

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_0^2\left(\varepsilon(z) - \varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0\right) Z(z) = 0. \tag{109}$$

Solange $\varepsilon(z) - \varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0$ positiv ist, also unterhalb des Umkehrniveaus, können wir bekannte Oszillationssätze aus der Theorie der Differentialgleichungen heranziehen ([25] S. 227): Die reellen Lösungen haben Nullstellen, die hier Interferenz-Nullstellen bedeuten. Derselbe Satz würde für die Zone oberhalb des Umkehrniveaus mit $\varepsilon(z) - \varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0 < 0$: negativ zu der asymptotisch exponentiellen Abnahme ohne Nullstellen führen.

3.4.3.1.4. Das Feld in der Umgebung des Umkehrniveaus.

Wenn wir das Feld in der Umgebung des Umkehrniveaus untersuchen wollen, so stoßen wir auf folgende Schwierigkeit:

Im allgemeinen pflegt man bei Reflexionsproblemen anzuschreiben:

Eine einfallende Welle	(Koeffizient	1)
eine reflektierte Welle	(„	R)
eine durchlaufende Welle	(„	D)

In unserem Problem haben wir nun in den verschiedenen Bereichen konvergierende Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung. Solche Lösungen konvergieren in den Bereichen

$$|\zeta| < +1, \ z < 0; \quad |\zeta| > 1, \ z > 0.$$

Liegt der Umkehrpunkt in $z < 0$, so müßten wir die durchlaufende Welle (84) (85) (86) in Form einer Kombination von zwei Lösungen der Art (76) (77) (78) und (81) (82) (83) bis zum Niveau $z = 0$ fortsetzen, wobei wir uns der Zusammenhangsformel (26) zu bedienen haben. Die nach oben auslaufende Welle ist also im Umkehrniveau in diesem Falle noch nicht durch die ihr zukommenden Ausdrücke (84) (85) (86) darstellbar, sondern muß dorthin fortgesetzt werden. Der Charakter nur in einer Richtung laufender Wellen kommt den Wellenausdrücken nur in den Bereichen $|z| \to \infty$ zu, wo das Medium merklich homogen wird. In den Bereichen der Inhomogenität ist, wie der Verfasser in [26] [27] zusammen mit Kahan gezeigt hat, jeder solcher Ausdruck mit Anteilen „innerer Reflexion“ behaftet, die von Ort zu Ort variieren und nicht einfach von den laufenden Wellen zu trennen sind. Wenn das Umkehrniveau in $z < 0$ liegt, dann muß die in $\zeta \to -\infty$ konvergierende auslaufende Welle nach $z < 0$ hin fortgesetzt werden, wo sie sich als Überlagerung von zwei Ausdrücken darstellt, die für $z \to -\infty$ eine einlaufende und eine reflektierte Welle bilden, aber über dem Umkehrniveau die nach oben auslaufende Welle mit den überlagerten Anteilen innerer Reflexion geben.

Der gesamte Wellenzustand ist hinsichtlich der Koordinate z eine stehende Welle (die „auslaufende“ bekommt speziell diesen Charakter mit exponentieller Abnahme), die unterhalb des Umkehrniveaus Interferenzstreifen zeigt, oberhalb keine. Dieser Feldzustand wandert entsprechend $\exp[jc_y y]$ in der $+y$-Richtung weiter. Das Feld oben geht aus dem Felde unten mittels analytischer Fortsetzung hervor. Im Umkehrniveau haben wir eine Nullstelle von H_y. Ein Versuch, in dem Gebiet um das Umkehrniveau eine 3-Teilung der Welle anschaulich zu diskutieren, muß fehlschlagen, da jeder der Ausdrücke stehende Wellen enthält; ein Phasensprung ist schon deswegen nicht anzunehmen, weil die obere Lösung einfach als analytische Fortsetzung aus der unteren entsteht.

3.4.3.2. WELLENEINFALL VON OBEN HER.

Dieser Fall ist einfacher als der obige. Hier ist eine Totalreflexion nicht möglich, wir haben stets partielle Reflexion. Wir bemerken aber, daß auch hier der Charakter einer eindeutig nach oben oder unten laufenden Welle erst in den Zonen sich ausbildet, in denen das Medium homogen wird. In den inhomogenen Zonen enthält jeder solche Ausdruck stehende Wellen auf Grund innerer Reflexion.

3.4.4. DIE REFLEXION EBENER WELLEN IN EINEM HOMOGENEN HALBRAUM, DER MIT STETIGEM ÜBERGANG VON $\varepsilon(z)$ AN EIN EPSTEINMEDIUM GRENZT.

Wir denken uns einen Halbraum $z > z_0$ oder $z < z_0$, in dem $\varepsilon(z)$ dem Epsteinverlauf entspricht; in dem anderen Halbraum (bzw. $z < z_0$, $z > z_0$) sei ε konstant mit dem Epsteinwert $\varepsilon(z_0)$.

In den Figuren 3–8 sind solche Verläufe gezeichnet. Wir denken uns immer aus dem homogenen Medium einfallende Wellen und berechnen die reflektierten. Diese sind sicher

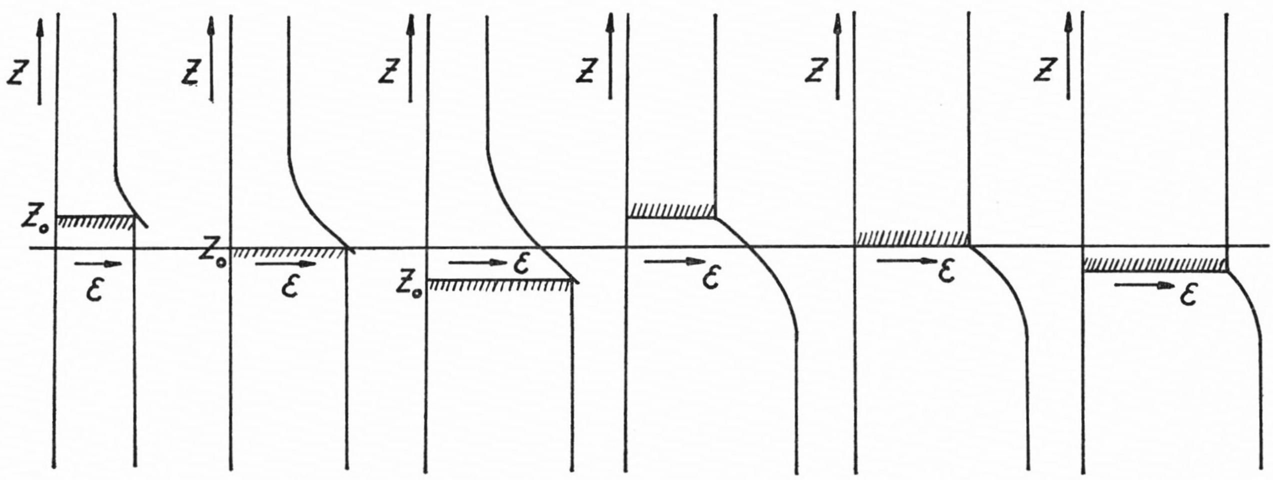

Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6 Fig. 7 Fig. 8

nicht identisch mit den vorher behandelten Wellen; für $z_0 \to \pm\infty$ müssen sie asymptotisch sich an diese angleichen. Es würden sich 6 Reflexionsprobleme ergeben:

a) Einfall von unten

α) Stoßstelle in $z = z_0 > 0$ Fig 3
β) „ in $z = z_0 = 0$ Fig 4
γ) „ in $z = z_0 < 0$ Fig 5

b) Einfall von oben

α) Stoßstelle in $z = z_0 > 0$ Fig 6
β) „ in $z = z_0 = 0$ Fig 7
γ) „ in $z = z_0 < 0$ Fig 8

Von diesen Fällen wollen wir nur a α), a γ), b γ) betrachten.

3.4.4.1. EINFALL VON UNTEN, TRENNEBENE IN $z_0 > 0$.

Wir haben $\varepsilon(z)$ dargestellt in Fig. 4. In dem oberen inhomogenen Bereich konvergieren nur die Lösungen, die der Entwicklung der hypergeometrischen Funktion bei $\zeta \to -\infty$ entsprechen. Wir müssen diejenige aussondern, die den Charakter einer auslaufenden Welle hat. Unten haben wir ein homogenes Medium mit $\varepsilon(z_0)$; dort existieren die Feldstärken E_x, H_y, H_z, wobei nach den Maxwellschen Gleichungen

$$H_y = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu}\frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{110}$$

(Zeitfunktion $e^{-j\omega t}$).

Dann lauten für die in der z-Ebene nach Fig. 2 laufenden Wellen die Ausdrücke:

a) Einfallende Welle:

$$E_{xe}\uparrow = \exp\left[jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right] \tag{111}$$

$$H_{ye}\uparrow = \frac{1}{Z}\cos\vartheta\,\exp\left[jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right] \tag{112}$$

$$H_{ze}\uparrow = -\frac{1}{Z}\sin\vartheta\,\exp\left[jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right] \tag{113}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\,\varepsilon(z_0)}}.$$

Z ist hier der Wellenwiderstand des Mediums. Diese einfallende Welle kommt von unten.

Nun definieren wir den Reflexionsfaktor, den wir hier R nennen wollen.

$$R\downarrow = \frac{E_{xr}\downarrow}{E_{xe}\uparrow} \text{ in } z = z_0. \tag{114}$$

Damit schreiben wir die reflektierte Welle an:

$$E_{xr}\downarrow = R\downarrow \cdot \exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right] \tag{115}$$

$$H_{yr}\downarrow = -\frac{R\downarrow}{Z}\cos\vartheta\,\exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right] \tag{116}$$

$$H_{zr}\downarrow = -\frac{R\downarrow}{Z}\sin\vartheta\,\exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right]. \tag{117}$$

Im oberen, dem Epstein-Medium, haben wir ausschließlich die einer auslaufenden Welle entsprechende, bei $z = +\infty$ ($\zeta = -\infty$) konvergierende Welle; sie sei gekennzeichnet durch den Faktor D, der sich auch auf E_x bezieht.

$$\begin{aligned} E_{xd}\uparrow = D\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-\zeta)(-\zeta)^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\alpha, \alpha+1-\gamma; \alpha+1-\beta; \frac{1}{\zeta}\right) \\ \times \exp\left[jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\,y\sin\vartheta\right]. \end{aligned} \tag{118}$$

Mit $\frac{\partial}{\partial z} = \varkappa\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}$ wird

$$H_{yd}\uparrow = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu}\,\varkappa\zeta\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\,E_{xd}\uparrow \tag{119}$$

$$H_{zd}\uparrow = -\frac{\sin\vartheta}{Z(z_0)}\,E_{xd}\uparrow \quad \text{wo}\, Z(z_0) = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\,\varepsilon(z_0)}}. \tag{120}$$

In der Trennfläche $z = z_0$ muß E_x und H_y stetig übergehen:

$$E_x \text{ oben} = E_x \text{ unten}: \tag{121}$$

$$\begin{aligned} &\exp\left[jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(z_0\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right] \\ &\quad + R\exp\left[jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z_0\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right] \\ &\quad = D\left\{e^{j\pi\alpha}\,\zeta_0^{\frac{\gamma-1-2\alpha}{2}}(1-\zeta_0)\,{}_2F_1(\alpha, \alpha+1-\gamma; \alpha+1-\beta; \zeta_0^{-1})\right\} \\ &\quad \times \exp\left[jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\,y\sin\vartheta\right]. \end{aligned} \tag{122}$$

Hier fällt der Faktor $\exp\left[jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\,y\sin\vartheta\right]$ heraus. Die 2. Gleichung für R und D wird:

(123) $$H_y \text{ oben} = H_y \text{ unten:}$$

(124) $$\frac{1}{Z} \cos \vartheta \exp [j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, z_0 \cos \vartheta] - \frac{R}{Z} \cos \vartheta \exp [-j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, z_0 \cos \vartheta]$$
$$= -\frac{\varkappa e^{\varkappa z_0}}{j \omega \mu_0 \mu} D \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{\right\}(122)\Big|_{z=z_0},$$

wo $\left\{\right\}$ (122) den Ausdruck in diesen Klammern aus Gl. 122 bedeutet.

Dies sind zwei Gleichungen für R und D, die in bekannter Weise mit Determinanten gelöst werden können:

Wenn Δ_1, Δ_2 und Δ in üblicher Form die Determinanten der Cramerschen Regel bedeuten, so haben wir

(125) $$R = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad D = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \text{mit}$$

(126) $$\Delta = \exp[-j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, z_0 \cos \vartheta] \left[-\frac{\varkappa e^{\varkappa z_0}}{j\omega\mu_0\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{\right\}(122)\Big|_{z=z_0} + \frac{\cos \vartheta}{Z(z_0)} \left\{\right\}(122)\Big|_{z=z_0}\right]$$

(127) $$\Delta_1 = \exp [j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, z_0 \cos \vartheta] \left[+\frac{\varkappa e^{\varkappa z_0}}{j\omega\mu_0\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{\right\}(122)\Big|_{z=z_0} + \frac{\cos \vartheta}{Z(z_0)} \left\{\right\}(122)\Big|_{z=z_0}\right]$$

(128) $$\Delta_2 = \frac{2 \cos \vartheta}{Z(z_0)}.$$

Damit haben wir den Reflexions- und Durchgangsfaktor bestimmt.

Wenn in (127) $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\cos \vartheta_0 = 0$ wird, haben wir den streifenden Einfall: Wenn wir in $\Delta_{1,2}$ und Δ die mit $\cos \vartheta_0$ multiplizierten Glieder weglassen, wird ersichtlich

(129) $R\!\downarrow\, = -1$ und (130) $D = 0$.

Dies ist ein sehr bekanntes Gesetz. Diese Rechnung gilt für $z_0 > 0$ und umfaßt auch $z_0 = 0$.

3.4.4.2. EINFALL VON UNTEN HER $z_0 < 0$.

In $z_0 < 0$ ist die nach oben auslaufende Welle durch ihre analytische Fortsetzung in Form der bei $z_0 < 0$ konvergierenden beiden Anteile anzusetzen. Die einfallende Welle ist wieder wie oben:

(111) $$E_{xe}\!\uparrow\, = \exp [j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, (z \cos \vartheta + y \sin \vartheta)$$

(112) $$H_{ye}\!\uparrow\, = \frac{1}{Z} \cos \vartheta \exp [j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, (z \cos \vartheta + y \sin \vartheta)]$$

(113) $$H_{ze}\!\uparrow\, = -\frac{1}{Z} \sin \vartheta \exp [j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, (z \cos \vartheta + y \sin \vartheta)].$$

Ebenso wird die reflektierte Welle:

(115) $$E_{xr}\downarrow = R \exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right]$$

(116) $$H_{yr}\downarrow = -\frac{R}{Z(z_0)}\cos\vartheta \exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right]$$

(117) $$H_{zr}\downarrow = -\frac{R}{Z(z_0)}\sin\vartheta \exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right].$$

In der durchlaufenden Welle haben wir nunmehr zwei Anteile:

(131) $$\begin{aligned} E_{xd}\uparrow &= D \exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, y\sin\vartheta\right] \\ &\times \Bigg\{\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-\zeta)\Bigg(\frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\zeta) \\ &- e^{j\pi(\gamma-1)}\zeta^{(1-\gamma)}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)}\,{}_2F_1(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma;2-\gamma;\zeta)\Bigg)\Bigg\}. \end{aligned}$$

Mit $\{\}$ (131) bezeichnen wir wieder den Inhalt der geschweiften Klammer in (131).

Ferner:

(132) $$H_{yd}\uparrow = \frac{D}{j\omega\mu_0\mu}\exp\left[jk_0 y\sqrt{\varepsilon(z_0)}\sin\vartheta\right]\varkappa\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\{\}(131)\Big|_{z=z_0}$$

(133) $$H_{zd}\uparrow = -\frac{D}{j\omega\mu_0\mu}jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\sin\vartheta\exp\left[jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\,y\sin\vartheta\right]\times\{\}(131)\Big|_{z=z_0}.$$

In der Gleichheit von E_x und H_y an der Trennfläche hebt sich $\exp[jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\,y\sin\vartheta]$ heraus.

Die Gleichheit von E_x bedeutet:

(134) $$\exp\left[jk_0 z_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\cos\vartheta\right] + R\exp\left[-jk_0 z_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\cos\vartheta\right] = D\{\}(131)\Big|_{z=z_0}.$$

Gleichheit von H_y:

(135) $$\begin{aligned}\frac{\cos\vartheta}{Z(z_0)}\exp\left[jk_0 z_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\cos\vartheta\right] - \frac{R}{Z(z_0)}\exp\left[jk_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z_0\cos\vartheta)\right] \\ = \frac{D}{j\omega\mu_0\mu}\varkappa\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\{\}(131)\Big|_{z=z_0}.\end{aligned}$$

Ordnen wir diese beiden Gleichungen so, daß wir ein inhomogenes System für R und D bekommen, dann können wir nach Cramer die drei Determinanten so anschreiben:

(136) $$\Delta = \exp\left[-jk_0 z_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\cos\vartheta\right]\left[\frac{\varkappa\zeta_0}{j\omega\mu_0\mu}\frac{\partial}{\partial\zeta}\{\}(131)\Big|_{z=z_0} + \frac{\cos\vartheta}{Z(z_0)}\{\}(131)\Big|_{z=z_0}\right]$$

(137) $$\Delta_1 = \exp\left[jk_0 z_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\cos\vartheta\right]\left[-\frac{\varkappa\zeta_0}{j\omega\mu_0\mu}\frac{\partial}{\partial\zeta}\{\}(131)\Big|_{z=z_0} + \frac{\cos\vartheta}{Z(z_0)}\{\}(131)\Big|_{z=z_0}\right]$$

(138) $$\Delta_2 = \frac{2\cos\vartheta}{Z(z_0)}.$$

Dann ist

$$R = \frac{\Delta_1}{\Delta}\,; \quad D = \frac{\Delta_2}{\Delta}\,. \tag{139}$$

Ebenso wie oben wird für streifenden Einfall ($\cos\vartheta = 0$) $D = 0$, $R = -1$. Wir sehen auch noch: In dem zweigliedrigen hypergeometrischen Ausdruck in (131) tritt für $z_0 \to -\infty$, $\zeta_0 \to 0$ ein Anteil als einfallende, der andere als reflektierte Welle auf. Dies sagt jedoch keineswegs, daß auch in der Umgebung von $z_0 = 0$ $\zeta = -1$ diese beiden Ausdrücke dieselbe Bedeutung haben. Unter Bezugnahme auf [26], [27] können wir feststellen, daß diese beiden Anteile Wellen innerer Reflexion enthalten. Mit $\delta \to 0$ müßte $R = 0$, $D = 1$ werden, wir überlassen diese Rechnung dem Leser. Grenzübergänge sollen später behandelt werden.

3.4.4.3. EINFALL VON OBEN HER $z_0 < 0$.

Das homogene Medium befinde sich jetzt oben, die einfallende Welle komme von oben, es sei $z_0 < 0$. Die einfallende Welle lautet:

$$E_{xe}\downarrow = \exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right] \tag{140}$$

$$H_{ye}\downarrow = -\frac{\cos\vartheta}{Z}\exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right] \tag{141}$$

$$H_{ze}\downarrow = -\frac{\sin\vartheta}{z}\exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right]. \tag{142}$$

Die reflektierte Welle lautet:

$$E_{xr}\uparrow = R\exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right] \tag{143}$$

$$H_{yr}\uparrow = R\,\frac{\cos\vartheta}{Z(z_0)}\exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right] \tag{144}$$

$$H_{zr}\uparrow = -R\,\frac{\sin\vartheta}{Z(z_0)}\exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(z\cos\vartheta + y\sin\vartheta)\right]. \tag{145}$$

Die nach unten auslaufende Welle lautet

(146)
$$E_{xd}\downarrow = D\exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,\sin\vartheta\right]\left\{\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-\zeta)\,\zeta^{1-\gamma}\,{}_2F_1(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma;\ 2-\gamma;\ \zeta)\right\}$$

(147)
$$H_{yd}\downarrow = D\exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,y\sin\vartheta\right]\frac{\varkappa\zeta}{j\omega\mu_0\mu}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\right\}\Big|_{z=z_0}(146)$$

(148)
$$H_{zd}\downarrow = -D\,\frac{\sin\vartheta}{Z(z_0)}\exp\left[jk_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,y\sin\vartheta\right]\left\{\right\}\Big|_{z=z_0}(146).$$

$\left\{\right\}\Big|_{z=z_0}(146)$ bedeutet den Inhalt der geschweiften Klammer in (146) für $z = z_0$.

Die Stetigkeit von E_x und H_y in z_0 bringt die beiden Gleichungen

$$(149)\qquad R\,\exp\,[j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, z_0 \cos\vartheta] + D\left\{\right\}_{z=z_0}(146) = -\exp\,[j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z_0 \cos\vartheta)]$$

$$(150)\qquad R\,\frac{\cos\vartheta}{Z(z_0)}\exp\,[j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, z_0 \cos\vartheta] - \frac{D}{j\omega\mu_0\mu}\,\varkappa\,\zeta_0\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\right\}_{z=z_0}(146)$$
$$= +\frac{\cos\vartheta}{Z(z_0)}\exp\,[j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\,(-z_0 \cos\vartheta)].$$

Daraus ergeben sich die drei Cramerschen Determinanten:

$$(151)\qquad \Delta = \exp\,[j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, z_0 \cos\vartheta]\left[-\frac{\varkappa\zeta_0}{j\omega\mu_0\mu}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\right\}_{z=z_0}(146) - \frac{\cos\vartheta}{Z(z_0)}\left\{\right\}_{z=z_0}(146)\right]$$

$$(152)\qquad \Delta_1 = \exp\,[-j k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)}\, z_0 \cos\vartheta]\left[\frac{\varkappa\zeta_0}{j\omega\mu_0\mu}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\right\}_{z=z_0}(146) - \frac{\cos\vartheta}{Z(z_0)}\left\{\right\}_{z=z_0}(146)\right]$$

$$(153)\qquad \Delta_2 = \frac{2\cos\vartheta}{Z(z_0)},$$

dann haben wir wieder:

$$(154)\qquad R = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad D = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Für streifenden Einfall wird

$$(155)\qquad R = -1,\quad D = 0.$$

(Abgesehen von einem Phasenfaktor, der von z_0 abhängt und der in $z_0 = 0$ den Wert 1 hat).

3.5. Grenzübergänge im Falle „ebener“ Wellen.

Wenn $\delta \to 0$ geht, wird das Epstein-Medium homogen, wenn $\varkappa \to \infty$ geht, wird die inhomogene Schicht sehr dünn, sie führt in der Grenze zum unstetigen Übergang zwischen $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = 1 + \delta$.

Dann müssen für $\delta \to 0$ überall die Wellenausdrücke in die ebenen Wellen des homogenen Raumes übergehen, die Reflexionsfaktoren Null und die Übertragungsfaktoren 1 werden.

Für $\varkappa \to \infty$ müssen die Fresnelschen Reflexionsformeln an der ebenen Oberfläche eines anderen Dielektrikums herauskommen.

3.5.1. *Der Grenzübergang zum homogenen Medium.*

Für $\delta \to 0$ muß, wie oben bemerkt, für unsere Wellen der Ausdruck $\exp\,[j k_0(c_1 y + c_2 z)]$ mit $c_1^2 + c_2^2 = 1$ herauskommen; die Reflexionsfaktoren müssen verschwinden und die Übertragungsfaktoren 1 werden. Dies stellt dann zugleich eine Kontrolle für die Richtigkeit unserer Feldausdrücke dar.

Es ist überhaupt nützlich, bei der Untersuchung eines komplizierten Problems den Grenzübergang zu einem einfacheren durchzuführen, dessen Lösung bekannt ist, um die Lösung des komplizierteren Problems zu prüfen. Im vorliegenden Fall wollen wir uns auf den senkrechten Einfall beschränken.

Zunächst geben wir die Werte der Parameter α, β, γ bei senkrechtem Einfall für $\delta \to 0$ an:

aus (50) und (71) folgt mit $\sin\vartheta \to 0$, $\delta \to 0$:

$$\alpha = 1,\ \beta = 1 + 2j\,\frac{k_0}{\varkappa},\quad \gamma = 1 + 2j\,\frac{k_0}{\varkappa} = \beta. \tag{156}$$

Wegen
$$\frac{d\zeta}{dz} = \varkappa\zeta$$

hatten wir bis auf einen uns hier nicht interessierenden konstanten Faktor

$$U_1 = \zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,u_1(\alpha,\beta;\gamma;\zeta). \tag{157}$$

Dies wird mit (68), (156)

$$U_1 \to e^{jk_0z}\,(1+e^{\varkappa z})\;{}_2F_1\left(1,\,1+2j\,\frac{k_0}{\varkappa}\,;\;1+2j\,\frac{k_0}{\varkappa}\,;\;-e^{\varkappa z}\right). \tag{158}$$

Nach [18] S. 247 wird daraus

$$U_1 \to e^{jk_0z}. \tag{159}$$

Dies ist die mit $\exp[-j\omega t]$ nach oben laufende Welle im homogenen Medium mit k_0.

Wir sehen hier noch etwas, was vom physikalischen Standpunkt aus interessant ist:

Der Wellencharakter unserer Funktion U_j steckt in $\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}$. Die anderen Faktoren einschließlich der hypergeometrischen Funktion liefern Verzerrungen, die durch das inhomogene Medium verursacht sind.

Daß für $\delta \to 0$ der Reflexionsfaktor verschwindet, sehen wir aus (41): der Reflexionsfaktor R hat im Nenner den Faktor $\Gamma(\gamma-\beta)$. Da für $\delta \to 0$ nach (156) $\gamma-\beta \to 0$ geht, so wird dieser Γ-Faktor im Nenner unendlich und wir erhalten $R \to 0$. $D \to 1$ folgt unmittelbar aus (95) wegen (156).

3.5.2. DER GRENZÜBERGANG $\varkappa \to \infty$ (UNSTETIGER ÜBERGANG VON $\varepsilon = 1$ ZU $\varepsilon = 1 + \delta$) ENTWICKLUNG DER REFLEXIONS- UND ÜBERTRAGUNGS-KOEFFIZIENTEN NACH POTENZEN VON $\frac{1}{\varkappa}$ (DÜNNE ÜBERGANGS-SCHICHT).

Wenn $\varkappa \to \infty$, wird die Übergangsschicht $\frac{2}{\varkappa} > z > -\frac{2}{\varkappa}$ unendlich dünn und wir bekommen einen unstetigen Übergang zwischen $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = 1 + \delta$. Dann müssen unsere früher berechneten Reflexions- und Übertragungsfaktoren in die bekannten Werte übergehen, die für die Fresnelsche Reflexion an ebenen Medien gelten. Da dann $\frac{1}{\varkappa} \to 0$ geht, so liegt es nahe, eine Entwicklung nach $\frac{1}{\varkappa}$ anzugeben; d. h. die vorliegende Rechnung zeigt für die Reflexion ebener Wellen die Möglichkeit, diesen Vorgang nicht nur an einem Sprung von ε, sondern auch für „sehr dünne Übergangsschichten“ zu studieren in Form einer asymptotischen Darstellung nach $\frac{1}{\varkappa}$ $(\varkappa \to \infty)$. Wir gehen in dieser Entwicklung nur bis zum Glied 1. Ordnung in $\frac{1}{\varkappa}$, die Fortsetzung zu höheren Ordnungen erfordert nur lästige Rechenarbeit. Wegen $\frac{1}{\varkappa} \to 0$ benötigen wir eine Reihe von Entwicklungen der Γ-Funktion, die wir im Anhang A_2 vorfinden.

Zunächst schreiben wir die Reflexions- und Übertragungsfaktoren aus den Gleichungen (93) (95) (96) (97) nochmals an:

$$R\downarrow = -\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)}\,; \tag{93}$$

$$D\uparrow = \frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(1+\alpha-\beta)}\,; \tag{95}$$

$$R\uparrow = \frac{\Gamma(\beta-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta+1-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}\,; \tag{96}$$

$$D\downarrow = \frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}\,. \tag{97}$$

Die Werte von α, β, γ sind in den Gleichungen (71) gegeben, (72) enthält einige häufig auftretende Kombinationen. Die zugehörigen Entwicklungen für große $\varkappa$, kleine $\frac{1}{\varkappa}$ finden wir wie schon erwähnt im Anhang A_2. Wir führen noch die Bezeichnung ein:

$$\frac{1}{\varkappa} = \sigma. \tag{160}$$

Die im Anhang A_2 gegebenen Formeln schreiben wir nun in folgender Weise, die die Koeffizienten $c_1(\gamma)$, $c_2(\gamma)$, $c_{-1}(1-\beta)$ usw. definiert:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\gamma) &= 1+\sigma c_1(\gamma)+\sigma^2 c_2(\gamma)+\cdots\\
\Gamma(1-\beta) &= \frac{c_{-1}(1-\beta)}{\sigma}+c_0(1-\beta)+\sigma c_1(1-\beta)+\sigma^2 c_2(1-\beta)\\
\Gamma(1+\alpha-\gamma) &= 1+\sigma c_1(1+\alpha-\gamma)+\sigma^2 c_2(1+\alpha-\gamma)\ldots\\
\Gamma(2-\gamma) &= 1+\sigma c_1(2-\gamma)+\sigma^2 c_2(2-\gamma)\ldots\\
\Gamma(\gamma-\beta) &= \frac{c_{-1}(\gamma-\beta)}{\sigma}+c_0(\gamma-\beta)+\sigma c_1(\gamma-\beta)\ldots\\
\Gamma(\alpha) &= 1+\sigma c_1(\alpha)+\sigma^2 c_2(\alpha)+\cdots\\
\Gamma(1-\gamma) &= \frac{c_{-1}(1-\gamma)}{\sigma}+c_0(1-\gamma)+\sigma c_1(1-\gamma)\ldots\\
\Gamma(1+\alpha-\beta) &= 1+\sigma c_1(1+\alpha-\beta)+\sigma^2 c_2(1+\alpha-\beta)\ldots
\end{aligned} \tag{161}$$

wobei, wie bereits bemerkt, die $c_i(\ )$ aus A_2 direkt zu entnehmen sind. Dann wird nach einer trivialen Rechnung:

(162)
$$R\downarrow \; = -\frac{c_{-1}\,(1-\beta)\left(1+\sigma\,\dfrac{(c_0\,(1-\beta)+c_{-1}\,(1-\beta)\,c_1\,(\gamma))}{c_{-1}\,(1-\beta}\right)}{c_{-1}\,(\gamma-\beta)\left(1+\sigma\,\dfrac{(c_0\,(\gamma\ \ \beta)+c_{-1}\,(\gamma-\beta)\,c_1\,(2-\gamma))}{c_{-1}\,(\gamma-\beta)}\right)}\,.$$

Dies gilt für den Einfall von unten her, wo $\varepsilon\,(z_0) = 1+\delta$. Für diesen Fall sind die Formeln aus A_2 zu entnehmen, wobei Glieder mit σ^2 und höhere vernachlässigt wurden. Mittels der bekannten Entwicklung von $\frac{1}{1-x}$ finden wir sofort:

(163)
$$R\downarrow \; = -\frac{c_{-1}\,(1-\beta)}{c_{-1}\,(\gamma-\beta)}\left(1+\sigma\left[\frac{c_0(1-\beta)+c_{-1}\,(1-\beta)\,c_1(\gamma)}{c_{-1}\,(1-\beta)} - \frac{c_0(\gamma-\beta)+c_{-1}\,(\gamma-\beta)\,c_1(2-\gamma)}{c_{-1}(\gamma-\beta)}\right]\right).$$

Der Faktor vor der Klammer muß mit dem bekannten Fresnelschen Reflexionsfaktor übereinstimmen, der Koeffizient von σ stellt eine Korrektur für stetigen Übergang in sehr dünner Schicht dar.

Wir wollen den Faktor vor der Klammer noch überprüfen. Der Fresnelsche Reflexionskoeffizient lautet in diesem Falle:

(164)
$$R\downarrow \; = \frac{\sqrt{1+\delta}\,\cos\vartheta_0-\cos\vartheta_1}{\sqrt{1+\delta}\,\cos\vartheta_0+\cos\vartheta_1}$$

ϑ_0 = Einfallswinkel unten
ϑ_1 = Einfallswinkel oben.

Nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz ist in diesem Falle

(165)
$$\sqrt{1+\delta}\,\sin\vartheta_0 = \sin\vartheta_1,$$

also

(166)
$$\cos\vartheta_1 = \sqrt{1-\sin^2\vartheta_1} = \sqrt{1-(1+\delta)\,\sin^2\vartheta_0} = \sqrt{\cos^2\vartheta_0-\delta\,\sin^2\vartheta_0}.$$

Wenn wir aus Anhang A_2 die beiden Größen $c_{-1}(1-\beta)$ und $c_{-1}(\gamma-\beta)$ entnehmen, so finden wir:

(167)
$$R\downarrow \; = -\left(\frac{\sqrt{\cos^2\vartheta_0-\delta\,\sin^2\vartheta_0}-\sqrt{1+\delta}\,\cos\vartheta_0}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0-\delta\,\sin^2\vartheta_0}+\sqrt{1+\delta}\,\cos\vartheta_0}\right).$$

Dies ist aber gerade der richtige Wert.

Jetzt berechnen wir $D\uparrow$ nach Gl. (95); wir finden nach leichter Rechnung analog zu unserer Ermittlung von R

(168)
$$D\uparrow = \frac{c_{-1}(1-\beta)}{c_{-1}(1-\gamma)}\left[1+\sigma\left(\frac{c_0(1-\beta)+c_{-1}(1-\beta)\,c_1(1+\alpha-\gamma)}{c_{-1}(1-\beta)} - \frac{c_0(1-\gamma)+c_{-1}(1-\gamma)\,c_1(1+\alpha-\beta)}{c_{-1}(1-\gamma)}\right)\right].$$

Entnehmen wir jetzt aus Anhang A_2 die Größen $c_{-1}(1-\beta)$ und $c_{-1}(1-\gamma)$, so finden wir für $\sigma = 0$

(169)
$$D\uparrow = \frac{2\sqrt{1+\delta}\,\cos\vartheta_0}{\sqrt{1+\delta}\,\cos\vartheta_0+\sqrt{\cos^2\vartheta_0-\delta\,\sin^2\vartheta_0}}\,.$$

Dies ist der richtige Wert des Fresnelschen Übertragungskoeffizienten.

Dies waren Reflexions- und Übertragungskoeffizienten für den Welleneinfall von unten her. Für von oben einfallende Wellen haben wir zu beachten, daß $\varepsilon(z_0) = 1$ ist. Hier haben wir aus A_2 die Formeln zu entnehmen, die für diesen Fall gelten. Dann erhalten wir wie oben:

$$(170) \qquad R\uparrow = \frac{c_{-1}(\beta-\alpha)\, c_{-1}(1-\beta)}{c_{-1}(\alpha-\beta)\, c_{-1}(1-\alpha)} \left[1 + \sigma \left(\frac{c_0(\beta-\alpha)\, c_{-1}(1-\beta) + c_0(1-\beta)\, c_{-1}(\beta-\alpha)}{c_{-1}(\beta-\alpha)\, c_{-1}(1-\beta)} \right.\right.$$
$$+ \frac{c_{-1}(\beta-\alpha)\, c_{-1}(1-\beta)\, c_1(1+\alpha-\gamma)}{c_{-1}(\beta-\alpha)\, c_1(1-\beta)} - \frac{c_0(\alpha-\beta)\, c_{-1}(1-\alpha) + c_0(1-\alpha)\, c_{-1}(\alpha-\beta)}{c_{-1}(\alpha-\beta)\, c_{-1}(1-\alpha)}$$
$$\left.\left. - \frac{c_{-1}(\alpha-\beta)\, c_{-1}(1-\alpha)\, c_1(1+\beta-\gamma)}{c_{-1}(\alpha-\beta)\, c_{-1}(1-\alpha)} \right)\right].$$

Der Faktor vor der eckigen Klammer muß wieder in den Fresnelschen Reflexionskoeffizienten übergehen, wenn $\varkappa \to \infty$. Setzen wir aus dem 2. Teil von Anhang 2 $(\varepsilon(z_0) = 1)$ die Werte ein, so finden wir:

$$(171) \qquad \frac{c_{-1}(\beta-\alpha)\, c_{-1}(1-\beta)}{c_{-1}(\alpha-\beta)\, c_{-1}(1-\alpha)} = \frac{\cos\vartheta_0 - \sqrt{\cos^2\vartheta_0 + \delta}}{\cos\vartheta_0 + \sqrt{\cos^2\vartheta_0 + \delta}}.$$

Dies ist der Fresnelsche Koeffizient. Es fehlt noch die Entwicklung von D: Wir bekommen ebenso wie oben:

$$(172)$$
$$D\downarrow = \frac{c_{-1}(1-\beta)}{c_{-1}(\alpha-\beta)} \left[1 + \sigma \left(\frac{c_0(1-\beta) + c_{-1}(1-\beta)\, c_1(1+\alpha-\gamma)}{c_{-1}(1-\beta)} - \frac{c_0(\alpha-\beta) + c_{-1}(\alpha-\beta)\, c_1(2-\gamma)}{c_{-1}(\alpha-\beta)} \right)\right].$$

Für $\varkappa \to \infty$, $\sigma \to 0$ erhalten wir den Faktor vor der Klammer:

$$(173) \qquad D\downarrow = \frac{2\cos\vartheta_0}{\cos\vartheta_0 + \sqrt{\cos^2\vartheta_0 + \delta}},$$

den richtigen Wert für unstetigen Übergang.

4. DER STRAHLENDE MAGNETISCHE DIPOL.

Wir hatten uns bisher mit Wellen befaßt, die im homogenen Medium in ebene Wellen übergehen, sämtlich mit horizontalpolarisiertem $\vec{E}$. Der Grund für diese Wahl der Polarisation ist bekanntlich der, daß für vertikal polarisiertes $\vec{E}$ das Problem erheblich komplizierter wird. Aus demselben Grunde wählen wir hier den vertikalen magnetischen Dipol, der durch eine horizontal liegende Drahtschleife mit vertikaler Achse realisiert wird. Für einen solchen Dipol liegt das $\vec{E}$-Feld in horizontalen Kreisen um die genannte Achse, das $\vec{H}$-Feld in Meridianebenen.

Nach Sommerfeld und Weyl läßt sich im homogenen Medium die Strahlung eines solchen Dipols aus ebenen Wellen in Form eines Integrals aufbauen; man kann sie aber, was auf Lamb und Sommerfeld zurückgeht, auch aus Zylinderwellen aufbauen, wobei die Abhängigkeit von z als Exponentialfunktion eingeht. Wir werden hier dem zweiten Weg folgen, wobei dann die Abhängigkeit von z analog aus unseren Epsteinlösungen aufzubauen ist.

4.1. Die Aufstellung der Wellengleichung für den Hertzschen Vektor.

Wir werden hier, analog zum Hertzschen Vektor $\vec{\Pi}$ des elektrischen Dipols einen Hertzschen Vektor $\vec{\Psi}$ einführen, aus dem wir die Feldkomponenten durch Differentiation gewinnen können.

Mit der Zeitfunktion $\exp[-j\omega t]$ gehen wir aus den Maxwellschen Gleichungen:

$$\text{rot}\,\vec{H} = -j\omega\varepsilon_0\varepsilon\vec{E} \tag{174}$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = j\omega\mu_0\mu\vec{H} \tag{175}$$

$$\text{div}\,\varepsilon_0\varepsilon(z)\,\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon(z)\,\text{div}\,\vec{E} + \varepsilon_0(\text{grad}\,\varepsilon(z), \vec{E}) = 0 \tag{176}$$

$$\text{div}\,\mu_0\mu\vec{H} = 0. \tag{177}$$

Wir gehen nun aus von dem Felde des magnetischen Dipols, wo in Zylinderkoordinaten

$$E_r \equiv 0, \quad E_z \equiv 0 \quad \text{nur} \quad E_\varphi \not\equiv 0 \tag{178}$$

$$H_\varphi \equiv 0, \quad H_r \not\equiv 0, \quad H_z \not\equiv 0. \tag{179}$$

Wir führen einen Hertzschen Vektor $\vec{\Psi}$ ein, dessen Komponenten in r, φ, z Koordinaten sich schreiben:

$$\vec{\Psi} = (0, 0, \Psi_z) \tag{180}$$

d. h.

$$\Psi_r \equiv 0, \quad \Psi_\varphi \equiv 0 \quad \frown \quad \Psi_x \equiv 0, \quad \Psi_y \equiv 0, \quad \Psi_z \not\equiv 0. \tag{181}$$

Ferner haben wir in unserem Epstein-Medium zu beachten, daß grad $\varepsilon(z)$ nur eine z-Komponente hat.

$$\overrightarrow{\text{grad}\,\varepsilon}(z) = \left(0, 0, \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right). \tag{182}$$

Wir definieren einen Vektor $\vec{\Psi}$ nach (180) durch

$$\vec{E} = -j\omega\,\text{rot}\,\vec{\Psi}. \tag{183}$$

Dann wird

$$\text{rot}\,\vec{E} = -j\omega\,\text{rot rot}\,\vec{\Psi} = -j\omega(\text{grad div}\,\vec{\Psi} - \Delta\vec{\Psi}). \tag{184}$$

Mit (175) ist dann:

$$\mu_0\mu\vec{H} = \Delta\vec{\Psi} - \text{grad div}\,\vec{\Psi}. \tag{185}$$

Nach (174) ist dann:

(186) $$\operatorname{rot} \vec{H} = -j\omega\varepsilon_0\varepsilon\vec{E} = -\omega^2\varepsilon_0\varepsilon(z) \operatorname{rot} \vec{\Psi}.$$

Nun ist aber

(187) $$\operatorname{rot} \varepsilon_0\varepsilon(z)\vec{\Psi} = \varepsilon_0\varepsilon(z) \operatorname{rot} \vec{\Psi} + [\operatorname{grad} \varepsilon_0\varepsilon(z) \times \vec{\Psi}].$$

Wegen (180) (181) (182)

(188) $$[\overrightarrow{\operatorname{grad} \varepsilon_0\varepsilon(z)} \times \vec{\Psi}] \equiv 0$$

und wir haben aus (186)

(189) $$\vec{H} = -\omega^2\varepsilon_0\varepsilon(z)\,(\vec{\Psi} - \operatorname{grad} \varphi),$$

wo φ eine skalare Funktion ist.

Gehen wir nun auf (174) und (175) zurück, so finden wir aus (184) und (189)

(190) $$\mu_0\mu\vec{H} = -\omega^2\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon(z)\,(\vec{\Psi} - \operatorname{grad} \varphi) = \Delta\vec{\Psi} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Psi}.$$

Die noch willkürliche Funktion φ unterwerfen wir in üblicher Weise der Bedingung:

(191) $$\omega^2\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon(z)\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \varphi = -\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Psi}$$

und erhalten damit:

(192) $$\Delta\vec{\Psi} + \omega^2\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon(z)\,\vec{\Psi} = 0.$$

Zu der in (183) gegebenen Definition von $\vec{\Psi}$ geben wir noch die Berechnung der auftretenden Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$: Es ist

(193) $$(\operatorname{rot} \vec{\Psi})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi}$$

(194) $$(\operatorname{rot} \vec{\Psi})_\varphi = \frac{\partial \Psi_z}{\partial r}$$

(195) $$(\operatorname{rot} \vec{\Psi})_z = 0.$$

Damit wird

(196) $$E_r = -j\omega\frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi} \equiv 0.$$

Wir bemerken hier, daß wir für unseren Hertzschen Vektor des magnetischen Dipols eine zylindersymmetrische Lösung wählen, die nicht von φ abhängt, was wir in (196) mit vorwegnehmen. Wir haben weiter

(197) $$E_z = 0 \quad \text{nach (195)}$$

(198) $$E_\varphi = -j\omega\frac{\partial \Psi_z}{\partial r}.$$

Wir wenden uns jetzt den Komponenten von $\vec{H}$ zu: mit (185) und (192) erhalten wir:

$$\mu_0 \mu \vec{H} = -(k^2 \vec{\Psi} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Psi}). \tag{199}$$

Wegen (180) (181) ist

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} \operatorname{div}} \vec{\Psi} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}. \tag{200}$$

Dann wird:

$$H_r = -\frac{1}{\mu_0 \mu} (\overrightarrow{\operatorname{grad} \operatorname{div}} \Psi)_r = -\frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z \, \partial r}. \tag{201}$$

$$H_\varphi = 0 = -\frac{1}{\mu_0 \mu} (\overrightarrow{\operatorname{grad} \operatorname{div}} \vec{\Psi})_\varphi \tag{202}$$

$$H_z = -\frac{1}{\mu_0 \mu} \left((\overrightarrow{\operatorname{grad} \operatorname{div}} \vec{\Psi})_z + k^2 \Psi_z \right), \quad \text{wo } k^2 = k_0^2 \varepsilon(z). \tag{203}$$

4.2. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung durch Trennung der Variablen.

Die Wellengleichung (192) kann durch Separierung der Variablen gelöst werden. Wir erhalten daraus die Elementarlösungen, aus denen wir mittels Integration die Gesamtlösung unseres Problems aufbauen können. Wir schreiben (192) in folgender Form:

$$\Delta \Psi_z + k^2(z) \Psi_z = 0 \tag{204}$$

$$k^2(z) = k_0^2 \varepsilon(z) = \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon(z). \tag{205}$$

Wir werden sehen, daß es zweckmäßig ist, dies so zu schreiben:

Für irgendein $z_0 (-\infty < z_0 < +\infty)$ (z_0 wird später die z-Koordinate des Senders sein) sei

$$k_0^2 \varepsilon(z) = k_0^2 \varepsilon(z_0) + f_1(z_1, z_0), \tag{206}$$

wo

$$f_1(z, z_0) = 0 \text{ in } z = z_0. \tag{207}$$

Nun schreiben wir (204) in Zylinderkoordinaten an und spezialisieren uns erst später auf die Unabhängigkeit vom Azimutwinkel

$$\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon(z) \Psi_z = 0. \tag{208}$$

Wir werden dies nun in bekannter Weise aufspalten, indem wir schreiben:

$$\Psi_z = {}^r\Psi_z \, {}^\varphi\Psi_z \, {}^z\Psi_z, \tag{209}$$

wo ${}^r\Psi_z$ nur von r, ${}^\varphi\Psi_z$ nur von φ, ${}^z\Psi_z$ nur von z abhängen möge.

Dividieren wir nun die Gleichung (208) durch (209), so können wir gerade Differentiationszeichen wählen und schreiben:

$$(210)\qquad \frac{1}{{}^r\Psi_z}\,\frac{d^2\,\Psi_z}{dr^2} + \frac{1}{r\,{}^r\Psi_z}\,\frac{d\,{}^r\Psi_z}{dr} + \frac{1}{r^2\,{}^\varphi\Psi_z}\,\frac{d^2\,{}^\varphi\Psi_z}{d\varphi^2} + \frac{1}{{}^z\Psi_z}\,\frac{d^2\,{}^z\Psi_z}{dz^2} + k_0^2\,\varepsilon(z) = 0.$$

Ferner schreiben wir in (206)

$$(211)\qquad k_0^2\,\varepsilon(z_0) = k_0^2\,\varepsilon(z_0)\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta),$$

wo ϑ in z_0 den Winkel der etwaigen Wellennormale mit der z-Achse darstellt. Aus (210) nehmen wir den z-abhängien Anteil heraus und schreiben mit (206)

$$(212)\qquad \frac{1}{{}^z\Psi_z}\,\frac{d^2\,{}^z\Psi_z}{dz^2} + f_1(z, z_0) + k_0^2\,\varepsilon(z_0)\cos^2\vartheta = 0.$$

Dann bleibt für den von r und φ abhängigen Anteil übrig:

$$(213)\qquad \frac{1}{{}^r\Psi_z}\,\frac{d^2\,{}^r\Psi_z}{dr^2} + \frac{1}{r\,{}^r\Psi_z}\,\frac{d\,{}^r\Psi_z}{dr} + \frac{1}{r^2\,{}^\varphi\Psi_z}\,\frac{d^2\,{}^\varphi\Psi_z}{d\varphi^2} + k_0^2\,\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta = 0.$$

Wir multiplizieren (213) mit r^2 und erhalten:

$$(214)\qquad \frac{r^2}{{}^r\Psi_z}\,\frac{d^2\,{}^r\Psi_z}{dr^2} + \frac{r}{{}^r\Psi_z}\,\frac{d\,{}^r\Psi_z}{dr} + \frac{1}{{}^\varphi\Psi_z}\,\frac{d^2\,{}^\varphi\Psi_z}{d\varphi^2} + r^2 k_0^2\,\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta = 0.$$

Dies ist eine Summe von einem Anteil, der nur von r und einem, der nur von φ abhängt, die also für sich konstant sein müssen.

Wir setzen:

$$(215)\qquad \frac{1}{{}^\varphi\Psi_z}\,\frac{d^2\,{}^\varphi\Psi_z}{d\varphi^2} = -\eta^2$$

und erhalten:

$$(216)\qquad \frac{d^2\,{}^\varphi\Psi_z}{d\varphi^2} + \eta^2\,{}^\varphi\Psi_z = 0.$$

Dann bleibt für ${}^r\Psi_z$, wenn wir diesen Anteil wieder durch r^2 dividieren:

$$(217)\qquad \frac{1}{{}^r\Psi_z}\,\frac{d^2\,{}^r\Psi_z}{dr^2} + \frac{1}{r\,{}^r\Psi_z}\,\frac{d\,{}^r\Psi_z}{dr} - \frac{\eta^2}{r^2} + k_0^2\,\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta = 0.$$

Dies ist eine Gleichung für ${}^r\Psi_z$.

Zunächst können wir die Lösungen von (216) und (217) direkt anschreiben.

$$(218)\qquad {}^\varphi\Psi_z = e^{\pm j\eta\varphi}$$

$$(219)\qquad {}^r\Psi_z = Z_\eta\left(r\sqrt{k_0^2\,\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta}\right).$$

wo Z_η eine allgemeine Zylinderfunktion vom Index η bedeutet. Entsprechend der Zylindersymmetrie des Problems kommt für uns nur der Wert $\eta = 0$ in Frage, wir haben also:

$$(220)\qquad {}^\varphi\Psi_z = \text{const},\quad {}^r\Psi_z = Z_0\left(r\sqrt{k_0^2\,\varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta}\right).$$

Nun wenden wir uns ${}^z\Psi_z$ zu, das uns die Epsteinlösung liefern wird:
Wir hatten in (212)

$$\frac{d^2\, {}^z\Psi_z}{d z^2} + (k_0^2\, \varepsilon(z_0) \cos^2 \vartheta + f_1(z_1\, z_0)\, {}^z\Psi_z = 0. \tag{221}$$

Wegen (206) und (211) ist aber:

$$k_0^2\, \varepsilon(z_0) \cos^2 \vartheta + f_1(z_1\, z_0) = k_0^2\, \varepsilon(z) - k_0^2\, \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta. \tag{222}$$

Dies ist das um die Konstante $k_0^2 \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta$ verringerte $k_0^2 \varepsilon(z)$ der Epsteinschicht. Damit können wir für ${}^z\Psi_z$ eine zu diesem Wert des Faktors von ${}^z\Psi_z$ in (221) passende Epsteinlösung angeben.

Wir setzen:

$$k_0 \sqrt{\varepsilon(z_0)} \sin \vartheta = \lambda. \tag{223}$$

Dieses λ wird dann in die Parameter der hypergeometrischen Funktionen eingehen. Für ${}^z\Psi_z$ werden wir gleich einen formalen Ausdruck gewinnen. Wir gehen in der vorliegenden Arbeit aus von:

$$k_0^2\, \varepsilon(z) = k_0^2 \left(1 + \frac{\delta}{1 + e^{\varkappa z}}\right), \quad k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0\, \mu_0\, \mu; \tag{224}$$

mit

$$\zeta = -e^{\varkappa z} \tag{225}$$

bekommen wir aus (22):

$${}^z\Psi_z(z) = \zeta^{\frac{\gamma-1}{2}} (1-\zeta)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}\; u_i(\alpha, \beta; \gamma; \zeta), \tag{226}$$

wo

$$\alpha = \alpha(\lambda), \quad \beta = \beta(\lambda), \quad \gamma = \gamma(\lambda). \tag{227}$$

$u_i(\alpha, \beta; \gamma; \zeta)$ bedeutet eine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung oder ihre analytische Fortsetzung, Wir müssen uns jetzt noch mit den Werten von α, β, γ befassen.

4.2.1. *Ermittlung der Werte von α, β, γ als Funktionen von λ und Vergleich mit* 3.3.

Wir hatten

$$\frac{d^2\, {}^z\Psi_z}{d z^2} + (k_0^2\, \varepsilon(z_0) \cos^2 \vartheta + f_1(z_1\, z_0))\, {}^z\Psi_z = 0. \tag{221}$$

Dabei war nach (206)

$$f_1(z_1\, z_0) = k_0^2\, \varepsilon(z) - k_0^2\, \varepsilon(z_0). \tag{228}$$

Also wird

$$\begin{aligned} & k_0^2\, \varepsilon(z_0) \cos^2 \vartheta + f_1(z_1\, z_0) \\ & \quad = k_0^2(\varepsilon(z) - \varepsilon(z_0)) + k_0^2\, \varepsilon(z_0) \cos^2 \vartheta \\ & \quad = k_0^2\, \varepsilon(z) - k_0^2\, \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta = k_0^2 \varepsilon(z) - \lambda^2. \end{aligned} \tag{229}$$

Dann wird aus (221)

$$\frac{d^2\,{}^z\Psi_z}{dz^2} + \left[k_0^2\left(1 + \frac{\delta}{1 + e^{\varkappa z}}\right) - \lambda^2\right]{}^z\Psi_z = 0. \tag{230}$$

Wir setzen noch

$$k_0^2\left(1 + \frac{\delta}{1 + e^{\varkappa z}}\right) - \lambda^2 = k_0^2\,\varepsilon_f(z), \tag{231}$$

wo $\varepsilon_f(z)$ ein fiktives $\varepsilon(z)$ bedeute.

Dann subtrahiert sich von $k_0^2\,\varepsilon(z)$, das bisher auftrat, die Größe λ^2 und wir erhalten nach trivialer Rechnung (vgl. (45) (46) (47) (48) (71)):

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)} - \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} \tag{232}$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)} + \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} \tag{233}$$

$$\gamma = 1 + \frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}. \tag{234}$$

Setzen wir den in (223) definierten Wert von λ ein, so wird:

$$\alpha = 1 + j\,\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{(1+\delta) - \varepsilon(z_0)\,\sin^2\vartheta} - j\,\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{1 - \varepsilon(z_0)\,\sin^2\vartheta} \tag{235}$$

$$\beta = 1 + j\,\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{(1+\delta) - \varepsilon(z_0)\,\sin^2\vartheta} + j\,\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{1 - \varepsilon(z_0)\,\sin^2\vartheta} \tag{236}$$

$$\gamma = 1 + 2j\,\frac{k_0}{\varkappa}\sqrt{(1+\delta) - \varepsilon(z_0)\,\sin^2\vartheta}. \tag{237}$$

Damit haben wir die Werte der Parameter angegeben und ihre Übereinstimmung mit den früheren gezeigt.

4.3. Die Integraldarstellung der Strahlung des magnetischen Dipols.

4.3.1. *Das Integral von Lamb-Sommerfeld im homogenen Medium.*

Wir gehen aus von der bekannten Integraldarstellung von e^{jkR}/R, die 1904 von Lamb angegeben und 1909 von Sommerfeld wieder gefunden wurde. Die Ableitung steht bei Sommerfeld in seiner klassischen Arbeit über die Ausbreitung elektrischer Wellen über einer ebenen Erde. Für einen in $z = z_0$ befindlichen Sender ist:

$$\frac{e^{jkR}}{R} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, e^{-(z-z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, d\lambda & z > z_0 \\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, e^{-(z_0-z)\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, d\lambda & z_0 < z. \end{cases} \tag{238}$$

Diese Lösung des Strahlungsproblems eines punktförmigen Senders im homogenen Medium zeigt das Produkt einer von einem Parameter λ und r abhängigen Lösung und einer von λ und z abhängigen; die Integration geht über λ. Wir wollen nun sehen, welche Lösung im Epsteinmedium der vorliegenden des homogenen Mediums entspricht.

4.3.2. *Das analoge Integral im Epsteinmedium.*

4.3.2.1. DIE ALLGEMEINE INTEGRALDARSTELLUNG.

Die Lösungen der Differentialgleichungen für ${}^r\Psi_z$ sind in diesem Fall dieselben: $J_0(\lambda r)$. An Stelle der von z abhängigen Exponentialfunktion haben wir nun die entsprechenden Epsteinlösungen zu setzen. Nun erheben sich aber hier Normierungsfragen, die wir aber nach einem Vorgehen von Bremmer ([27] S. 142) leicht umgehen können, wenn wir folgendermaßen verfahren (siehe Fig. 9).

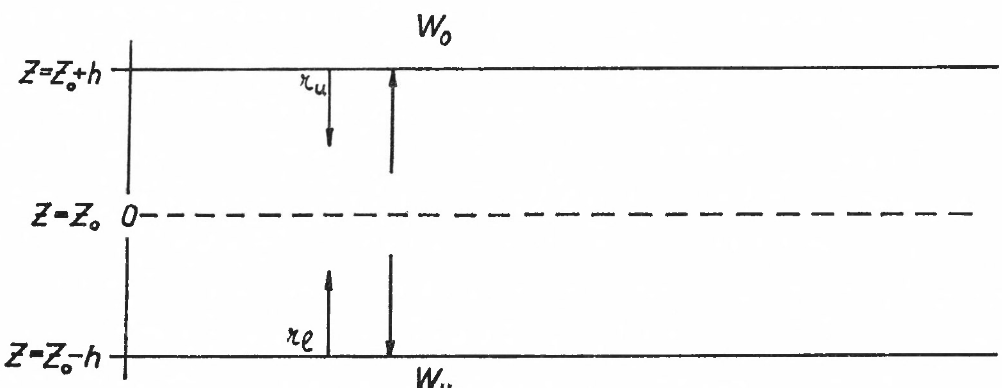

Fig. 9

Wir nehmen in dem inhomogenen Medium von z_0+h bis z_0-h eine homogene Zwischenschicht an, in der $\varepsilon=\varepsilon(z_0)$; außerhalb dieser Schicht sei $\varepsilon=\varepsilon(z)$ nach der Epsteinfunktion. Wir stellen für dieses 3-Schichtengebilde die Lösung her (im homogenen Medium gilt die Sommerfeldlösung) und lassen dann $h\to 0$ gehen.

In der Sommelfeldlösung des homogenen Mediums haben wir für k $k_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}$ zu setzen. In $z=z_0\pm h$ haben wir dann die von der primären Erregung herrührende einfallende Welle, eine dort reflektierte und eine von der jeweiligen Gegenseite kommende reflektierte Welle; außerhalb der Schicht haben wir die Epsteinlösungen, die in der Umgebung von z_0 die analytische Fortsetzung der nach unten bzw. nach oben ausgestrahlten Wellen darstellen. Die gesamte Lösung muß in $-\infty<z<+\infty$ samt der ersten Ableitung nach z stetig sein.

Wir bekommen also:

Im homogenen Medium lautet die „einfallende" Welle für $z>z_0$:

$$\Psi_z=\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}}\,e^{-(z-z_0)\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}}\,d\lambda. \tag{238}$$

Für $z < z_0$

$$\Psi_z = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}}\, e^{-(z_0-z)\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}}\, d\lambda. \tag{239}$$

Oberhalb dieser homogenen Schicht haben wir dann die nach oben auslaufende Epsteinwelle W_o (evtl. ihre analytische Fortsetzung bis in die Umgebung von $z = z_0$), unterhalb die nach unten auslaufende Welle W_u. In der homogenen Schicht haben wir eine in $z_0 + h$ nach unten und eine in $z_0 - h$ nach oben reflektierte Welle so hinzuzufügen, daß die verlangte Stetigkeit eintritt. Die Epsteinsche Lösung wird oben mit einem Faktor p_o, unten mit einem Faktor p_u versehen. Die verlangte Stetigkeit von Ψ_z und $\frac{\partial \Psi_z}{\partial z}$ führt auf folgende vier Gleichungen, wobei wir $J_0(\lambda r)/\sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}$ weglassen, weil es allen Lösungen ein gemeinsamer Faktor ist.

Die Exponentialwellen im homogenen Medium, die oben bzw. unten reflektiert werden, sollen die leicht verständlichen Koeffizienten $r_o\!\downarrow$ $r_u\!\uparrow$ haben. Dann liefert die Gleichheit von Ψ_z oben und unten in $z = z_0 + h$:

$$p_o W_o(z_0 + h) = r_u\!\uparrow e^{-h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}} + e^{-h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}} + r_o\!\downarrow e^{+h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}}. \tag{240}$$

Die Gleichheit von $\frac{\partial^z \Psi_z}{\partial z}$ oberhalb und unterhalb dieser Stelle führt auf:

$$\begin{aligned} p_o \frac{dW_o(z_0+h)}{dz} = &-r_n\!\uparrow \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}\; e^{-h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}} \\ &- \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}\; e^{-h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}} \\ &+ r_o\!\downarrow \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}\; e^{+h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}}. \end{aligned} \tag{241}$$

Die Stetigkeit von Ψ_z in $z = z_0 - h$ führt auf

$$p_u W_u(z_0 - h) = r_o\!\downarrow e^{+h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}} + e^{+h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}} + r_u\!\uparrow e^{-h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}}. \tag{242}$$

Stetigkeit der Ableitung $\frac{d^z\Psi_z}{dz}$ in $z = z_0 - h$:

$$\begin{aligned} p_u \frac{dW_u(z_0-h)}{dz} = &\; r_o\!\downarrow \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}\; e^{+h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}} \\ &+ \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}\; e^{+h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}} \\ &- r_u\!\uparrow \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}\; e^{-h\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,\varepsilon(z_0)}}. \end{aligned} \tag{243}$$

Nach dem Grenzübergang $h \to 0$ brauchen wir nur mehr p_u und p_o; wir nehmen diesen Grenzübergang sofort vor, lassen r_u und r_o außer Betracht, berechnen nur p_u und p_o. Die Gleichungen (240) bis (243) nehmen so die Form an:

$$p_o W_o(z_0) = r_u\!\uparrow + 1 + r_0\!\downarrow \tag{244}$$

$$p_o \frac{dW_o(z_0)}{dz_0} = -r_u\!\uparrow \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)} - \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)} + r_o\!\downarrow \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)} \tag{245}$$

$$(246) \qquad p_u W_u(z_0) = r_o{\downarrow} + 1 + r_u{\uparrow}$$

$$(247) \qquad p_u \frac{d W_u(z_0)}{dz} = r_o{\downarrow} \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)} + \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)} - r_u{\uparrow} \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}.$$

Diese Gleichungen schreiben wir in folgender Form an:

$$(248) \qquad p_o W_o(z_0) - 1 \cdot r_u{\uparrow} - 1\, r_o{\downarrow} = 1$$

$$(249) \qquad p_o \frac{d W_o(z_0)}{dz} + r_u{\uparrow} \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)} - r_o{\downarrow} \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)} = - \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}$$

$$(250) \qquad r_u{\uparrow} \cdot 1 + r_o{\downarrow} \cdot 1 - p_u W_u(z_0) = -1$$

$$(251) \qquad - r_u{\uparrow} \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)} + r_o{\downarrow} \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)} - p_u \frac{d W(z_0)}{dz} = - \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}.$$

Wir addieren (248) + (250)

(249) + (251) und erhalten:

$$(252) \qquad p_o W_o(z_0) - p_u W_u(z_0) = 0$$

$$(253) \qquad p_o \frac{d W_o(z_0)}{dz} - p_u \frac{d W_u(z_0)}{dz} = -2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}.$$

Die Determinante dieses Systems für p_u, p_o als Unbekannte lautet:

$$(254) \qquad \Delta = W_u(z_0) \frac{d W_o(z_0)}{dz} - W_o(z_0) \frac{d W_u(z_0)}{dz}.$$

Es ist dies ersichtlich die Wronskideterminante der beiden Lösungen $W_u(z)$, $W_o(z)$ gebildet in $z = z_0$, die, wie (221) zeigt, eine Konstante sein muß. Die beiden anderen Cramerschen Determinanten des Systems (252) (253) lauten:

$$(255) \qquad \Delta_1 = -2\, W_u(z_0) \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}$$

$$(256) \qquad \Delta_2 = -2\, W_o(z_0) \sqrt{\lambda^2 - k_0^2\,\varepsilon(z_0)}.$$

Somit wird

$$(257) \qquad p_o = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad p_u = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Durch die Berechnung von p_u und p_o haben wir unsere Epsteinlösungen $W_u(z)$ und $W_o(z)$ normiert und können jetzt die formale Lösung unseres Problems anschreiben. Wir haben:

$$(258) \qquad \Psi_z = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, \lambda \cdot 2 \frac{W_o(z)\, W_u(z_0)}{W_o(z_0) \frac{d W_u(z_0)}{dz} - W_u(z_0) \frac{d W_o(z_0)}{dz}}\, d\lambda, \quad z > z_0$$

$$(259) \qquad \Psi_z = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\,\lambda\cdot 2\,\frac{W_u(z)\,W_o(z_0)}{W_o(z_0)\,\frac{d W_u(z_0)}{dz} - W_u(z_0)\,\frac{d W_o(z_0)}{dz}}\,d\lambda,\quad z < z_0.$$

Wie bereits bemerkt, sind $W_u(z)$ und $W_o(z)$ so zu wählen, daß $W_o(z)$ für $z \to +\infty$ einer nach oben auslaufenden Welle entspricht $W_u(z)$ für $z \to -\infty$ einer nach unten auslaufenden. Damit haben wir zunächst eine formale Lösung unseres Problems gegeben.

4.3.2.2. BERECHNUNG DER IN DER LÖSUNG ERSCHEINENDEN WRONSKIDETERMINANTE.

Zunächst haben wir uns mit der Wronskideterminante im Nenner zu befassen. Zu ihrer Berechnung bietet sich der bekannte Satz von Lionville ([28] S. 235). Da $W_u(z)$, $W_o(z)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$(260) \qquad \frac{d^2\,{}^z\Psi_z}{dz^2} + \left(k_0^2\left(1 + \frac{\delta}{1+e^{\varkappa z}}\right) - \lambda^2\right){}^z\Psi_z = 0$$

sind, in der das Glied mit $\frac{d\,{}^z\Psi_z}{dz}$ fehlt, ist die Wronskische Determinante konstant. Wir wollen W_u und W_o einmal nach $z \to -\infty$ und das andere Mal nach $z \to +\infty$ hin fortsetzen, die Wronskische Determinante berechnen und durch die Übereinstimmung dieser beiden Werte die Rechnung überprüfen. Die hypergeometrische Funktion besitzt für $z \to \pm\infty$ einfache Werte, so wird die Berechnung relativ einfach. Wir hatten früher für W_u gefunden (Gl. (81))

$$(261) \qquad W_u(z) = \zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,u_5,$$

für $W_o(z)$ hatten wir gefunden (Gl. (84))

$$(262) \qquad W_o(z) = \zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\,(1-\zeta)\,u_3.$$

Wenn wir für $z \to -\infty$ die Wronskideterminante berechnen wollen, so erinnern wir uns daran, daß u_5 in $z \to -\infty$, $\zeta \to 0$ konvergiert, während wir u_3, das in $z \to +\infty$, $\zeta \to -\infty$ konvergiert, nach $z \to -\infty$ hin fortsetzen müssen, wobei es dann als Superposition von u_1 und u_5 erscheint. Diese Fortsetzung geschieht mit Hilfe von Gl. (26).

So wird für $z \to -\infty$

$$(263) \qquad W_u(z) \to (-1)^{\frac{1-\gamma}{2}}\,e^{-z\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}} \qquad (-1) = e^{j\pi}.$$

$W_o(z)$ werde in analoger Weise dargestellt:

$$(264) \qquad W_o(z) = a\,e^{z\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}} + b\,e^{-z\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}},$$

wo

$$(265)\qquad a = (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)}$$

$$b = (-1)^{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)}\, e^{j\pi\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}\,.$$

Bilden wir dann die Größen W_o, W_u und die Ableitungen, so finden wir:

$$(266)\qquad \Delta_W = -2\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\,\frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\,,$$

wo Δ_W = Wronski-Determinante.

Berechnen wir Δ_W umgekehrt für $z \to +\infty$, $\zeta \to -\infty$, so haben wir zu beachten, daß u_3 dort konvergiert, während wir u_5, das in $z \to -\infty$ konvergiert, dorthin fortzusetzen haben, was mittels (28) geschieht. Hier wird u_5 durch die bei $z \to +\infty$ konvergenten Funktionen u_3 und u_4 ausgedrückt. Wenn wir analog zu oben diese Grenzübergänge durchführen, so finden wir

$$(267)\qquad \Delta_W = -2\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,\frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\,.$$

Um die Übereinstimmung von (266) und (267) zu zeigen, beweisen wir, daß

$$(268)\qquad \sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\;\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(1+\alpha-\beta) = \sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)$$

ist, was sich aus (232) (233) (234) unmittelbar ergibt. Wir werden die Formen (266) (267) nach Zweckmäßigkeit benützen.

4.4. Die 12 Lösungsintegrale.

Nunmehr haben wir die Möglichkeit, die Lösung unseres Problems explizit anzuschreiben. Hinsichtlich der Wahl der Form der Wronski-Determinante folgen wir dabei der nachstehenden Regel:

Für Integrale, die eine Lösung darstellen, die im oberen Halbraum ($z > 0$) gilt, wählen wir die Form (267), deren Wurzel k_0 also $\varepsilon_{z\to+\infty}$ allein enthält; für Integrale dagegen, die in $z < 0$ gelten, wählen wir die Form (266), die $\sqrt{k_0(1+\delta)}$ also das $\varepsilon_{z\to-\infty}$ enthält.

Die Lösungen müssen für verschiedene Fälle angeschrieben werden, da die hypergeometrischen Funktionen in verschiedenen Bereichen konvergieren. Wir haben einmal zu unterscheiden zwischen $z_0 \lesseqgtr 0$; in jedem Falle haben wir dann zu unterscheiden zwischen $z \gtrless z_0$, bei $z_0 > 0$ $z_0 > z$ haben wir noch zu unterscheiden zwischen $z > 0$, $z < 0$ u. s. f. So entsteht aus den Formeln (258) (259) die folgende Tabelle.

Betreffend die Numerierung der Integrale wollen wir noch folgendes festlegen: Da die rechte Seite der Zusammenhangsformeln der hypergeometrischen Funktionen zweigliedrig ist, so zerfallen mehrere der Lösungen für bestimmte Bereiche in zwei Integrale, die wir dann mit einer gesonderten Nummer versehen.

So kommen wir zu zwölf Integralen, die wir jetzt anschreiben wollen.

4.4.1. Die zwölf lösenden Integrale

$z > z_0 > 0$:

I
$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\;\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}\,(e^{\varkappa z})^{-1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\,(e^{\varkappa z_0})^{-1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}$$

$$\times\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})\times{}_2F_1\left\{\begin{matrix}1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2},\\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\;-e^{-\varkappa z}\\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\end{matrix}\right\}\;{}_2F_1\left\{\begin{matrix}1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2},\\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\;-e^{-\varkappa z_0}\\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\end{matrix}\right\}d\lambda$$

II
$$-\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})\,(e^{\varkappa z})^{-1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\,(e^{\varkappa z_0})^{-1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}$$

$$\times\,{}_2F_1\left\{\begin{matrix}1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2},\\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\;-e^{-\varkappa z}\\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\end{matrix}\right\}\;{}_2F_1\left\{\begin{matrix}1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2},\\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\;-e^{-\varkappa z_0}\\ 1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\end{matrix}\right\}d\lambda$$

$z_0 > z > 0$:

III
$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\;\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})$$

$$\times\,(e^{\varkappa(z+z_0)})^{-1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\times{}_2F_1\left\{\begin{matrix}1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2},\\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\;-e^{-\varkappa z_0}\\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\end{matrix}\right\}\;{}_2F_1\left\{\begin{matrix}1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2},\\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\;-e^{-\varkappa z}\\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\end{matrix}\right\}d\lambda$$

$$\text{IV} \qquad -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\left(1+e^{\varkappa z}\right)\left(1+e^{\varkappa z_0}\right)\left(e^{\varkappa z}\right)^{-1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\left(e^{\varkappa z_0}\right)^{-1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}$$

$$\times\ {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{-\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}; \end{matrix}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{-\varkappa z} \\ 1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}; \end{matrix}\right\}d\lambda$$

$z_0 > 0 > z$:

$$\text{V} \quad \Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}\ \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}\left(1+e^{\varkappa z}\right)\left(1+e^{\varkappa z_0}\right)e^{(z_0-z)\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}$$

$$\times\left(e^{\varkappa z_0}\right)^{-1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\times\ {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{-\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_2^0};\ -e^{-\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\}d\lambda$$

$z > 0 > z_0$:

$$\text{VI} \quad \Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\ \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}\left(1+e^{\varkappa z}\right)\left(1+e^{\varkappa z_0}\right)e^{-z_0\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}$$

$$\times\ e^{\varkappa z\left(-1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}\times\ {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{-\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}; \end{matrix}\right\}d\lambda$$

$0 > z > z_0$:

$$\text{VII}\quad \Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}\, e^{(z-z_0)\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})$$

$$\times\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -e^{\varkappa z} \\ 1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\}\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -e^{\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\}\, d\lambda$$

$$\text{VIII}\quad +\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}\, \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}$$

$$\times\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})\, e^{(z-z_0)\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}\, e^{-2z\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}$$

$$\times\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -e^{\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\}\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -e^{\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\}\, d\lambda$$

$0 > z_0 > z$:

$$\text{IX}\quad \Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}\, e^{(z_0-z)\sqrt{\lambda^2-k^2(1+\delta)}}\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})$$

$$\times\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -e^{\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\}\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -e^{\varkappa z_0} \\ 1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\}\, d\lambda$$

$$\mathrm{X}\qquad + \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}\, e^{-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}\, \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}$$

$$\times\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})\qquad \times\,{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -e^{\varkappa z} \\ 1-\frac{\varkappa}{2}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\}\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -e^{\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\} d\lambda$$

$z > z_0 = 0$:

$$\mathrm{XI}\qquad \Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\, \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\,\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}\; 2\,(1+e^{-\varkappa z})\,(e^{\varkappa z})^{\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}$$

$$\times\,{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -e^{-\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}; \end{matrix}\right\}\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -1 \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\} d\lambda$$

$0 = z_0 > z$:

$$\mathrm{XII}\qquad \Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}\, \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}\; e^{-z\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}}\; 2\,(1+e^{\varkappa z})$$

$$\times\,{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -1 \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}; \end{matrix}\right\}\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\; -e^{\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}; \end{matrix}\right\} d\lambda$$

4.5. Diskussion der Integrale.

Zum Zwecke der Diskussion dieser Integrale gehen wir folgendermaßen vor:

Zunächst zeigen wir, daß für $\delta \to 0$ diese Integrale in die Integrale für das homogene Medium übergehen; anschließend zeigen wir, daß sie für $\varkappa \to \infty$, d.h. unstetigen Übergang von $\varepsilon = 1$ auf $\varepsilon = 1 + \delta$ in die Integrale vom Sommerfeldschen Typus übergehen, die in Anhang 3 tabuliert sind; dann untersuchen wir die Konvergenz der Integrale. Zwecks eines funktionentheoretischen Studiums suchen wir die Stellen, wo Pole des Integranden liegen. Nach diesen Vorbereitungen geben wir eine erste Sattelpunktsnäherung, die wir für die 12 Integrale gesondert tabulieren. Anschließend diskutieren wir diese Ergebnisse gesondert vom physikalischen Standpunkt aus und vergleichen das Ergebnis mit strahlenoptischen Rechnungen, die im Anhang niedergelegt sind.

4.5.1. *Grenzübergang zu $\delta \to 0$.*

Da es sich um 12 Integrale handelt, wollen wir hier diesen Grenzübergang nur an einem demonstrieren und dem Leser diese Rechnung für die anderen Integrale überlassen. Der Verfasser bemerkt jedoch, daß er für alle 12 Integrale zur Kontrolle sowohl diesen wie den Grenzübergang zu $\varkappa \to \infty$ nachgerechnet hat. Wir wählen hier das Integral XI: $z > z_0 = 0$. Wenn $\delta \to 0$, so sehen wir, daß die Γ-Faktoren sich dann wegheben.

In den hypergeometrischen Funktionen werden jeweils ein Zählerparameter und der Nennerparameter gleich, und in diesem Falle gilt nach [18] S. 247 Exempel 1

$$(1 - z)^{-a} = {}_2F_1(a, b; b; z). \tag{269}$$

Zusammen mit den Faktoren $(1 + e^{-\varkappa z})$, $(1 + e^{\varkappa z_0}) = 2$ $(z_0 = 0)$ erhalten wir dann

$$^z\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}\, e^{z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}\, d\lambda. \tag{270}$$

Wir werden später sehen, daß wir in unseren Integralen für die Wurzeln $\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1 + \delta)}$ gegenüber Sommerfeld genau den negativen Zweig zu wählen haben, wenn Sommerfeld den positiven wählt, so daß (270) tatsächlich mit Sommerfelds Integral identisch ist. Dies erklärt dann auch die Minuszeichen in der Tabelle der 12 Integrale.

4.5.2. *Grenzübergang zu $\varkappa \to \infty$ (Unstetiger Übergang von $\varepsilon = 1$ zu $\varepsilon = 1 + \delta$).*

Wir beschränken uns auch hier auf das Integral XI und überlassen die Überprüfung der anderen Integrale dem Leser.

Im Anhang 3 sind die Sommerfeldschen Integrale zu diesem Zweck zusammengestellt. Wenn wir uns der Laurent-Entwicklung der Γ-Funktion im Anhang 2 bedienen, $\varkappa \to \infty$ gehen lassen, so wird:

$$\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\;\rightarrow\;\Gamma(1)=1 \tag{271}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\;\rightarrow\;\frac{-\varkappa}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,(1+\delta)}+\sqrt{\lambda^2-k_0^2}} \tag{272}$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}\;\rightarrow\;-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \tag{273}$$

so daß schließlich das Sommerfeld-Integral

$$-\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\,e^{z\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\,\frac{2\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,(1+\delta)}+\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\,d\lambda \tag{274}$$

resultiert. Das Minuszeichen wird durch die Wahl der negativen Wurzelzweige notwendig.

4.5.3. *Die Konvergenz der Integrale.*

Zunächst befassen wir uns mit der Wahl der Zweige der Wurzeln

$$\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,(1+\delta)}\,,\quad \sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,.$$

Wir haben in Fig. 11 (siehe Fig. 10–13) Sommerfelds Wahl der Zweige der genannten Wurzeln illustriert, wobei für die Wurzel $\sqrt{\lambda^2-k_0^2\,(1+\delta)}$ einfach $k_0\sqrt{1+\delta}$ an Stelle von k_0 zu setzen wäre:

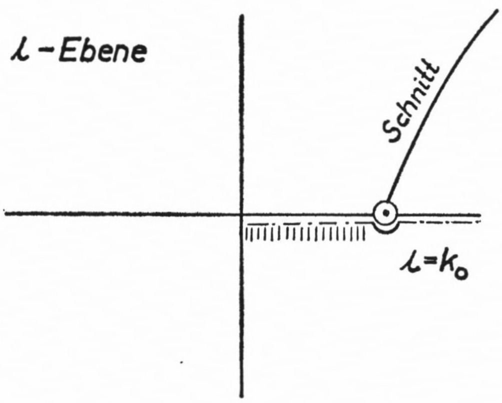

Fig. 10

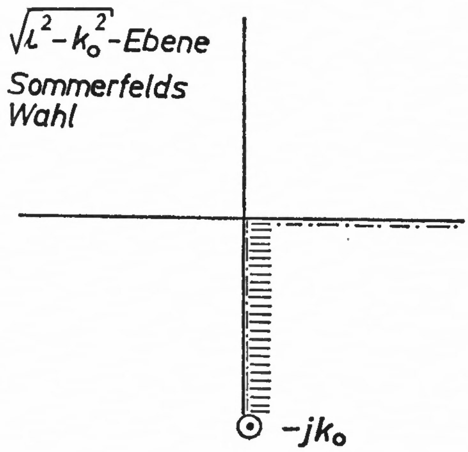

Fig. 11

Wenn λ von Null bis k_0 läuft, läuft bei Sommerfeld $\sqrt{\lambda^2-k_0^2}$ von $-jk_0$ längs der negativ imaginären Achse bis 0. Wenn λ von k_0 bis ∞ läuft, läuft $\sqrt{\lambda^2-k_0^2}$ von 0 bis ∞ positiv reell.

Bei uns läuft $\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ von $+jk_0$ auf der positiv imaginären Achse bis Null, von da nach $-\infty$ negativ reell.

Damit sind die Minuszeichen erklärt.

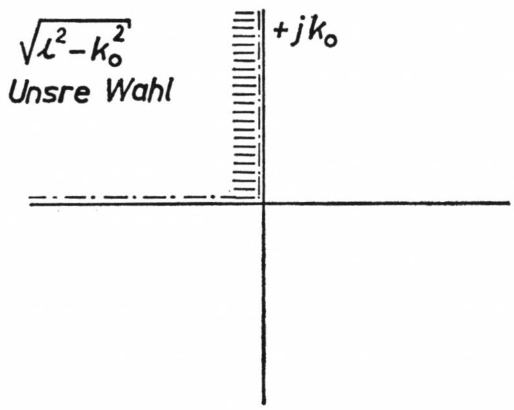

Fig. 12

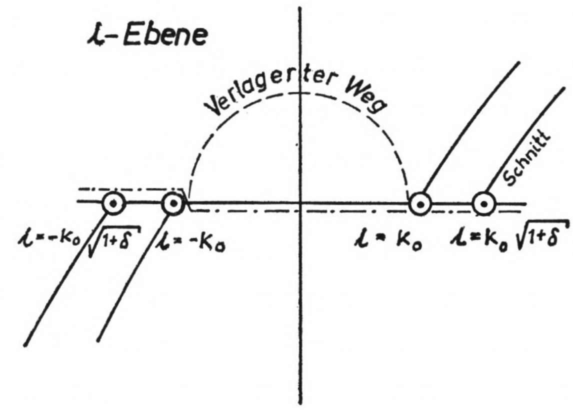

Fig. 13

Nach Sommerfeld [29] S. 692 können wir schreiben

$$(275) \qquad \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, \lambda f(\lambda^2)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(\lambda r)\, \lambda f(\lambda^2)\, d\lambda .$$

Für diesen Fall sehen wir in Fig. 13 den Integrationsweg aufgezeichnet, den wir von $\lambda = 0$ wegziehen können.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns der eigentlichen Konvergenzuntersuchung des Integrals XI zu, indem wir die analoge Untersuchung der anderen Integrale wiederum dem Leser überlassen.

Wir haben zu prüfen, wie sich der Integrand für $\lambda \to \infty$ verhält. Nach den obigen Festsetzungen über die Auswahl der Zweige erhalten wir für die Wurzeln:

$$(276) \qquad \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} \quad \to \quad -\left|\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\right| \quad \to \quad -\lambda$$

$$(277) \qquad \sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)} \quad \to \quad -\left|\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}\right| \quad \to \quad -\lambda$$

für $\lambda \to \infty$.

Nun ist aber:

$$(278) \qquad -\left|\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\right| \quad \to \quad -\lambda\left|\sqrt{1 - k_0^2/\lambda^2}\right| \quad \to \quad -\lambda\left|1 - \frac{k_0^2}{2\lambda^2}\right| .$$

Ebenso:

$$(279) \qquad -\left|\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}\right| \quad \to \quad -\lambda\left|1 - \frac{k_0^2(1+\delta)}{2\lambda^2}\right| .$$

Dann wird:

$$(280)\quad +\left|\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right|+\left|\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right| \rightarrow \lambda\left(1-\frac{1}{2}\frac{k_0^2(1+\delta)}{\lambda^2}+1-\frac{1}{2}\frac{k_0^2}{\lambda^2}\right)$$
$$\rightarrow \lambda\left(2-\frac{k_0^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\right)$$

und

(281)
$$-\left|\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right|+\left|\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right| \rightarrow -\lambda\left(1-\frac{k_0^2}{2\lambda^2}(1+\delta)\right)+\lambda\left(1-\frac{k_0^2}{2\lambda^2}\right) \rightarrow \frac{k_0\delta}{2\lambda}.$$

Eine wohlbekannte Γ-Formel gibt:

(282)
$$\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right) = -\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\;\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)$$
$$\rightarrow -\frac{2}{\varkappa}\lambda\left(1-\frac{k_0^2(1+\delta)}{2\lambda^2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\varkappa}\lambda\left(1-\frac{k_0^2(1+\delta)}{2\lambda^2}\right)\right),$$

wenn wir unsere Wahl der Zweige der Wurzeln zugrunde legen.

Ferner wird

(283)
$$\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)$$
$$=-\frac{1}{\varkappa}\left(\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\left(\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\right).$$

Dies wird analog:

$$(284)\qquad \frac{\lambda}{\varkappa}\left(2-\frac{k_0^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\right)\Gamma\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\left(2-\frac{k_0^2}{\lambda^2}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\right)\right).$$

Für die hypergeometrischen Funktionen im Integral XI erhalten wir unter Berücksichtigung von (278) ·/· (281)

$$(285)\qquad {}_2F_1\left\{\begin{matrix}1,\\ 1+\frac{2\lambda}{\varkappa};\quad -e^{-\varkappa z}\\ 1+\frac{2\lambda}{\varkappa};\end{matrix}\right\},\qquad {}_2F_1\left\{\begin{matrix}1,\\ 1+\frac{2\lambda}{\varkappa};\quad -1\\ 1+\frac{2\lambda}{\varkappa};\end{matrix}\right\},$$

wo Glieder mit $\frac{1}{\lambda}$ vernachlässigt wurden. Dann erhält man mit bekannten Relationen hypergeometrischer Funktionen

$$(286)\qquad {}_2F_1\left(1,1+\frac{2\lambda}{\varkappa};\;1+\frac{2\lambda}{\varkappa};\;-e^{-\varkappa z}\right)\rightarrow(1+e^{-\varkappa z})^{-1}$$

$$(287)\qquad {}_2F_1\left(1,1+\frac{2\lambda}{\varkappa};\;1+\frac{2\lambda}{\varkappa};\;-1\right)\rightarrow 2^{-1}.$$

Dann nimmt für $\lambda \to \infty$ der Integrand die Form an

$$\frac{\lambda}{\lambda} J_0(\lambda r) \frac{\Gamma\left(\frac{2\lambda}{\varkappa}\right) \Gamma\left(\frac{2\lambda}{\varkappa}\right) \Gamma\left(\frac{2\lambda}{\varkappa}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\lambda}{\varkappa}\right) \Gamma\left(\frac{2\lambda}{\varkappa}\right) \Gamma\left(\frac{2\lambda}{\varkappa}\right)} e^{-z\lambda}, \tag{288}$$

d. h. das Integral konvergiert.

Die Untersuchung der anderen Integrale sei dem Leser überlassen.

4.5.4. *Studium der Pole des Integranden.*

Wir werden hier sehen, daß unser Integrand Pole hat, die so liegen, daß sie unsere Betrachtungen nicht stören. Pole treten dort auf, wo die Γ-Funktionen im Zähler des Integranden unendlich werden. Diese sind

$$\begin{gathered} \Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right) \\ \Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right). \end{gathered} \tag{289}$$

Ferner treten Pole auf, wo die Γ-Funktion des Nenner-Parameters (3. Parameters) der hypergeometrischen Funktion unendlich wird:

$$\begin{gathered} \Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right) \\ \Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right). \end{gathered} \tag{290}$$

Dies wollen wir nun untersuchen.

Zunächst: Damit $\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)$ einen Pol hat, muß sein:

$$-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2} = 0, -1, -2 \ldots -n, \ldots \tag{291}$$

Damit $\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)$ einen Pol hat, muß sein:

$$-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2} = -1, -2, \ldots -n, \ldots \tag{292}$$

Damit $\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)$ einen Pol hat, muß sein:

$$-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2} = -1, -2, \ldots -n; \ldots \tag{293}$$

Damit $\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)$ einen Pol hat, muß sein:

$$-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)} = -1, -2, \ldots -n, \ldots \tag{294}$$

Die Gleichungen (291) ·/· (294) müssen nach λ aufgelöst werden.

Zunächst haben wir:

$$\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\sqrt{\lambda^2-k_0^2} = 0, \varkappa, 2\varkappa \ldots n\varkappa \ldots \tag{295}$$

Für $n = 0$ wird:

$$\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)} = -\sqrt{\lambda^2-k_0^2}. \tag{296}$$

Das Quadrat von (296) liefert:

$$\lambda^2-k_0^2(1+\delta) = \lambda^2-k_0^2. \tag{297}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung.

Für $n \neq 0$ erhalten wir:

$$\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)} = n\varkappa-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \tag{298}$$

also:

$$\lambda^2-k_0^2(1+\delta) = n^2\varkappa^2+\lambda^2-k_0^2-2n\varkappa\sqrt{\lambda^2-k_0^2} \tag{299}$$

$$k_0^2\delta+n^2\varkappa^2 = 2n\varkappa\sqrt{\lambda^2-k_0^2} \tag{300}$$

$$k_0^4\delta^2+n^4\varkappa^4 = 4n^2\varkappa^2(\lambda^2-k_0^2)-2n^2\varkappa^2k_0^2\delta \tag{301}$$

$$4n^2\varkappa^2\lambda^2 = 4n^2\varkappa^2k_0^2+2n^2\varkappa^2k_0^2\delta+n^4\varkappa^4+k_0^4\delta^2, \tag{302}$$

folglich

$$\lambda^2 = k_0^2\left(1+\frac{\delta}{2}\right)+\frac{n^2\varkappa^2}{4}+\frac{k_0^4\delta^2}{4n^2\varkappa^2}. \tag{303}$$

Es wäre wichtig zu wissen, ob dieses λ^2 größer ist als $k_0^2(1+\delta)$. Dann wären Pole nur möglich außerhalb eines Kreises von Radius $k_0\sqrt{1+\delta}$ um den Ursprung der λ-Ebene. In diesem Falle werden wir haben:

$$\frac{n^2\varkappa^2}{4}+\frac{k_0^4\delta^2}{4n^2\varkappa^2} \geq k_0^2\delta/_2. \tag{304}$$

Wir suchen nun das Minimum der linken Seite von (304), wobei wir n als stetige Variable voraussetzen:

$$\frac{\partial}{\partial(n^2\varkappa^2)}\left(\frac{n^2\varkappa^2}{4}+\frac{k_0^4\delta^2}{4n^2\varkappa^2}\right) = 0 \tag{305}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{k_0^4\delta^2}{4(n^2\varkappa^2)^2} = 0, \tag{306}$$

also:

$$n^2 \varkappa^2 = k_0^2 \delta. \tag{307}$$

Setzen wir dies in die linke Seite von (304) ein, so finden wir:

$$\frac{k_0^2 \delta}{4} + \frac{k_0^4 \delta^2}{4 k_0^2 \delta} = \frac{1}{2} k_0^2 \delta. \tag{308}$$

Dies ist das Minimum der linken Seite von (304). Also folgt aus (303)

$$\lambda^2 \geq k_0^2 (1 + \delta) \qquad \text{q. e. d.} \tag{309}$$

Allgemein liegt der $n$te Pol bei:

$$\lambda_n^2 = k_0^2 (1 + \delta/2) + \frac{n^2 \varkappa^2}{4} + \frac{k_0^4 \delta^2}{4 n^2 \varkappa^2} \geq k_0^2 (1 + \delta). \tag{310}$$

Wir haben also gesehen, daß Pole herrührend von den Γ-Faktoren des Integranden nur möglich sind außerhalb eines Kreises mit dem Radius $\lambda = k_0 \sqrt{1 + \delta}$. Damit aber die Pole auf dem Integrationsweg liegen, muß $-\frac{1}{\varkappa} \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\lambda^2 - k_0^2 (1 + \delta)}$ negativ sein.

Nun haben wir für unseren Integrationsweg außerhalb k_0 und $k_0 \sqrt{1 + \delta}$ die Wurzelzweige negativ gewählt: damit wird aber der obige Ausdruck positiv, und wir haben keine Pole auf dem Integrationsweg.

Wir haben noch die von (293) (294) herrührenden Pole zu untersuchen:

Innerhalb der Kreise $|\lambda| \leq k_0$ bzw. $|\lambda| \leq k_0 \sqrt{(1 + \delta)}$ ist die Wurzel imaginär, dort kann die rechte Seite nicht negativ reell sein. Auf dem Integrationsweg werden dann die Wurzeln $-\frac{1}{\varkappa} \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$, $-\frac{1}{\varkappa} \sqrt{\lambda^2 - k_0^2 (1 + \delta)}$ positiv, sie können nicht negativ reell sein.

4.5.5. *Berechnung der Integrale in erster Näherung mittels Sattelpunktsmethode.*

Eine strenge numerische Auswertung der Integrale würde elektronische Rechenmittel erfordern, die dem Verfasser gegenwärtig nicht zur Verfügung stehen. Für große Abstände vom Sender wollen wir hier eine Sattelpunktsnäherung angeben. Wir beziehen uns dabei auf den Anhang 4, der eine Sattelpunktsnäherung des Sommerfeldschen Integrals liefert, die im Prinzip in der Literatur benutzt, aber auf anderem als dem hier angegebenen Weg abgeleitet wird.

Wir haben in allen Integralen mit $z > 0$ einen Exponentialfaktor $e^{+z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}$ für $z < 0$ $e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2 (1+\delta)}}$. Unter Benutzung von Gleichung (275) können wir die Integrale für $z > 0$ schreiben

$$\Psi_z = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^{(1)}(\lambda r)\, \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}\, e^{z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}\, \Phi_i(\lambda, z)\, d\lambda, \tag{311}$$

wo der Index i bei Φ der römischen Ziffer des Integrals entspricht.

Für $z < 0$ können wir schreiben

$$\Psi_z = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^{(1)}(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, \Phi_i(\lambda, z)\, d\lambda, \tag{312}$$

wobei das Φ in (312) nicht identisch mit dem Φ von (311) ist.

In diesen Integralen betrachten wir $\Phi_i(\lambda, z)$ als „langsam veränderlich" im Sinne der Literatur über die Sattelpunktsmethode. Wir beziehen uns auf [18] [29] [30] [31] [32] [33].

Sommerfelds Integrale werden in der Literatur häufig nach Umformung auf sphärische Polarkoordinaten mittels der Sattelpunktsmethode asymptotisch ausgewertet. Dabei wird im Falle einer ebenen Erde der von der Reflexion herrührende Anteil im Integranden als „langsam variabel" angesehen. Wir wollen hier ähnlich verfahren. In (311) und (312) nehmen wir $\Phi(\lambda, z)$ in demselben Sinne als langsam veränderlich an und werten den übrigen Teil des Integrals mittels der Sattelpunktsmethode aus; wenn λ_S der Wert von λ im Sattelpunkt ist, kommen wir damit zu folgendem Ergebnis:

Für $z > 0$ haben wir:

$$\Psi_z = \frac{e^{jk_0 R}}{R}\, \Phi_i(\lambda_S, z)\,. \tag{313}$$

Für $z < 0$

$$\Psi_z = \frac{e^{jk_0\sqrt{1+\delta}\,R}}{R}\, \Phi_i(\lambda_S, z) \tag{314}$$

(wobei die beiden Φ_i in (313) und (314) nicht identisch sind), wobei R den euklidischen Abstand von Sender und Aufpunkt bedeutet. Die Sattelpunktsmethode ist in Anhang 4 dargelegt: dort ist auch die Berechnung der Sattelpunkte gegeben.

In der folgenden Tabelle sind nun die Sattelpunktsnäherungen der 12 Integrale niedergelegt.

4.5.6. *Tabellierung der Sattelpunktsnäherungen der 12 Integrale.*

Zum Verständnis der folgenden Tabelle bemerken wir folgendes:

Zunächst beziehen wir uns auf die Tabelle der 12 lösenden Integrale und behandeln das Beispiel $z > z_0 > 0$. In diesem Falle ist Ψ_z die Summe der Integrale I und II.

In unserer Tabelle der Sattelpunktsnäherungen geben wir die Näherungen für die Integrale I und II gesondert.

Dabei nehmen wir zu $J_0(\lambda r)\lambda/\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ die Exponentialfunktionen hinzu, so daß für das Integral I $e^{(z+z_0)\sqrt{\lambda^2+k_0^2}}$ geschrieben wird. Dies liefert uns ein Sommerfeld-Integral, für das wir den Sattelpunkt in λ angeben $\lambda_{S\,\mathrm{I}} = k_0 r/\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}$. Nun vergleichen wir dieses Integral mit dem entsprechenden Integral aus A_3. Es entspricht in der dortigen Tabelle dem 2. Teil des Integrals I_1 mit dem Integranden: $(k_0 = k_1,\ k_0\sqrt{1+\delta} = k_2)$

$$\frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}\, e^{(-(z-z_0)-2z_0)\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\, \frac{\sqrt{\lambda^2-k_2^2} - \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}{\sqrt{\lambda^2-k_2^2} + \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\,, \tag{315}$$

wobei wir stets die bei uns von derjenigen Sommerfelds verschiedene Wahl der Wurzelzweige beachten müssen. Für $\varkappa \to \infty$ muß das Integral I, wie wir bereits sahen, in den Ausdruck (315) übergehen. Nach A_4 bestimmt sich der Sattelpunkt; $\Phi_{\mathrm{I}}(\lambda_{S\,\mathrm{I}}, z)$ bedeutet im Integral I den Faktor, der im Integranden neben $\frac{J_0(\lambda r)\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\, e^{-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}$ steht.

In analoger Weise sind in allen Integralen die Funktionen $\Phi_{\mathrm{I}} \ldots \Phi_{\mathrm{XII}}$ zu verstehen, $\lambda_{S\,\mathrm{I}} \ldots \lambda_{S\,\mathrm{XII}}$ sind die zu den Sattelpunkten gehörigen λ-Werte.

Diese Bemerkungen dienten zum Verständnis der Tabelle. Die Integrale sollen nun im folgenden Abschnitt physikalisch diskutiert werden.

Die Funktionen $\Phi_{\mathrm{I}}(\lambda_{S\,\mathrm{I}}, z) \ldots \Phi_{\mathrm{XII}}(\lambda_{S\,\mathrm{XII}}, z)$ stehen in einer gesonderten Tabelle.

Sattelpunktsapproximation der 12 Integrale.

Mit:

I:
$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\, e^{(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\, \Phi_{\mathrm{I}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{I}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}$$

gilt für die Sattelpunktsapproximation:

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}\, \Phi_{\mathrm{I}}(\lambda_{S_{\mathrm{I}}}, z)\,.$$

Analog gilt:

II:
$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\, e^{(z-z_0)\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\, \Phi_{\mathrm{II}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{II}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}}:$$

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{r^2+(z-z_0)^2}}}{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}}\, \Phi_{\mathrm{II}}(\lambda_{S_{\mathrm{II}}}, z)$$

III:
$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\, e^{(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\, \Phi_{\mathrm{III}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{III}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}$$

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}\, \Phi_{\mathrm{III}}(\lambda_{S_{\mathrm{III}}}, z)$$

IV:
$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\, e^{(z_0-z)\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\, \Phi_{\mathrm{IV}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{IV}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+(z_0-z)^2}}$$

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{r^2+(z_0-z)^2}}}{\sqrt{r^2+(z_0-z)^2}} \cdot \Phi_{\mathrm{IV}}(\lambda_{S_{\mathrm{IV}}}, z)$$

V:

$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, \Phi_{\mathrm{V}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{V}}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\, r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{1+\delta}\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}}\, \Phi_{\mathrm{V}}(\lambda_{S_{\mathrm{V}}}, z)$$

VI:

$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}\, e^{z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}\, \Phi_{\mathrm{VI}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{VI}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}}\, \Phi_{\mathrm{VI}}(\lambda_{S_{\mathrm{VI}}}, z)$$

VII:

$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, e^{(z-z_0)\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, \Phi_{\mathrm{VII}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{VII}}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\, r}{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}}$$

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{1+\delta}\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}}}{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}}\, \Phi_{\mathrm{VII}}(\lambda_{S_{\mathrm{VII}}}, z)$$

VIII:

$$\Psi_z = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, e^{-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, \Phi_{\mathrm{VIII}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{VIII}}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\, r}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}$$

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{1+\delta}\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}\, \Phi_{\mathrm{VIII}}(\lambda_{S_{\mathrm{VIII}}}, z)$$

IX:

$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, e^{(z_0-z)\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, \Phi_{\mathrm{IX}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{IX}}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\, r}{\sqrt{r^2+(z_0-z)^2}}$$

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{1+\delta}\sqrt{r^2+(z_0-z)^2}}}{\sqrt{r^2+(z_0-z)^2}}\, \Phi_{\mathrm{IX}}(\lambda_{S_{\mathrm{IX}}}, z)$$

X:

$$\Psi_z = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k_0^2(1+\delta)}}\, e^{-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, \Phi_{\mathrm{X}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{X}}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\, r}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}$$

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{1+\delta}\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}\, \Phi_{\mathrm{X}}(\lambda_{S_{\mathrm{X}}}, z)$$

XI:

$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}\, e^{z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}\, \Phi_{\mathrm{XI}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{XI}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}}\, \Phi_{\mathrm{XI}}(\lambda_{S_{\mathrm{XI}}}, z)$$

XII:

$$\Psi_z = -\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2(1+\delta)}}\, \Phi_{\mathrm{XII}}(\lambda, z)\, d\lambda, \quad \lambda_{S_{\mathrm{XII}}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\, r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\Psi_z \sim \frac{e^{j k_0 \sqrt{1+\delta}\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}}\, \Phi_{\mathrm{XII}}(\lambda_{S_{\mathrm{XII}}}, z)$$

Die Funktionen $\Phi_i(\lambda, z)$ $(i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots . \mathrm{XII})$.

$$\Phi_{\mathrm{I}}(\lambda, z) = e^{-\varkappa(z+z_0)}\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}$$

$$\times\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{-\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}; \end{array}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{-\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}; \end{array}\right\}$$

$$\text{wo}\quad \lambda = \lambda_{S_{\mathrm{I}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}\,.$$

$$\Phi_{\mathrm{II}}(\lambda, z) = e^{-\varkappa(z+z_0)}\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})$$

$$\times\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{-\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\ ; \end{array}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{-\varkappa z_0} \\ 1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}; \end{array}\right\}$$

$$\lambda = \lambda_{S_{\mathrm{II}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}}$$

$$\Phi_{\mathrm{III}}(\lambda, z) = e^{-\varkappa(z+z_0)}\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}$$

$$\times\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{-\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}; \end{array}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{-\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}; \end{array}\right\}$$

$$\lambda = \lambda_{S_{\mathrm{III}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}\ ;$$

$$\Phi_{\mathrm{IV}}(\lambda, z) = e^{-\varkappa(z+z_0)}\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})$$

$$\times\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\; -e^{-\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,; \end{matrix}\right\}\quad {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\; -e^{-\varkappa z} \\ 1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,; \end{matrix}\right\}$$

$$\lambda = \lambda_{S_{\mathrm{IV}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+(z_0-z)^2}}\,;$$

$$\Phi_{\mathrm{V}}(\lambda, z) = e^{\varkappa z_0\left(-1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}$$

$$\times\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\; -e^{-\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\,; \end{matrix}\right\}\quad {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\; -e^{-\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\,; \end{matrix}\right\}$$

$$\lambda = \lambda_{S_{\mathrm{V}}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\,r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,;$$

$$\Phi_{\mathrm{VI}}(\lambda, z) = e^{-z_0\sqrt{\lambda^2+k_0^2(1+\delta)}}\,e^{-\varkappa z}\,(1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}$$

$$\times\; {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\; -e^{\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\,; \end{matrix}\right\}\quad {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\; -e^{-\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,; \end{matrix}\right\}$$

$$\lambda = \lambda_{S_{\mathrm{VI}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\Phi_{VII}(\lambda, z) = (1 + e^{\varkappa z})(1 + e^{\varkappa z_0})$$

$$\times\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\ -e^{\varkappa z} \\ 1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\,; \end{array}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\ -e^{\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_2^2(1+\delta)}\,; \end{array}\right\}$$

$$\lambda = \lambda_{S_{VII}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\,r}{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}}\,;$$

$$\Phi_{VIII}(\lambda, z) = (1 + e^{\varkappa z})(1 + e^{\varkappa z_0})\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}$$

$$\times\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\ -e^{\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\,; \end{array}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\ -e^{\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\,; \end{array}\right\}$$

$$\lambda = \lambda_{S_{VIII}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\,r}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}\,;$$

$$\Phi_{IX}(\lambda, z) = (1 + e^{\varkappa z})(1 + e^{\varkappa z_0})$$

$$\times\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\ -e^{\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\,; \end{array}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,, \\ 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\,;\ -e^{\varkappa z_0} \\ 1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\,; \end{array}\right\}$$

$$\lambda = \lambda_{S_{IX}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\,r}{\sqrt{r^2+(z_0-z)^2}}\,;$$

$$\Phi_{\mathrm{X}}(\lambda,z) = (1+e^{\varkappa z})\,(1+e^{\varkappa z_0})\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}$$

$$\times\,{}_2F_1\left\{\begin{matrix}1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)};\end{matrix}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{matrix}1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{\varkappa z_0} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)};\end{matrix}\right\}$$

$$\lambda = \lambda_{S_{\mathrm{X}}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\,r}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}$$

$$\Phi_{\mathrm{XI}}(\lambda,z) = 2\,(1+e^{-\varkappa z})\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}$$

$$\times\,{}_2F_1\left\{\begin{matrix}1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{-\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\end{matrix}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{matrix}1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -1 \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)};\end{matrix}\right\}$$

$$\lambda = \lambda_{S_{\mathrm{XI}}} = \frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,;$$

$$\Phi_{\mathrm{XII}}(\lambda,z) = 2\,(1+e^{\varkappa z})\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\right)}$$

$$\times\,{}_2F_1\left\{\begin{matrix}1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -1 \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\end{matrix}\right\}\ {}_2F_1\left\{\begin{matrix}1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}, \\ 1-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)}+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2};\ -e^{\varkappa z} \\ 1-\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\lambda^2-k_0^2(1+\delta)};\end{matrix}\right\}$$

$$\lambda = \lambda_{S_{\mathrm{XII}}} = \frac{k_0\sqrt{1+\delta}\,r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,.$$

4.5.7. *Physikalische Diskussion der Lösungsintegrale in Sattelpunktsnäherung.*

Zunächst stellen wir fest, daß die 12 Integrale uns das Fitzgeraldsche Potential Ψ_z geben, aus dem die Feldstärken sich durch Differentiationen nach Gl. (196) (197) (198) (201) (202) (203) errechnen. Es erscheint zweckmäßig, sich hier auf die Vektorkomponente E_φ zu beschränken.

Nun ist aber

$$E_\varphi = -j\omega \frac{\partial \Psi_z}{\partial r}. \tag{198}$$

Da wir es mit einer asymptotischen Näherung zu tun haben, wollen wir in der Ordnung $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{r}$ bleiben.

Wir haben zu bilden (im Falle I)

$$\begin{aligned} &-j\omega \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{j k_0 \sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}\,\Phi_{\mathrm{I}}(\lambda_{S_{\mathrm{I}}}, z)\right) \\ &= -j\omega\left(\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{e^{j k_0 \sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}\right)\Phi_{\mathrm{I}}(\lambda_{S_{\mathrm{I}}}, z) \\ &\quad -j\omega\,\frac{e^{j k_0 \sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}\,\frac{\partial \Phi_{\mathrm{I}}(\lambda_{S_{\mathrm{I}}}, z)}{\partial \lambda_{S_{\mathrm{I}}}}\,\frac{\partial \lambda_{S_{\mathrm{I}}}}{\partial r}. \end{aligned} \tag{316}$$

Mit

$$R_{\mathrm{I}} = \sqrt{r^2+(z+z_0)^2} \tag{317}$$

wird

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{e^{j k_0 R_{\mathrm{I}}}}{R_{\mathrm{I}}} = j\,\frac{e^{j k_0 R_{\mathrm{I}}}}{R_{\mathrm{I}}}\,k_0 \sin\vartheta - \frac{e^{j k_0 R_{\mathrm{I}}}}{R_{\mathrm{I}}^2}\sin\vartheta, \tag{318}$$

wo

$$\sin\vartheta = \frac{r}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}}. \tag{319}$$

Den Term mit $\frac{1}{R^2}$ vernachlässigen wir, da wir uns nur auf Glieder 1. Ordnung beschränken.

Weiterhin berechnen wir $\frac{\partial \lambda_{S_{\mathrm{I}}}}{\partial r}$; wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{k_0 r}{\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}} = \frac{k_0}{R_{\mathrm{I}}} - \frac{k_0 r^2}{R_{\mathrm{I}}^3}. \tag{320}$$

Dies führt zusammen mit $-j\omega\frac{e^{j k_0 R_{\mathrm{I}}}}{R_{\mathrm{I}}}$ auf ein Glied von 2. Ordnung in $\frac{1}{R_{\mathrm{I}}}$ und kann daher vernachlässigt werden. Es bleibt also

$$E_\varphi \sim \omega k_0 \sin\vartheta\,\frac{e^{j k_0 R_{\mathrm{I}}}}{R_{\mathrm{I}}}\,\Phi_{\mathrm{I}}(\lambda_{S_{\mathrm{I}}}, z). \tag{321}$$

Der Faktor $\sin\vartheta$ hat folgende anschauliche Bedeutung: In bekannter Analogie zur elektrischen Hertzschen Lösung hat die magnetische Lösung für Ψ_z ein Richtdiagramm von der Form einer Kugel (im homogenen Medium). Durch Differentiation nach r entsteht E_φ, das das bekannte Torusdiagramm aufweist. Unter Beschränkung auf die Größenordnung $\frac{1}{R}$ sehen wir, daß es genügt, den Übergang zu E_φ nur in $e^{jk_0 R_{\mathrm{I}}}/R_{\mathrm{I}}$ auszuführen; die anderen Glieder fallen asymptotisch diesem gegenüber weg. Abgesehen von $j\omega k_0$ bedeutet dieser Übergang nur eine Multiplikation mit dem von der Richtung abhängigen Faktor $\sin\vartheta$ und wir haben hier $\lambda_{S_{\mathrm{I}}} = k_0 \sin\vartheta$. Dann entspricht das Integral I dem nach oben von der Schicht wegreflektierten Teil, der in den 2. Teil des Integrals I_1 in Anhang 3 übergeht, wenn $\varkappa \to \infty$. Der Γ-Faktor entspricht direkt dem Reflexionsfaktor von Gl. (96)

$$R\uparrow = \frac{\Gamma(1-\beta)\ \Gamma(\alpha+1-\gamma)\ \Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\ \Gamma(\beta+1-\gamma)\ \Gamma(\alpha-\beta)}\,. \tag{96}$$

$$R_{\mathrm{I}} = \sqrt{r^2 + (z+z_0)^2} \tag{322}$$

zeigt, daß die Welle von einem Spiegelbild des Senders in $z = -z_0$ herzukommen scheint, ebenso wie beim unstetigen Übergang.

Wir sehen also, daß sich auch beim kontinuierlichen Übergang von $\varepsilon = 1$ zu $\varepsilon = 1 + \delta$ der Spiegelpunkt als Zentrum der Reflexion erhält.

Das Integral II stellt hier die „einfallende Welle" dar, die vom Sender in $z = z_0 > 0$ herkommt

$$(1+e^{\varkappa z})\ {}_2F_1(\ldots - e^{-\varkappa z}), \quad (1+e^{\varkappa z_0})\ {}_2F_1(\ldots - e^{-\varkappa z_0})$$

geben von der Inhomogenität des Mediums herrührende Verzerrungen an, die physikalisch als „innere Reflexion" [26] gedeutet werden müssen.

In beiden Integralen haben wir für E_φ in erster Näherung die Form $\sin\vartheta\,\frac{e^{jkR}}{R}\,\Phi(\lambda_S, z)$, wo λ_S nur von der Richtung abhängt, also für konstante Richtung konstant ist. $\Phi(\lambda_S, z)$ ist aber auch noch von z abhängig; wir sehen hier einen wesentlichen Unterschied des Verhaltens der Richtdiagramme gegenüber dem homogenen Medium: Im homogenen Medium sind für große R in verschiedenen Abständen vom Sender die Richtdiagramme dieselben, sie hängen nur vom Winkel ϑ ab. Im inhomogenen Medium kommt noch eine Abhängigkeit von z dazu, die in verschiedenen Entfernungen zu verschiedenen Richtdiagrammen führt. Es wäre wünschenswert, disese Diagramme numerisch auszuwerten.

In ähnlicher Weise können wir jetzt alle übrigen Integrale diskutieren. Wir haben gesehen, daß sie für $\varkappa \to \infty$ in diejenigen der Tabelle von A_3 übergehen, wobei zu einem Integral von A_3 bei einem aus zwei Teilen bestehenden Klammerausdruck zwei Integrale des inhomogenen Mediums gehören, wie wir hier am Beispiel von I und II schon gesehen haben.

So entsprechen dem

Integral von Anhang 3	die Integrale der Tabelle der 12 Lösungsintegrale:
I_1)	I + II
I_2)	III + IV
I_3)	V
II_1)	VI
II_2)	VII + VIII
II_3)	IX + X
III_1)	XI
III_2)	XII

In den Integralen von Anhang 3 sehen wir jeweils unmittelbar Reflexions- und Übertragungsfaktoren an unstetigen Übergängen, in den 12 Lösungsintegralen sehen wir in analoger Weise einfallende Wellen, reflektierte und durchlaufende Wellen; die Wellen sind durch innere Reflexion verzerrt $\left((1+e^{\varkappa z})\ {}_2F_1(\ldots)\right)$.

Reflexions- und Durchgangsfaktoren sind aus den Tabellen ersichtlich und stimmen mit denjenigen von 3.4.3. überein, wenn man $r/\sqrt{r^2+(\ )^2}$ als $\sin\vartheta$ deutet, wobei in der Klammer ( ) z, $z+z_0$, $z-z_0$ stehen kann.

Die Einzelheiten sind nach dem Vorstehenden klar und ihre Diskussion kann dem Leser überlassen werden.

4.5.8. *Vergleich mit der Strahlenoptik.*

Die wesentlichen Züge der Berechnung der Strahlen sind im Anhang 1 gegeben: von einem Sender gehen Strahlen aus, die folgende Eigenschaften zeigen: Um $\vartheta = 0$ herum werden sie nur etwas von der z-Achse weggebrochen, von einem bestimmten Einfallwinkel ab kehren die Strahlen nach unten um und können eine Kaustik bilden. Die Einzelheiten sind im Anhang 1 nachzulesen.

Man kann nun nach Kenntnis der Strahlen eine Lösung unseres Problems in folgender Weise versuchen: Wir verfolgen zwei benachbarte Strahlen, die sich um einen Einfallswinkel $d\vartheta$ unterscheiden. $E(\vartheta)\,H(\vartheta)\cdot 2\pi\cdot\sin\vartheta\,ds$, $ds = ds(\vartheta)$ ist die Leistung, die in den Gürtel mit Öffnung $d\vartheta$ hineingestrahlt wird; in einem Abstand R wäre im homogenen Medium die Fläche senkrecht zur Wellennormalen $R\cdot 2\pi\sin\vartheta\,d\vartheta$. (Fig. 14).

Im inhomogenen Medium müssen wir diese Fläche zwischen zwei Winkeln ϑ, $\vartheta + d\vartheta$ aus den Strahlengängen entnehmen. In der Umgebung einer Kaustik muß eine Intensitätserhöhung auftreten.

Zunächst treten Reflexionen in dieser Lösung nur in sehr versteckter Form auf: Umkehrende Strahlen bedeuten totale Reflexion. Andererseits müssen in der Nähe einer Kaustik die Integrale numerisch ausgewertet werden, und der Verlauf der Kaustik kann genau auch nur mit numerischen Mitteln gefunden werden, die dem Verfasser nicht zur Verfügung stehen.

In beiden Lösungen, der wellenoptischen und der strahlenoptischen, müssen die Feldkomponenten numerisch ausgewertet und verglichen werden.

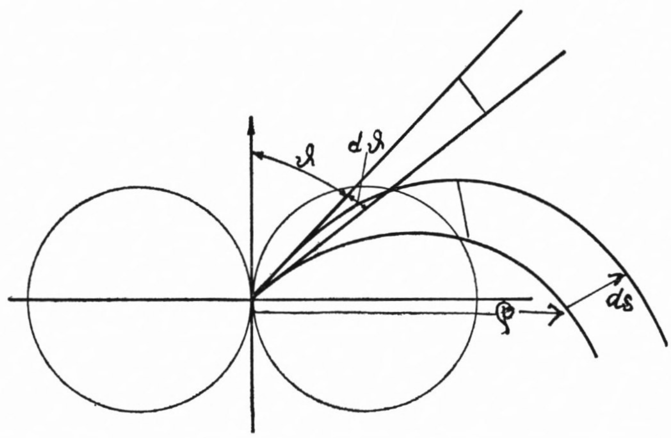

Fig. 14

ANHANG

A 1. STRAHLENOPTISCHE BEHANDLUNG.

A 1.1. Die betrachtete Funktion $\varepsilon = f(z)$.

Wir wählen die Funktion, die für alle vorhergehenden Rechnungen benutzt wurde

$$\varepsilon(z) = 1 + \frac{\delta}{1 + e^{\varkappa z}}. \tag{49}$$

Sie ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet: (siehe Fig. 1!)

$$\begin{aligned} z &\to -\infty: & \varepsilon &\to 1 + \delta \\ z &= 0 & \varepsilon &= 1 + \delta/2 \\ z &\to +\infty & \varepsilon &\to 1. \end{aligned} \tag{323}$$

In $z = 0$ ist

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = -\frac{\varkappa\delta}{4}. \tag{324}$$

Die Tangente in $z = 0$ schneidet die Linie:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 + \delta \quad \text{in } z = -\frac{2}{\varkappa}, \quad \varepsilon = 1 + \delta \\ \varepsilon &= 1 \qquad\quad \text{in } z = +\frac{2}{\varkappa}, \quad \varepsilon = 1. \end{aligned} \tag{325}$$

Die Gleichung dieser Tangente lautet:

$$\varepsilon = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta_\varkappa}{4} z. \tag{326}$$

Wir ersetzen später $\varepsilon = f(z)$ durch folgenden Kurvenzug:

$$\begin{aligned} & z > \frac{2}{\varkappa} : \varepsilon = 1 \\ & \frac{2}{\varkappa} \geqq z \geqq -\frac{2}{\varkappa} : \varepsilon = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta_\varkappa}{4} z \\ & z < -\frac{2}{\varkappa} \qquad \varepsilon = 1 + \delta. \end{aligned} \tag{327}$$

A 1.2. Die $\varepsilon = f(z)$ entsprechenden Strahlen.

Mit dem Brechnungsgesetz:

$$\varepsilon(z) \sin^2 \vartheta = n^2(z) \sin^2 \vartheta = n^2(z_0) \sin^2 \vartheta_0 \tag{328}$$

(siehe Fig. 18) finden wir:

Von irgendeinem Punkte

$$x = x_0, \quad z = z_0$$

gehen Strahlen aus, die an irgendeiner Stelle horizontal verlaufen und dann umkehren, und solche Strahlen, die nicht umkehren.

A 1.2.1. *Nicht umkehrende Strahlen.*

A 1.2.1.1. DER GRENZWINKEL ϑ FÜR NICHT UMKEHRENDE STRAHLEN.

$\varepsilon(z)$ ist eine mit zunehmendem z monoton fallende Funktion. ϑ ist der Winkel der Strahltangente mit der Vertikalen. Mit zunehmendem z muß $\sin \vartheta$ dann auf einem Strahl zunehmen, und es ist

$$(\sin \vartheta)_{max} = 1\,. \tag{329}$$

Wenn ein Strahl in z_0 den Winkel ϑ_0 hat, gilt für den Punkt, in dem der Strahl horizontal verläuft und umkehrt:

$$\varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0 = \varepsilon(z_n) \cdot 1, \qquad z_u = z_{Umkehrniveau} \tag{330}$$

daher

$$\sin^2 \vartheta_0 = \frac{\varepsilon(z_u)}{\varepsilon(z_0)}\,. \tag{331}$$

ϑ_0 ist für $z = z_0$ der Winkel, der der Grenze zwischen umkehrenden und nicht umkehrenden Strahlen entspricht.

Der kleinste mögliche Wert von ϑ_0 als Funktion von z ergibt sich für einen bei $z = -\infty$ ($\varepsilon = \varepsilon_{max} = 1 + \delta$) startenden Strahl:

$$\sin^2 \vartheta_{0\,min} = \frac{1}{1 + \delta}\,. \tag{332}$$

Der Strahl, der beim kleinsten $\varepsilon = 1$ ($z = +\infty$) horizontal wird, hat bei irgendeinem z den Winkel:

(333) $$\vartheta_0 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\delta}{1+e^{\varkappa z}}}}\right),$$

was für $z \to \infty$ in $\sin\vartheta_0 = 1$, $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ übergeht.

A 1.2.1.2. DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG FÜR DIE STRAHLEN.

A 1.2.1.2.1. Ihre Integration für nicht umkehrende Strahlen.

Die Differentialgleichung folgt direkt aus dem Brechungsgesetz (330):

(334) $$\varepsilon(z)\sin^2\vartheta = \varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0 = c_0.$$

Mit

(335) $z = f(x)$ als Strahlgleichung gilt:

(336) $$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\vartheta, \text{ (Fig. 15)}$$

also

(337) $$\sin^2\vartheta = \frac{1}{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Dies gibt mit (334)

(338) $$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{\varepsilon(z_0)-c_0}{c_0}}.$$

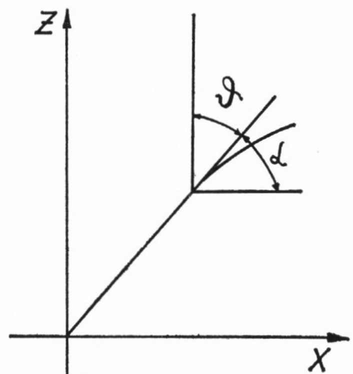

Fig. 15

Positives Zeichen der Wurzel bedeutet mit wachsendem x aufsteigendem Strahl, negatives nach unten mit demselben Winkel absteigenden Strahl.

Für nicht umkehrende Strahlen muß c_0 so klein sein, daß

(339) $$c_0 = \varepsilon(z_0)\sin^2\vartheta_0 < 1.$$

$c_0 = 1$ würde Strahlumkehr bei $z = +\infty$ bedeuten. Dann erhalten wir:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{c_0}} \sqrt{1 + \frac{\delta}{1+e^{\varkappa z}} - c_0}. \tag{340}$$

Mit der Substitution $e^{\varkappa z} = u$ wird

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{c_0}}\, dx = \frac{du}{u\sqrt{1 + \frac{\delta}{1+u} - c_0}}, \tag{341}$$

also mit einer Integrationskonstante C_1

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{c_0}}(x + C_1) = \int \sqrt{\frac{1+u}{(1-c_0)u + (1-c_0+\delta)}}\, \frac{du}{u}. \tag{342}$$

Mit der bekannten Substitution: ([34] S. 31)

$$\frac{1+u}{(1-c_0)u + (1+\delta-c_0)} = \frac{1}{1-c_0} y^2 \tag{343}$$

und der Bezeichnung

$$\frac{1}{\delta_0^2} = 1 + \frac{\delta}{1-c_0} > 1, \quad c_0 < 1 \tag{344}$$

ergibt sich dann nach trivialer Rechnung:

$$\frac{\varkappa(x+C_1)}{\sqrt{c_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-c_0}} \ln\left[\left(\frac{y-\delta_0}{y+\delta_0}\right)^{\delta_0}\left(\frac{y+1}{y-1}\right)\right] \tag{345}$$

und daraus

$$\varkappa(x + C_1) = \ln\left[\left(\frac{\sqrt{e^{\varkappa z}+1} - \delta_0\sqrt{e^{\varkappa z} + 1/\delta_0^2}}{\sqrt{e^{\varkappa z}+1} + \delta_0\sqrt{e^{\varkappa z} + 1/\delta_0^2}}\right)^{\delta_0}\left(\frac{\sqrt{e^{\varkappa z}+1} + \sqrt{e^{\varkappa z} + 1/\delta_0^2}}{\sqrt{e^{\varkappa z}+1} - \sqrt{e^{\varkappa z} + 1/\delta_0^2}}\right)\right]^{-\frac{c_0}{\sqrt{1-c_0}}}. \tag{346}$$

Wenn wir Strahlen durch einen Punkt $\begin{matrix} z = z_0 \\ x = 0 \end{matrix}$ haben wollen, ergibt sich C_1 aus der Bedingung:

$$x = 0 \text{ für } z = z_0. \tag{347}$$

Ein solcher Strahl wird von der z-Achse weggebrochen und muß dann asymptotisch in eine Gerade übergehen. (Fig. 18, nicht umkehrender Strahl).

A 1.2.2. *Umkehrende Strahlen.*

Die Bedingung für umkehrende Strahlen ist analog zu (339)

$$\varepsilon(z_0) \sin^2\vartheta_0 = c_0 > 1. \tag{348}$$

Dann ist für den Umkehrpunkt $z = z_u$

$$c_0 = \varepsilon(z_u) = 1 + \frac{\delta}{1 + e^{\varkappa z_u}}. \tag{349}$$

Es gilt natürlich auch hier das Brechnungsgesetz und damit (338), wo hier die Wurzel für $z > z_u$ imaginär würde.

A 1.2.2.1. INTEGRATION DER DIFFERENTIALGLEICHUNG.

Wir betrachten den Strahl vom Umkehrpunkt aus ($z = z_u$, $x = 0$) und erhalten mit (349)

$$\sqrt{\frac{\delta}{1 + \delta + e^{\varkappa z_u}}}\,(x + C) = \int_z^{z_u} \sqrt{\frac{1 + e^{\varkappa z}}{e^{\varkappa z_u} - e^{\varkappa z}}}\, dz. \quad \text{(Fig. 16).} \tag{350}$$

Mit $e^{\varkappa z} = u$, $e^{\varkappa z_u} = u_0$ und $\frac{1 + u}{u_0 - u} = y^2$ erhalten wir schließlich nach einiger Rechnung:

$$\varkappa(x + C) = \sqrt{\frac{1 + \delta + e^{\varkappa z_u}}{\delta}} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{e^{\varkappa z} + 1} + e^{-\frac{\varkappa z_u}{2}} \sqrt{e^{\varkappa z_u} - e^{\varkappa z}}}{\sqrt{e^{\varkappa z} + 1} - e^{-\frac{\varkappa z_u}{2}} \sqrt{e^{\varkappa z_u} - e^{\varkappa z}}} \right)^{e^{-\frac{\varkappa z_u}{2}}} + \right. \tag{351}$$

$$\left. + \;\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + e^{\varkappa z}}{e^{\varkappa z_u} - e^{\varkappa z}}} \right\}.$$

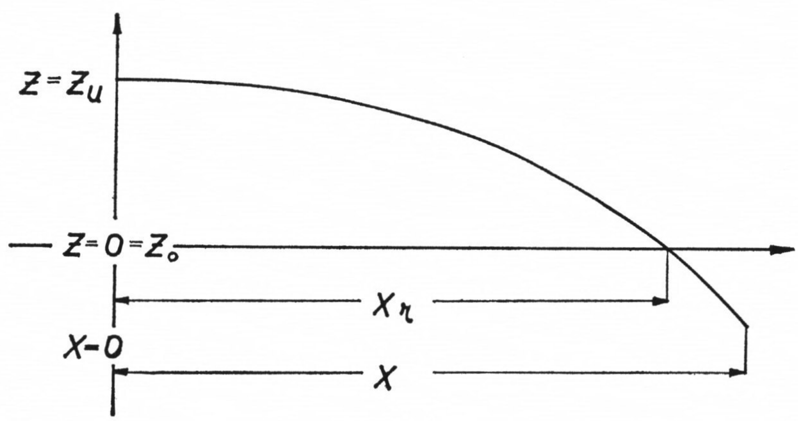

Fig. 16

Mit

$$x = 0, \quad z = z_u \tag{352}$$

wird

$$C = 0. \tag{353}$$

Wenn z_u und damit $e^{\varkappa z_u}$ variiert, bekommen wir eine Schar von Strahlen, die in $x = 0$, $z = z_u$ horizontal verläuft. (Fig. 17.)

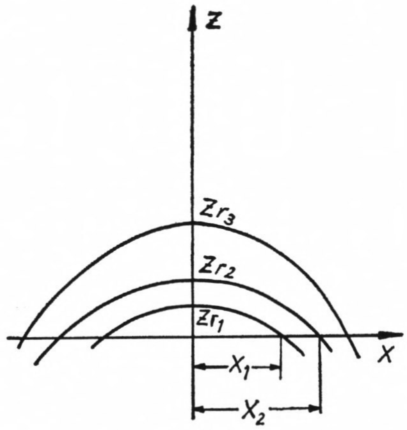

Fig. 17

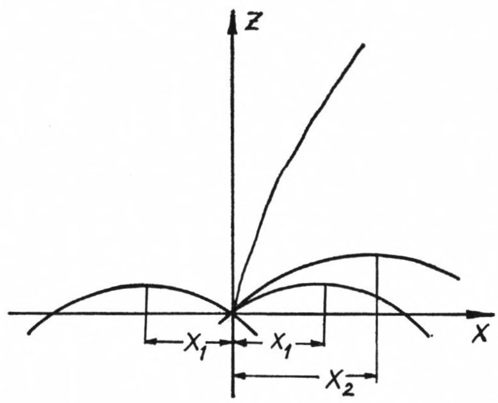

Fig. 18

A 1.2.3. *Das Strahlenbüschel durch einen Punkt.*

Wir müssen nun durch Verschieben der Strahlen in der x-Richtung ein Strahlenbüschel konstruieren, das durch einen Punkt $x = 0$, $z = z_0$ geht. Wir müssen die Strahlen so verschieben, daß sie (siehe Fig. 18) durch den Punkt z_0, $x = 0$ gehen. Dann befinden sich die Scheitel im Abstand

x_1 für den Strahl z_{u_1}

x_2 für den Strahl z_{u_2} u.s.f.

A 1.2.3.1. ASYMPTOTISCHE DARSTELLUNG DER STRAHLEN; KAUSTIK.

Wir wollen jetzt, um einen überblickbaren Ausdruck für eine Kaustik zu bekommen, asymptotische Darstellungen für die Strahlen angeben. Wir müssen für jeden Strahl nach Gl. (351) zunächst die Konstante C kennen, um die er nach rechts verschoben werden muß.

Wir beschränken uns auf ein Strahlenbündel durch $x = 0$, $z = 0$. Die Großen x_u, x_2 in der Fig. 18 bezeichnen wir als x_{u_1}, x_{u_2} nämlich die Abszissen, in denen die Strahlen umkehren. Wir finden mit $z = 0$ in (351)

$$\varkappa x_u = \sqrt{\frac{1+\delta+e^{\varkappa z_u}}{\delta}} \left\{ \ln\left(\frac{\sqrt{2}+e^{-\frac{\varkappa z_u}{2}}}{\sqrt{2}-e^{-\frac{\varkappa z_u}{2}}}\right)^{e^{-\frac{\varkappa z_u}{2}}} + \pi - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2}{e^{\varkappa z_u}-1}} \right\} = \varkappa C. \tag{354}$$

A 1.2.3.2. DIE ASYMPTOTISCHE DARSTELLUNG EINER KAUSTIK.

Für Strahlen, die im Bereich $x \to \infty$, $z \to -\infty$ eine Kaustik, d.h. eine Hüllkurve bilden, kommen sehr große Werte von z_u in Frage. Wir entwickeln also den obigen Ausdruck für große z_u und finden nach einiger Rechnung: (Fig. 19, 20)

$$\varkappa x_u \underset{z_u \to \infty}{\sim} \frac{\pi e^{\frac{\varkappa z_u}{2}}}{\sqrt{\delta}} + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) + O\left(e^{-\frac{\varkappa z_u}{2}} \right) = \varkappa C. \tag{355}$$

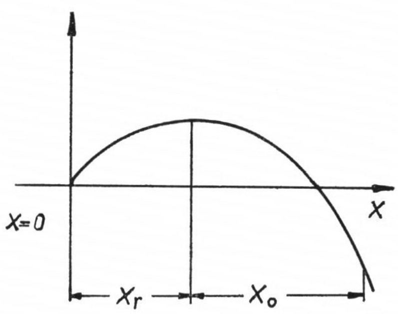

Fig. 19

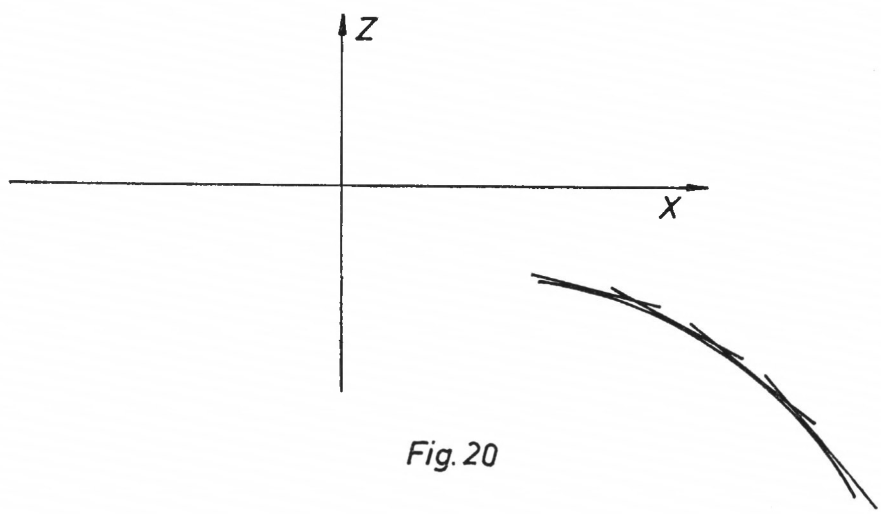

Fig. 20

Jetzt haben wir noch $\varkappa x_0$ darzustellen. Wenn wir z_u als groß positiv und z als negativ von großem Betrage annehmen und (351) entwickeln, finden wir

$$\varkappa x_0 = -z \left(\frac{\varkappa}{\sqrt{\delta}} + \frac{\varkappa}{2} \frac{(1+\delta)}{\sqrt{\delta}} e^{-\varkappa z_u} \right) + \ln \frac{4}{\sqrt{\delta}} \left(1 + \frac{1}{2} (1+\delta) e^{-\varkappa z_u} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\varkappa z_u}{2}} + \tag{356}$$

$$+ \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} (1+\delta)\, e^{-\frac{\varkappa z_u}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\delta}} \left(1 + \frac{1}{2} (1+\delta) e^{-\varkappa z_u} \right) e^{-\frac{\varkappa z_u}{2}}.$$

Dann bekommen wir als Asymptote der Strahlen für $x \to +\infty$, $z \to -\infty$

(357) $$\varkappa x = \varkappa (x_u + x_0) \sim \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\varkappa z_u}{2}} - \frac{z\varkappa}{\sqrt{\delta}} \left(1 + \frac{1}{2} (1+\delta) e^{-\varkappa z_u}\right) + \frac{\ln 4}{\sqrt{\delta}}.$$

Dies ist eine Kurvenschar mit dem Parameter $e^{\varkappa z_u}$. Wenn wir in üblicher Weise mittels $\frac{\partial \varkappa x}{\partial e^{\varkappa z_u}} = 0$ und Elimination die Hüllkurve bilden, so finden wir für die asymptotische Kaustik:

(358) $$\varkappa x = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{4\pi}{-z\varkappa(1+\delta)}} - \frac{\ln 4}{\sqrt{\delta}} + \frac{\varkappa z}{\sqrt{\delta}} \left(1 + \frac{1}{2}(1+\delta) \sqrt{\frac{-z\varkappa(1+\delta)}{4\pi}}\right)$$

(z ist negativ, $-z$ positiv).

A 1.3. Näherungsdarstellung des Eikonals.

Kurven konstanten Eikonals sind Orthogonaltrajektorien der Strahlen. Wir haben bisher keine Festsetzung über den Faktor δ getroffen. Nun ist aber in der Troposphäre $\delta < 10^{-3}$. Es liegt nahe, eine Störungstheorie des Eikonals aufzustellen und nach Potenzen von δ zu entwickeln. Wenn wir in der x–z-Ebene bleiben, was wir wegen der Rotationssymmetrie des Strahlenbündels tun dürfen, also Unabhängigkeit von y annehmen, so genügt das Eikonal folgender Differentialgleichung:

(359) $$(\operatorname{grad} S)^2 = n^2(z) = 1 + \frac{\delta}{1+e^{\varkappa z}}.$$

Wir schreiben:

(360) $$S = S_0 + \delta S_1 + \cdots$$

und vernachlässigen höhere Glieder.

Dann wird:

(361) $$(\operatorname{grad} S)^2 = (\operatorname{grad} S_0)^2 + 2\delta (\operatorname{grad} S_0, \operatorname{grad} S_1) = 1 + \frac{\delta}{1+e^{\varkappa z}}.$$

Also:

(362) $$(\operatorname{grad} S_0, \operatorname{grad} S_1) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+e^{\varkappa z}}.$$

Nun ist aber im homogenen Medium

(363) $$S = S_0 = \sqrt{x^2 + (z-z_0)^2} = R \qquad \left(\text{Sender in } \begin{matrix} x = 0 \\ z = z_0 \end{matrix}\right).$$

Also:

(364) $$\frac{\partial S_0}{\partial x} = \frac{x}{R} = \alpha, \quad \frac{\partial S_0}{\partial z} = \frac{z-z_0}{R} = \gamma$$

(α, γ Richtungscosinus).

Also wird aus (362)

(365) $$\alpha \frac{\partial S_1}{\partial x} + \gamma \frac{\partial S_1}{\partial z} = \frac{\partial S_1}{\partial R} = \frac{1}{2(1+e^{\varkappa z})}.$$

Also

(366) $$S_1 = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{1}{1+e^{\varkappa z}} \, dR.$$

Wegen (363) ist

(367) $$z = z_0 + \sqrt{R^2 - x^2} = z_0 + R \cos \vartheta,$$

also

(368) $$S_1 = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{dR}{1 + e^{\varkappa z_0} e^{\varkappa R \cos \vartheta}}.$$

Dieses Integral kann leicht elementar ausgerechnet werden. Mit

(369) $$e^{\varkappa R \cos \vartheta} = y \qquad \frac{dy}{y \varkappa \cos \vartheta} = dR$$

wird:

(370) $$S_1 = \frac{1}{2\varkappa \cos \vartheta} \ln \frac{e^{\varkappa R \cos \vartheta}(1 + e^{-\varkappa z_0})}{e^{\varkappa R \cos \vartheta} + e^{-\varkappa z_0}}.$$

Für $\cos \vartheta > 0$ ist $e^{\varkappa R \cos \vartheta} > 1$, der Zähler des Logarithmanden größer als sein Nenner, daher der Logarithmus positiv.

Für $\cos \vartheta < 0$ gilt:

(371) $$S_1 = \frac{1}{2\varkappa \cos \vartheta} \ln \frac{1 + e^{-\varkappa z_0}}{1 + e^{-\varkappa z_0} / e^{\varkappa R \cos \vartheta}},$$

hier wird der Logarithmus negativ.

Für $\cos \vartheta = 0$ wird nach (368)

(372) $$S_1 = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{dR}{1 + e^{\varkappa z_0}} = \frac{1}{2} R \cdot \frac{1}{1 + e^{\varkappa z_0}}.$$

A 2. Γ-FORMELN.

LAURENT-ENTWICKLUNGEN VON Γ-FUNKTIONEN.

Mit $C = \lim\limits_{m \to \infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \ln m \right)$ = Eulersche Konstante, finden wir

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - C + \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12} \right) z + \cdots; \quad \Gamma(1+z) = 1 - Cz + \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12} \right) z^2 + \cdots;$$

$$\Gamma(1-z) = 1 + Cz + \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12} \right) z^2 + \cdots; \quad \Gamma(2-z) = 1 + (C-1)\, z + \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12} - C \right) z^2 + \cdots;$$

A 2.1. Werte der Parameter α, β, γ.

$$\alpha = 1 + j \frac{k_0}{\varkappa} \left(\sqrt{1 + \delta - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0} - \sqrt{1 - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0} \right); \quad \beta = 1 + j \frac{k_0}{\varkappa} \left(\sqrt{1 + \delta - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0} + \sqrt{1 - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0} \right);$$

$$\gamma = 1 + 2j \frac{k_0}{\varkappa} \sqrt{1 + \delta - \varepsilon(z_0) \sin^2 \vartheta_0}; \quad \frac{1}{\varkappa} = \sigma \to 0, \text{ wenn } \varkappa \to \infty.$$

A 2.2. Γ-Formeln für $\varepsilon(z_0) = 1$.

$$\Gamma(\beta - \alpha) = \frac{j}{2 k_0 \sigma \cos \vartheta_0} - C + \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12} \right) \cdot 2 j k_0 \sigma \cos \vartheta_0 + \cdots; \quad \Gamma(1-\beta) = \frac{j}{k_0 \sigma \left(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + \delta} + \cos \vartheta_0 \right)} - C - \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12} \right) j k_0 \sigma \left(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + \delta} + \cos \vartheta_0 \right) + \cdots$$

$$\Gamma(1-\alpha) = \frac{j}{k_0 \sigma \left(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + \delta} - \cos \vartheta_0 \right)} - C - \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12} \right) j k_0 \sigma \left(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + \delta} - \cos \vartheta_0 \right) + \cdots; \quad \Gamma(\alpha - \beta) = \frac{j}{2 k_0 \sigma \cos \vartheta_0} - C - \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12} \right) 2 j k_0 \sigma \cos \vartheta_0 + \cdots$$

$$\Gamma(\beta+1-\gamma) = 1 + C j k_0 \sigma \left(\sqrt{\cos^2\vartheta_0 + \delta} - \cos\vartheta_0\right) - \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12}\right) k_0^2 \sigma^2 \left(\sqrt{\cos^2\vartheta_0 + \delta} - \cos\vartheta_0\right)^2 + \cdots;$$

$$\Gamma(\alpha+1-\gamma) = 1 + C j k_0 \sigma \left(\sqrt{\cos^2\vartheta_0 + \delta} + \cos\vartheta_0\right) - \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12}\right) k_0^2 \sigma^2 \left(\sqrt{\cos^2\vartheta_0 + \delta} + \cos\vartheta_0\right)^2 + \cdots;$$

$$\Gamma(1-\alpha) = \frac{j}{\sigma k_0 \left(\sqrt{\cos^2\vartheta_0 + \delta} - \cos\vartheta_0\right)} - C - j \sigma k_0 \left(\sqrt{\cos^2\vartheta_0 + \delta} - \cos\vartheta_0\right) + \cdots; \quad \Gamma(2-\gamma) = 1 + 2 j k_0 \sigma \sqrt{\cos^2\vartheta_0 + \delta} - \sigma^2 \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12}\right) 4 k_0^2 (\cos^2\vartheta_0 + \delta) \cdots;$$

A 2.3. Γ-Formeln für $\epsilon(z_0) = 1 + \delta$.

$$\Gamma(\gamma) = 1 - 2 j \sigma k_0 C \cos\vartheta_0 \sqrt{1+\delta} - \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12}\right) 4 \sigma^2 k_0^2 \cos^2\vartheta_0 (1+\delta) + \cdots$$

$$\Gamma(1-\beta) = \frac{j}{\sigma k_0 \left(\cos\vartheta_0 \sqrt{1+\delta} + \sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \delta \sin^2\vartheta_0}\right)} - C - j \sigma k_0 \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12}\right) \left(\cos\vartheta_0 \sqrt{1+\delta} + \sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \delta \sin^2\vartheta_0}\right) + \cdots;$$

$$\Gamma(1+\alpha-\gamma) = 1 + j k_0 C \sigma \left(\sqrt{1+\delta} \cos\vartheta_0 + \sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \delta \sin^2\vartheta_0}\right) - \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12}\right) \sigma^2 k_0^2 \left(\cos\vartheta_0 \sqrt{1+\delta} - \sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \delta \sin^2\vartheta_0}\right)^2 + \cdots;$$

$$\Gamma(2-\gamma) = 1 + 2 C j k_0 \sigma \cos\vartheta_0 \sqrt{1+\delta} - 4 k_0^2 \sigma^2 (1+\delta) \cos^2\vartheta_0 \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12}\right) + \cdots;$$

$$\Gamma(\gamma-\beta) = \frac{-j}{\sigma k_0 \left(\cos\vartheta_0 \sqrt{1+\delta} - \sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \delta \sin^2\vartheta_0}\right)} - C + \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12}\right) j \sigma k_0 \left(\cos\vartheta_0 \sqrt{1+\delta} - \sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \delta \sin^2\vartheta_0}\right) + \cdots;$$

$$\Gamma(\alpha) = 1 - C j \sigma k_0 \left(\cos\vartheta_0 \sqrt{1+\delta} - \sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \delta \sin^2\vartheta_0}\right) - \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12}\right) k_0^2 \sigma^2 \left(\cos\vartheta_0 \sqrt{(1+\delta)} - \sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \delta \sin^2\vartheta_0}\right)^2 + \cdots;$$

$$\Gamma(1-\gamma) = \frac{j}{2 k_0 \sigma \cos\vartheta_0 \sqrt{1+\delta}} - C - \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12}\right) 2 j k_0 \sigma \cos\vartheta_0 \sqrt{1+\delta} + \cdots;$$

$$\Gamma(1+\alpha-\beta) = 1 + 2 j k_0 \sigma C \sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \delta \sin^2\vartheta_0} - \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{\pi^2}{12}\right) 4 k_0^2 \sigma^2 (\cos^2\vartheta_0 - \delta \sin^2\vartheta_0) + \cdots.$$

A 3. UNSTETIGER ÜBERGANG ZWISCHEN $\varepsilon = 1$ UND $\varepsilon = 1 + \delta$, $\varkappa \to \infty$.

DIE SOMMERFELDSCHEN INTEGRALE.

I) $z_0 > 0$.

I 1) $z > z_0$.

$$\Psi_z = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}\, e^{-(z-z_0)\sqrt{\lambda^2-k_1^2}} \times \left(1 - e^{-2 z_0 \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\, \frac{\sqrt{\lambda^2-k_2^2} - \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}{\sqrt{\lambda^2-k_2^2} + \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\right) d\lambda$$

wo $k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \mu\, \varepsilon_0 \cdot 1$

$k_2^2 = \omega^2 \mu_0 \mu\, \varepsilon_0 (1+\delta)$

2) $z_0 > z > 0$.

$$\Psi_z = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \left(e^{(z-z_0)\sqrt{\lambda^2-k_1^2}} + e^{-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\, \frac{\sqrt{\lambda^2-k_2^2} - \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}{\sqrt{\lambda^2-k_2^2} + \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\right) d\lambda$$

3) $z_0 > 0 > z$.

$$\Psi_z = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}\, e^{z\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\, \frac{2\, e^{-z_0\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2-k_2^2} + \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\, d\lambda$$

II) $z_0 < 0$.

1) $z > 0 > z_0$.

$$\Psi_z = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}\, e^{-z\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\, \frac{2\, e^{z_0\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2} + \sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\, d\lambda$$

2) $0 > z > z_0$.

$$\Psi_z = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \left(e^{-(z-z_0)\sqrt{\lambda^2-k_2^2}} + e^{(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\, \frac{\sqrt{\lambda^2-k_2^2} - \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}{\sqrt{\lambda^2-k_2^2} + \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\right) d\lambda$$

3) $0 > z_0 > z$.

$$\Psi_z = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}\, e^{(z-z_0)\sqrt{\lambda^2-k_2^2}} \left(1 + e^{2 z_0\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\, \frac{\sqrt{\lambda^2-k_2^2} - \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}{\sqrt{\lambda^2-k_2^2} + \sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\right) d\lambda$$

III) $z_0 = 0$.

1) $z > 0$.

$$\Psi_z = \int_0^\infty \frac{2 J_0(\lambda r)\, \lambda\, e^{-z\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}}{\sqrt{\lambda^2-k_2^2}+\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\, d\lambda$$

2) $z < 0$.

$$\Psi_z = \int_0^\infty \frac{2 J_0(\lambda r)\, \lambda\, e^{z\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}}{\sqrt{\lambda^2-k_2^2}+\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\, d\lambda .$$

A 4. SATTELPUNKTSBEHANDLUNG DES INTEGRALS VON LAMB-SOMMERFELD.

Das fragliche Integral lautet:

$$J = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, e^{-|z|\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, \lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^{(1)}(\lambda r)\, \lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, e^{-|z|\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, d\lambda = \frac{e^{jkR}}{R},$$

wo $R^2 = r^2 + z^2$.

Wir ersetzen $H_0^{(1)}(\lambda r)$ durch seine Integraldarstellung:

$$H_0^{(1)}(\lambda r) = \frac{1}{\pi}\int_{+j\infty}^{-j\infty} e^{j\lambda r\cos\alpha}\, d\alpha .$$

Dann wird für $z > 0$:

$$J = \int_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \int_{\alpha=j\infty}^{\alpha=-j\infty} \frac{e^{j\lambda r\cos\alpha - z\sqrt{\lambda^2-k^2}}}{\sqrt{\lambda-k^2}}\, \lambda\, d\alpha\, d\lambda,$$

wo
$$\sqrt{\lambda^2-k^2} \to \lambda \qquad \lambda \to +\infty$$
$$\sqrt{\lambda^2-k^2} \to -j\left|\sqrt{\lambda^2-k^2}\right| \qquad \lambda < k.$$

Um die Sattelpunktsentwicklung zu finden, berechnen wir zunächst:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(j\lambda r\cos\alpha - z\sqrt{\lambda^2-k^2}\right) = -j\lambda r\sin\alpha$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(j\lambda r\cos\alpha - z\sqrt{\lambda^2-k^2}\right) = -j\lambda r\cos\alpha$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\lambda}\left(j\lambda r\cos\alpha - z\sqrt{\lambda^2-k^2}\right) = -jr\sin\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(j\lambda r\cos\alpha - z\sqrt{\lambda^2-k^2}\right) = jr\cos\alpha - \frac{z\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(j\lambda r\cos\alpha - z\sqrt{\lambda^2-k^2}\right) = +\frac{zk^2}{(\lambda^2-k^2)^{3/2}}.$$

Der Sattelpunkt ist definiert durch:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} = 0 : \alpha_s = 0, \quad \lambda_s = \frac{kr}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

Der Exponent des Integranden muß nun in der Umgebung des Sattelpunktes entwickelt werden:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)_{\alpha_s} = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_s} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\right)_{\substack{\alpha=\alpha_s\\ \lambda=\lambda_s}} = j\,\frac{(r^2+z^2)^{3/2}}{kz^2}; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right)_{\substack{\alpha=\alpha_s\\ \lambda=\lambda_s}} = -\frac{jkr^2}{\sqrt{r^2+z^2}}; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha\, \partial \lambda}\right)_{\substack{\alpha=\alpha_s\\ \lambda=\lambda_s}} = 0.$$

Wenn wir jetzt den Exponenten entwickeln und Glieder von höherer als 2. Ordnung vernachlässigen, finden wir:

$$J \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{+j\infty}^{-j\infty} \frac{\lambda_s}{\sqrt{\lambda_s^2-k^2}} \exp\left[jkR + \frac{jR^3}{2!\,kz^2}(\lambda-\lambda_s)^2 - \frac{jkr^2}{2!\,R}(\alpha-\alpha_s)^2\right] d(\lambda-\lambda_s)\, d(\alpha-\alpha_s);$$

hier betrachten wir $\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}$ als „langsam veränderlich".

Es ist $\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\right)_{\lambda=\lambda_s} = j\,\frac{r}{z}$.

Nun setzen wir:

$$\begin{aligned} j(\lambda-\lambda_s)^2 &= -s^2, & \sqrt{j}\,(\lambda-\lambda_s) &= js \\ -j(\alpha-\alpha_s)^2 &= -t^2, & \sqrt{-j}\,(\alpha-\alpha_s) &= jt \\ & & d(\lambda-\lambda_s) &= -\sqrt{j}\,ds \\ & & d(\alpha-\alpha_s) &= \sqrt{j}\,dt. \end{aligned}$$

Jetzt integrieren wir in s und t von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$

$$J \sim \frac{1}{2\pi}\, j\,\frac{r}{z} \int_{s=-\varepsilon}^{s=+\varepsilon} \int_{t=-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\,[jkR]\, \exp\left[-\frac{R^3 s^2}{2!\,kz^2} - \frac{kr^2 t^2}{2!\,R}\right] ds\, dt.$$

Mit $\sqrt{\frac{R^3}{2!\,kz^2}}\, s = \sigma$, $\sqrt{\frac{kr^2}{2!\,R}}\, t = \tau$ finden wir:

$$J \sim \frac{j}{2\pi}\,\frac{r}{z}\,(-j)\,\sqrt{\frac{2!\,kz^2}{R^3}}\,\sqrt{\frac{2!\,R}{kr^2}} \int_{\sigma=-\varepsilon\sqrt{\frac{R^3}{2!\,kz^2}}}^{+\varepsilon\sqrt{\frac{R^3}{2!\,kz^2}}} e^{-\sigma^2}\, d\sigma \int_{\tau=-\varepsilon\sqrt{\frac{kr^2}{2!\,R}}}^{+\varepsilon\sqrt{\frac{kr^2}{2!\,R}}} e^{-\tau^2}\, d\tau \to \frac{e^{jkR}}{R},$$

wenn wir $r \to \infty$, $R \to \infty$, $\frac{r^2}{R} \to \infty$, $\frac{R^3}{z^2} \to \infty$ gehen lassen.

11*

A 5. VERZEICHNIS DER ABBILDUNGEN.

Seite

Fig. 1 $\varepsilon = f(z)$ 15

Fig. 2. x, y, z-Koordinatensystem 15

Fig. 3. $z > z_0$: $\varepsilon = f(z)$ $z \leq z_0$: $\varepsilon = f(z_0)$ $z_0 > 0$ 27

Fig. 4. $z > z_0$: $\varepsilon = f(z)$ $z \leq z_0$: $\varepsilon = f(z_0)$ $z_0 = 0$ 27

Fig. 5. $z > z_0$: $\varepsilon = f(z)$ $z < z_0$: $\varepsilon = f(z_0)$ $z_0 < 0$ 27

Fig. 6. $z < z_0$: $\varepsilon = f(z)$ $z > z_0$: $\varepsilon = f(z_0)$ $z_0 > 0$ 27

Fig. 7. $z < z_0$: $\varepsilon = f(z)$ $z > z_0$: $\varepsilon = f(z_0)$ $z_0 = 0$ 27

Fig. 8. $z < z_0$: $\varepsilon = f(z)$ $z > z_0$: $\varepsilon = f(z_0)$ $z_0 < 0$ 27

Fig. 9. Homogene Schicht zwischen oberem und unterem Medium 44

Fig. 10. λ-Ebene mit Integrationsweg $0 - \infty$ 54

Fig. 11. $\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$-Ebene, Sommerfelds Wahl der Zweige 54

Fig. 12. $\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$-Ebene, unsere Wahl der Zweige 55

Fig. 13. λ-Ebene mit Integrationsweg von $-\infty$, $+\infty$ 55

Fig. 14. Sender im inhomogenen Medium 69

Fig. 15. Definition des Winkels α 72

Fig. 16. Horizontaler Strahl in $z = z_r$, $x = 0$ 74

Fig. 17. Strahlen, die in $x = 0$ horizontal verlaufen mit variablem z_0 75

Fig. 18. Strahlen durch $x = 0$, $z = 0$ 75

Fig. 19. Definition von x_0 für einen Strahl 76

Fig. 20. Asymptotische Kaustik 76

LITERATUR.

[1] Gordon-Booker, PIRE Vol. 38, 1950, Nr. 4
[2] G. Eckart, Bayer. Ak. der Wiss., Math.-Naturw. Klasse Abhandl. Neue Folge Heft 74
[3] G. Eckart, dto Heft 76
[4] G. Eckart, dto Heft 77
[5] G. Eckart, dto Heft 84
[6] G. Eckart, Ztschr. f. Angew. Ph. Vol. 10, Heft 8 S. 393./.395
[7] G. Eckart, Z. f. Flugwissensch. Vol. 5 (1957) Heft 3 S. 69–72
[8] G. Eckart, Annales Universitatis Saraviensis, Naturwiss., Sciences 4. IV. 1955, S. 268–293
[9] Schünemann, siehe 35)
[10] P. S. Epstein, Proc. Nat. Ac. Sc. Vol. 16, 1930, S. 627–637
[11] A. Rawer, Annalen der Physik, V. Folge Vol. 35, 1939, S. 385–416
[12] Carl Eckart, Phys. Review 35, 1930, 1303
[13] Felix Klein, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion. Springer 1933
[14] Appell-Kampé de Fériet, Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques. Gauthier-Villars 1926
[15] Whittaker-Watson, A Cours of Modern Analysis. Cambridge 1950
[16] Chester Snow, Hypergeometric and Legendre Functions With Applications to Integral Equations of Potential Theory. Nat. Bureau of Standards, Appl. Math. Ser. 19
[17] J. Lense, Kugelfunktionen A. V. G. 1950
[18] E.T.Copson, An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable. Oxford, University Press 1950
[19] Magnus-Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Springer 1948
[20] Bateman-Erdelyi-Magnus-Oberhettinger-Tricomi, Higher Transcendental Functions Vol. 1. McGraw-Hill 1953
[21] Riemann-Weber, Differentialgleichungen der Physik. Vieweg, Auflage von 1919
[22] Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig 1895
[23] Schlesinger, Differentialgleichungen. Göschen 1904
[24] Bieberbach, Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Springer 1953
[25] Ince, Ordinary Differential Equations. Dover Publications
[26] G. Eckart-Kahan, Archiv f. Elektrotechnik Vol. 40 2. Heft 1951, S. 133–140
[27] Bremmer, Terrestrial Radio Wawes. Elsevier 1949
[28] Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, A. V. G. 1930
[29] Sommerfeld, Annalen der Physik 1909, S. 665 ff.
[30] Sommerfeld, Partielle Differentialgleichungen der Physik, A. V. G. 1947
[31] Frank-Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, II. Bd. Vieweg 1927, 1934
[32] H. Weyl, Annalen der Physik 1919, S. 485 ff.
[33] Noether in „Rothe-Ollendorff-Pohlhausen", Funktionstheorie und ihre Anwendung in der Technik. Springer 1931
[34] Gröbner-Hofreiter, Integraltafel. Springer 1949
[35] Schünemann, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik 66, 1957 S. 29–37