BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1981

MÜNCHEN 1982

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die schwach und die stark wachsende Hierarchie zahlentheoretischer Funktionen

Ulf R. Schmerl[1]

In dieser Arbeit werden Eigenschaften der Funktionen der sog. schwach wachsenden Hierarchie untersucht und einige Verbindungen zur stark wachsenden Grzegorczyk/Wainer-Hierarchie angegeben. Bei diesen Hierarchien handelt es sich um Familien von schwach bzw. streng monoton aufsteigenden Funktionen G_α bzw. F_α auf den natürlichen Zahlen, die meist mit Ordinalzahlen indiziert werden und folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} G_0(n) &= 0 & \qquad F_0(n) &= 2^n \\ G_{\alpha+1}(n) &= G_\alpha(n) + 1 & \qquad F_{\alpha+1}(n) &= F_\alpha^n(n) \\ G_\lambda(n) &= G_{\lambda[n]}(n) & \qquad F_\lambda(n) &= F_{\lambda[n]}(n), \end{aligned}$$

falls λ eine Limeszahl und $(\lambda[x])_{x<\omega}$ ihre ausgezeichnete Hauptfolge ist. Das Wachstum der G_α und F_α nimmt mit größer werdendem Index α zu.

Die Eigenschaften der Funktionen der beiden Hierarchien hängen wesentlich von der Wahl der ausgezeichneten Hauptfolgen für Limeszahlen ab. Die üblichen Ordinalzahlbezeichnungssysteme mit den darin festgelegten ausgezeichneten Hauptfolgen setzen einer Untersuchung der Eigenschaften der Funktionen G_α und einem Vergleich der beiden Hierarchien erhebliche Hindernisse entgegen. Um diese Schwierigkeiten zunächst zu umgehen, wird in § 1 ein einfaches System *a*bstrakter *O*rdinal*n*otationen, kurz Aonen, eingeführt, auf denen die G_α besonders einfache Eigenschaften annehmen. Die Aonen stellen keine

---

[1] Für zahlreiche Anregungen und Vorschläge danke ich Herrn Professor Schütte.

Ordinalzahlen dar, es sind vielmehr baumartige Strukturen, die partiell wohlgeordnet sind. Sie werden aus den Ausgangssymbolen 0, ω, Ω mit Hilfe von Funktionen $'$ (Nachfolger), $+$, $\cdot$, exp und f erzeugt. f ist eine Erweiterung der stark wachsenden Hierarchie auf die Aonen. Die Tatsache, daß die schwach wachsende Hierarchie hier besonders einfache Eigenschaften aufweist, läßt sich durch folgendes Homomorphieresultat ausdrücken: Ist g eine der eben aufgeführten Funktionen, so gilt

$$G_{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}(n) = g(G_{\alpha_1}(n), \ldots, G_{\alpha_k}(n)) \qquad (k = 1, 2 \text{ oder } 3),$$

für jede natürliche Zahl n und alle Aonen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (dabei werden Aonen, die ohne Verwendung der Symbole ω und Ω erzeugt sind, in naheliegender Weise mit natürlichen Zahlen identifiziert). Dieser Satz wird in § 2 bewiesen. Alle weiteren Ergebnisse dieses § lassen sich daraus als mehr oder weniger unmittelbare Folgerungen gewinnen. So kann die Verknüpfung $G_\alpha \circ G_\beta$ zweier Funktionen G_α, G_β durch eine einfach zu definierende Verknüpfung $\circ$ auf den Aonen charakterisiert werden. Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$G_\alpha(G_\beta(n)) = G_{\alpha\circ\beta}(n), \text{ d. h. } G_\alpha \circ G_\beta = G_{\alpha\circ\beta}.$$

Auch ein Vergleich der schwach mit der stark wachsenden Hierarchie ergibt sich als direkte Folgerung des Homomorphiesatzes (s. Satz 19). Ein entsprechendes Resultat wurde zuerst von Girard in [5] bewiesen. Jervell [6] und Schwichtenberg [8] gaben eine andere Version des Girardschen Beweises an, unabhängige Beweise lieferten Aczel [1], Buchholz [3] und Cichon und Wainer [4]. Die Einfachheit des hier angegebenen Beweises beruht darauf, daß die zur Erzeugung der Aonen verwendeten Funktionen f_α gerade Fortsetzungen der Funktionen F_α der Grzegorczyk/Wainer-Hierarchie auf die Aonen sind. Außerdem werden in § 2 gewisse Monotonitätseigenschaften der G_α bewiesen, die den von Schwichtenberg in [7] gezeigten Eigenschaften der F_α entsprechen.

Die Definition der schwach wachsenden Hierarchie auf einer nur partiellen Ordnung wie den Aonen stellt natürlich, trotz der hübschen Eigenschaften, einen Nachteil gegenüber der Definition auf einem – linear geordneten – Ordinalzahlabschnitt dar, wo sich größeres Wachstum und höherer Platz in der Hierarchie direkt entsprechen. Aber wenigstens ein Vergleich mit der stark wachsenden Hierarchie ist, mit Hilfe eines Umwegs über die Aonen, auch dann möglich. Dazu wird in § 3 jeder Ordinalzahl $\alpha \leqslant \varphi_{\varepsilon_{\Omega+1}} 0$, der Bachmann/Howard-Zahl, in kanonischer Weise ein Aon $\bar{\alpha}$ zugeordnet, so daß sich die Funktionen G_α (auf den Ordinalzahlen) und $G_{\bar{\alpha}}$ (auf den Aonen) bezüglich der Stärke ihres Wachstums sehr ähnlich verhalten, denn eine geringfügige Vergrößerung des Arguments der einen führt zu einer Majorante der jeweils anderen:

$$G_{\bar{\alpha}}(n) \leqslant G_\alpha(n+2)$$
$$G_\alpha(n) \leqslant G_{\bar{\alpha}}(n+1).$$

Da geeignete G_a nach Satz 19 direkt mit der stark wachsenden Hierarchie verglichen werden können, gelten entsprechende Ungleichungen dann auch zwischen den G_α und zugehörigen F_β. Die Gleichheit wie in Satz 19 geht hier also verloren, man hat lediglich eine Äquivalenz, die sich aus der gegenseitigen Majorisierbarkeit ergibt. Dies ist jedoch kein großer Nachteil: Funktionenhierarchien wie die hier betrachteten dienen dazu, das Wachstum anderer Funktionen durch Vergleich mit denen in der Hierarchie zu klassifizieren. Gleichheit tritt dabei im allgemeinen ohnehin nicht auf.

§ 1. Aonen.

1. Induktive Definition der Menge AON, $a < \omega$ und $a < \Omega$:

(1) $0, \omega, \Omega \in \mathrm{AON}, \quad 0 < \omega, \quad 0, \omega < \Omega$

(2) $\alpha \in \mathrm{AON} \to \alpha' \in \mathrm{AON}, \quad \alpha < \genfrac{}{}{0pt}{}{\omega}{\Omega} \to \alpha' < \genfrac{}{}{0pt}{}{\omega}{\Omega}$

(3) $\alpha, \beta \in \mathrm{AON} \to \alpha + \beta \in \mathrm{AON}, \quad \alpha, \beta < \genfrac{}{}{0pt}{}{\omega}{\Omega} \to \alpha + \beta < \genfrac{}{}{0pt}{}{\omega}{\Omega}$

(4) $\alpha, \beta \in \mathrm{AON}, \quad \alpha, \beta < \Omega \to \alpha \cdot \beta \in \mathrm{AON}, \quad \alpha \cdot \beta < \Omega$
$\alpha, \beta < \omega \to \alpha \cdot \beta < \omega$

(5) $\alpha, \beta \in \mathrm{AON}, \ \alpha, \beta < \Omega \to \alpha \exp \beta \in \mathrm{AON}, \ \alpha \exp \beta < \Omega,$
$\alpha, \beta < \omega \to \alpha \exp \beta < \omega$

(6) $\alpha, \beta \in \mathrm{AON}, \quad \beta < \Omega \rightarrow \Omega^\alpha, \quad \Omega \cdot \beta, \quad \Omega^\alpha \cdot \beta \in \mathrm{AON}$

(7) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{AON}, \quad \beta, \gamma < \Omega \rightarrow f_\alpha(\beta), f_\alpha^\gamma(\beta) \in \mathrm{AON},$
$f_\alpha(\beta), f_\alpha^\gamma(\beta) < \Omega$
$\alpha, \beta, \gamma < \omega \rightarrow f_\alpha(\beta), f_\alpha^\gamma(\beta) < \omega$

2. Induktive Definition von $=$, Lim_ω, Lim_Ω, $[\,]$:

(1) $\alpha = \alpha, \quad \alpha = \beta \rightarrow \beta = \alpha, \quad \alpha = \beta \wedge \beta = \gamma \rightarrow \alpha = \gamma$

(2) $\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 \rightarrow \alpha_1' = \alpha_2',$
$\alpha_1 \overset{+}{\underset{\exp}{}} \beta_1 = \alpha_1 \overset{+}{\underset{\exp}{}} \beta_2,$
$\Omega^{\alpha_1} = \Omega^{\alpha_2}, \quad f_{\alpha_1}(\beta_1) = f_{\alpha_2}(\beta_2), f_{\alpha_1}^{\gamma_1}(\beta_1) = f_{\alpha_2}^{\gamma_2}(\beta_2)$

(3) $\alpha = \beta, \quad \alpha \in {\mathrm{Lim}_\omega \atop \mathrm{Lim}_\Omega} \rightarrow \beta \in {\mathrm{Lim}_\omega \atop \mathrm{Lim}_\Omega},$

(4) $\omega \in \mathrm{Lim}_\omega, \quad \Omega \in \mathrm{Lim}_\Omega$
$n < \omega \rightarrow \omega[n] = n$ (das Vorderglied der Implikation
$\eta < \Omega \rightarrow \Omega[\eta] = \eta$ in der Def. von $\alpha[n]$ bzw. $\alpha[\eta]$
wird künftig weggelassen)

(5) $\alpha = \beta, \quad \beta \in {\mathrm{Lim}_\omega \atop \mathrm{Lim}_\Omega} \rightarrow \alpha[{n \atop \eta}] = \beta[{n \atop \eta}]$

(6) $\alpha + 0 = \alpha, \ \alpha + \beta', = (\alpha + \beta)', \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
$\beta \in {\mathrm{Lim}_\omega \atop \mathrm{Lim}_\Omega} \rightarrow \alpha + \beta \in {\mathrm{Lim}_\omega \atop \mathrm{Lim}_\Omega}, \quad (\alpha + \beta)[{n \atop \eta}] = \alpha + \beta[{n \atop \eta}]$

(7) $\alpha \cdot 0 = 0, \quad \alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha, \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma,$
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
$\beta \in \mathrm{Lim}_\omega \rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mathrm{Lim}_\omega, \quad (\alpha \cdot \beta)[n] = \alpha \cdot \beta[n]$

(8) $\alpha \exp 0 = 0', \quad \alpha \exp \beta' = (\alpha \exp \beta) \cdot \alpha$
$\beta \in \mathrm{Lim}_\omega \rightarrow \alpha \exp \beta \in \mathrm{Lim}_\omega,$
$(\alpha \exp \beta)[n] = \alpha \exp \beta[n]$

(9) $\Omega \cdot 0 = 0, \quad \Omega^\alpha \cdot 0 = 0$
$\Omega \cdot \beta' = \Omega \cdot \beta + \Omega, \quad \Omega^\alpha \cdot \beta' = \Omega^\alpha \cdot \beta + \Omega^\alpha$
$\beta \in \mathrm{Lim}_\omega \rightarrow \Omega \cdot \beta, \quad \Omega^\alpha \cdot \beta \in \mathrm{Lim}_\omega, \quad (\Omega \cdot \beta)[n] = \Omega \cdot \beta[n]$
$(\Omega^\alpha \cdot \beta)[n] = \Omega^\alpha \cdot \beta[n]$
$\Omega^0 = 0', \quad \Omega^0 \cdot \beta = \beta$
$\Omega^{\alpha'} \in \mathrm{Lim}_\Omega, \quad \Omega^{\alpha'}[\eta] = \Omega^\alpha \cdot \eta$
$\alpha \in {\mathrm{Lim}_\omega \atop \mathrm{Lim}_\Omega} \rightarrow \Omega^\alpha \in {\mathrm{Lim}_\omega \atop \mathrm{Lim}_\Omega}, \quad \Omega^\alpha[{n \atop \eta}] = \Omega^{\alpha[{n \atop \eta}]}$

(10) $f_0(\beta) = 0'' \exp \beta$

$f_\alpha^0(\beta) = \beta, \quad f_\alpha^{\gamma'}(\beta) = f_\alpha(f_\alpha^\gamma(\beta))$

$\gamma \in \mathrm{Lim}_\omega \rightarrow f_\alpha^\gamma(\beta) \in \mathrm{Lim}_\omega, f_\alpha^\gamma(\beta)[n] = f_\alpha^{\gamma[n]}(\beta)$

$f_{\alpha'}(\beta) = f_\alpha^\beta(\beta)$

$\alpha \in \mathrm{Lim}_\omega \rightarrow f_\alpha(\beta) \in \mathrm{Lim}_\omega, f_\alpha(\beta)[n] = f_{\alpha[n]}(\beta)$

$\alpha \in \mathrm{Lim}_\Omega \rightarrow f_\alpha(\beta) = f_{\alpha[\beta]}(\beta)$.

3. Definition:

(1) Die Menge Koeff (α) der Koeffizienten eines Aons α:
- ist $\alpha < \Omega$, so ist Koeff $(\alpha) = \{\alpha\}$
- Koeff $(\Omega) = \{0'\}$, Koeff $(\Omega \cdot \beta) = \{0', \beta\}$,
  Koeff $(\Omega^\alpha) =$ Koeff $(\alpha) \cup \{0'\}$,
  Koeff $(\Omega^\alpha \cdot \beta) =$ Koeff $(\alpha) \cup \{\beta\}$
- Koeff $(\alpha + \beta) =$ Koeff $(\alpha) \cup$ Koeff (β) $\quad (\neg\, \alpha + \beta < \Omega)$.

(2) $\alpha^{(n)}$ für natürliche Zahlen n : $\alpha^{(0)} := \alpha$, $\alpha^{(n+1)} := (\alpha^{(n)})'$.

(3) Ein Aon $\alpha < \Omega$ heiße nachfolgerfundiert, wenn es ein Aon β, welches nicht Nachfolger ist, und eine natürliche Zahl n gibt, so daß $\alpha = \beta^{(n)}$. Ein beliebiges Aon heiße nachfolgerfundiert, wenn alle seine Koeffizienten nachfolgerfundiert sind.

(4) Jedem nachfolgerfundierten Aon α wird als Nachfolgernorm eine Ordinalzahl $\|\alpha\|$ zugewiesen:
- ist $\alpha < \Omega$, $\alpha = \beta^{(n)}$ mit β nicht Nachfolger, so ist $\|\alpha\| = n$
  $\|\Omega\| = \omega$, $\|\Omega \cdot \beta\| = \omega \cdot \|\beta\|$, $\|\Omega^\alpha\| = \omega^{\|\alpha\|}$,
  $\|\Omega^\alpha \cdot \beta\| = \omega^{\|\alpha\|} \cdot \|\beta\|$
- Ist δ von der Form Ω, $\Omega \cdot \beta$, Ω^α oder $\Omega^\alpha \cdot \beta$, so ist
  $\|\alpha + \delta\| = \|\alpha\| \# \|\delta\|$.

4. Lemma: Seien $\alpha \in \mathrm{Lim}_\Omega$ und $\beta < \Omega$ nachfolgerfundiert. Dann gilt: $$\|\alpha[\beta]\| < \|\alpha\|.$$

Beweis: trivial.

5. Satz: Jedes Aon ist nachfolgerfundiert.

Beweis: Durch Induktion über die Länge von α, wobei die Länge von Ausdrücken $f_\alpha(\beta)$, $f_\alpha^\gamma(\beta)$ definiert wird als

$$|f_\alpha^{\gamma(p)}(\beta^{(n)})| := \omega^2 \cdot \|\alpha\| + \omega \cdot p + n$$
$$|f_\alpha(\beta^{(n)})| := \omega^2 \cdot \|\alpha\| + \omega + n, \quad (|f_\alpha^\gamma(\beta)|,\ |f_\alpha(\beta)| < \varepsilon_0).$$

6. Folgerungen:

(1) $\forall \alpha \in \mathrm{AON}: \alpha = 0 \,\dot\vee\, \exists \beta(\alpha = \beta') \,\dot\vee\, \alpha \in \mathrm{Lim}_\omega \,\dot\vee\, \alpha \in \mathrm{Lim}_\Omega$

(2) $\alpha < \omega \to \exists n\ (\alpha = 0^{(n)})$

(3) $[\,]$ ist wohldefinierte Funktion auf $\{\alpha \in \mathrm{AON} \mid \alpha \in \mathrm{Lim}_\omega \cup \mathrm{Lim}_\Omega\}$.

7. Definition von $\prec$ und von Fundiertheit auf *AON*:

(1) Für jede natürliche Zahl n wird ebenfalls mit n das Aon $0^{(n)}$ bezeichnet.

(2) $\prec$ für Aonen $\prec \Omega$:
$\neg\, \alpha \prec 0,\ \alpha \prec \beta' \leftrightarrow \alpha \prec \beta \vee \alpha = \beta$
$\lambda \in \mathrm{Lim}_\Omega \to (\alpha \prec \lambda \leftrightarrow \exists n (\alpha \preceq \lambda[n]))$
$\alpha \prec \beta \wedge \beta \prec \gamma \to \alpha \prec \gamma$

(3) α heißt fundiert, in Zeichen $\underline{\alpha}$, wenn es keine unendliche Folge $(\alpha_i)_{i<\omega}$ gibt mit $\alpha \succ \alpha_0 \succ \alpha_1 \succ \ldots \succ \alpha_n \succ \ldots$

(4) $\prec$ für beliebige Aonen:
$\lambda \in \mathrm{Lim}_\Omega \to (\alpha \prec \lambda \leftrightarrow \exists \underline{\beta}\ (\alpha \preceq \lambda[\beta]))$.

Die Bedeutung von $\underline{\alpha}$ wird entsprechend erweitert.

8. Satz: Jedes Aon ist fundiert.

Beweis: Durch Induktion über die Länge der Aonen:

– die Behauptung ist klar für 0, ω, Ω

– $\underline{\alpha} \to \underline{\alpha'}$ und $\underline{\alpha} \wedge \underline{\beta} \to \underline{\alpha \overset{+}{\underset{\exp}{}} \beta}$, $\underline{\Omega^\alpha}$ sind einfach zu zeigen

– zum Beweis von $\underline{\alpha} \wedge \underline{\beta} \wedge \underline{\gamma} \rightarrow \underline{f_\alpha(\beta)}, \underline{f_\alpha^\gamma(\beta)}$ werden folgende einfache Hilfssätze verwendet:

$$\beta \rightarrow \underline{f_0(\beta)}$$
$$\forall \beta [\underline{\beta} \rightarrow \underline{f_\alpha(\beta)}] \rightarrow \forall \beta, \gamma [\underline{\beta} \wedge \underline{\gamma} \rightarrow \underline{f_\alpha^\gamma(\beta)}]$$
$$\alpha \in \mathrm{Lim}_\Omega \rightarrow \forall \beta \, \exists n \; \alpha[\beta]^n \notin \mathrm{Lim}_\Omega.$$

9. **Bemerkung:** Ausdrücke der Gestalt $f_\alpha(\omega)$ entsprechen – wie in § 3 gezeigt wird – bezüglich der schwach wachsenden Hierarchie Ordinalzahlen $\varphi_\alpha 0$.

§ 2. Die schwach wachsende Hierarchie auf AON.

10. **Definition der schwach wachsenden Hierarchie auf AON:**

$G_0(n) := 0$	$\bar{G}_0(n) := 0$
$G_{\alpha'}(n) := G_\alpha(n)'$	$\bar{G}_{\alpha'}(n) := \bar{G}_\alpha(n)'$
$G_\lambda(n) := G_{\lambda[n]}(n)$	$\bar{G}_\lambda(n) := \bar{G}_{\lambda[n]}(n)$, falls $\lambda \in \mathrm{Lim}_\omega$
$G_\Omega(n) := \Omega$	$\bar{G}_\Omega(n) := \omega$
$G_{\alpha_0 + \Omega^{\alpha_1} \cdot \beta}(n) := G_{\alpha_0}(n) + \Omega^{G_{\alpha_1}(n)} \cdot G_\beta(n)$	$\bar{G}_{\alpha_0 + \Omega^{\alpha_1} \cdot \beta}(n) := \bar{G}_{\alpha_0}(n) + \omega^{\bar{G}_{\alpha_1}(n)} \cdot \bar{G}_\beta(n)$.

11. **Folgerungen und Bemerkung:**

$$\alpha < \Omega \rightarrow G_\alpha(n) = \bar{G}_\alpha(n)$$
$$\alpha < \Omega \rightarrow G_\alpha(n) < \omega$$
$$G_\alpha(n) < \varepsilon_{\Omega+1}, \; \bar{G}_\alpha(n) < \varepsilon_0.$$

Nach Definition 10 sind die Bildbereiche der beiden Hierarchien G und $\bar{G}$ die Aonen. Da jedoch Aonen $< \omega$ mit natürlichen Zahlen identifiziert werden können, dürfen für Aonen $\alpha < \Omega$ G_α und $\bar{G}_\alpha$ auch als Funktionen in die natürlichen Zahlen aufgefaßt werden; außerdem können die Bilder der Hierarchie $\bar{G}$ mit Hilfe der Cantorschen Normalform mit Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$ identifiziert werden.

12. Lemma: Für alle $\alpha, \beta < \Omega$ und $n \in \boldsymbol{N}$ ist

$$G_{\alpha \overset{+}{\exp} \beta}(n) = G_\alpha(n) \overset{+}{\exp} G_\beta(n).$$

Beweis: Durch Induktion nach β.

13. Lemma: Sei $\alpha \in \mathrm{Lim}_\Omega$, $\beta < \Omega$. Dann gilt für alle $n \in \boldsymbol{N}$:

$$G_{\alpha[\beta]}(n) = G_\alpha(n)\,[G_\beta(n)].$$

Beweis: Durch Induktion nach der Länge von α.

14. Homomorphiesatz: G ist ein Homomorphismus auf AON, d. h. für alle $n \in \boldsymbol{N}$ ist

$$G_{\alpha'}(n) = G_\alpha(n) + 1 \qquad G_{\alpha \overset{+}{\exp} \beta}(n) = G_\alpha(n) \overset{+}{\exp} G_\beta(n)$$

$$G_{f_\alpha \beta}(n) = f_{G_\alpha(n)}(G_\beta(n)) \qquad G_{f_\alpha^\gamma(\beta)}(n) = f_{G_\alpha(n)}^{G_\gamma(n)}(G_\beta(n)).$$

Beweis: Es sind nur noch die Gleichungen mit Ausdrücken $f_\alpha(\beta)$ und $f_\alpha^\gamma(\beta)$ zu beweisen. Dies erfolgt durch Induktion nach α mit Nebeninduktion nach γ unter Benutzung der Lemmata 12 und 13.

15. Definition der Komposition von Aonen: Sei $\delta \in$ AON, $\delta < \Omega$.

(1) $0 \circ \delta = 0, \quad \omega \circ \delta = \delta, \quad \Omega \circ \delta = \Omega$

(2) $\alpha' \circ \delta = (\alpha \circ \delta)'$

(3) $(\alpha \overset{+}{\exp} \beta) \circ \delta = (\alpha \circ \delta) \overset{+}{\exp} (\beta \circ \delta), \quad \Omega^\alpha \circ \delta = \Omega^{\alpha \circ \delta}$

(4) $f_\alpha(\beta) \circ \delta = f_{\alpha \circ \delta}(\beta \circ \delta), \quad f_\alpha^\gamma(\beta) \circ \delta = f_{\alpha \circ \delta}^{\gamma \circ \delta}(\beta \circ \delta).$

16. Kompositionssatz: Für $\alpha, \delta \in$ AON, $\delta < \Omega$ gilt:

$G_\alpha(G_\delta(n)) = G_{\alpha \circ \delta}(n)$, d. h. $G_\alpha \circ G_\delta = G_{\alpha \circ \delta}$.

Beweis: Durch Induktion nach der Länge von α unter Verwendung des Homomorphiesatzes.

17. Definition:

(1) Die stark wachsende Grzegorczyk/Wainer-Hierarchie für Ordinalzahlen $\alpha < \varepsilon_0$:

$F_0(n) := 2^n$, $F_{\alpha+1}(n) := F_\alpha^n(n)$, $F_\lambda(n) := F_{\lambda[n]}(n)$ für Limeszahlen λ

(2) Sei $0 < \alpha < \varepsilon_0$ eine Ordinalzahl mit der Cantor-Darstellung $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_n}$. Dann sei $\hat{\alpha} := \Omega^{\hat{\alpha}_1} + \ldots + \Omega^{\hat{\alpha}_n}$. $\hat{0} := 0$.

18. Lemma: Für alle Aonen α und natürliche Zahlen n, m gilt:

$$f_{G_\alpha(m)}(n) = F_{\bar{G}_\alpha(m)}(n)$$

(dabei werden Aonen $< \omega$ mit natürlichen Zahlen identifiziert).

Beweis: Durch Induktion nach α unter Verwendung von Lemma 13.

19. Satz (Vergleich von schwach und stark wachsender Hierarchie):

(1) $G_{f_\alpha(\beta)}(n) = F_{\bar{G}_\alpha(n)}(G_\beta(n))$

(2) $G_{f_{\hat{\alpha}}(\omega)}(n) = F_\alpha(n)$ für Ordinalzahlen $\alpha < \varepsilon_0$

(3) mit $\varepsilon_{\Omega+1}[n] := \left.\Omega^{\Omega^{\cdot^{\cdot^{\Omega}}}}\right\}n$ gilt: $G_{f_{\varepsilon_{\Omega+1}}(\omega)}(n) = F_{\varepsilon_0}(n)$.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Homomorphiesatz und aus Lemma 18.

20. Satz: Für Aonen α, $\neg\, \alpha < \omega$ gilt: $G_\alpha(n) \geqslant n$.

Beweis: Durch Induktion nach der Länge von α und unter Verwendung des Homomorphiesatzes.

21. Definition: Die Fortsetzung $\alpha \sqsubset \beta$ eines Aons α:

(1) $\alpha \sqsubset_0 \beta :\leftrightarrow \exists \delta \neq 0 \quad \beta = \alpha + \delta$

(2) $\alpha + \beta \sqsubset_{n+1} \alpha + \delta :\leftrightarrow \beta \sqsubset_n \delta$

$\alpha \cdot \beta \sqsubset_{n+1} \alpha \cdot \delta :\leftrightarrow \beta \sqsubset_n \delta \wedge \alpha \neq 0$

$\alpha \exp \beta \sqsubset_{n+1} \alpha \exp \delta :\leftrightarrow \beta \sqsubset_n \delta \wedge \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 0'$

$$\Omega^\beta \sqsubset_{n+1} \Omega^\delta,\ \Omega \cdot \beta \sqsubset_{n+1} \Omega \cdot \delta,\ \Omega^\alpha \cdot \beta \sqsubset_{n+1} \Omega^\alpha \cdot \delta :\leftrightarrow \beta \sqsubset_n \delta$$

$$f_\alpha^\beta(\gamma) \sqsubset_{n+1} f_\alpha^\delta(\gamma) :\leftrightarrow \beta \sqsubset_n \delta$$

$$f_\alpha(\beta) \sqsubset_{n+1} f_\alpha(\delta) :\leftrightarrow \beta \sqsubset_n \delta$$

$$f_\beta(\alpha) \sqsubset_{n+1} f_\delta(\alpha) :\leftrightarrow \beta \sqsubset_n \delta$$

(3) $\alpha \sqsubset \beta :\leftrightarrow \exists n\, \alpha \sqsubset_n \beta.$

22. Satz: Ist $\alpha \sqsubset \beta$ und $n > 1$, so gilt: $G_\alpha(n) < G_\beta(n)$.

Beweis: $\alpha \sqsubset_k \beta \wedge n > 1 \rightarrow G_\alpha(n) < G_\beta(n)$ wird durch vollständige Induktion nach k bewiesen.

23. Lemma: (1) $\alpha \in \mathrm{Lim}_\omega \rightarrow \alpha[k] \sqsubset \alpha[k+1]$

(2) $\alpha \in \mathrm{Lim}_\Omega,\ \beta, \gamma < \Omega,$

$\beta \sqsubset \gamma \rightarrow \alpha[\beta] \sqsubset \alpha[\gamma].$

Beweis: Durch Induktion nach der Länge von α, unter Verwendung des Homomorphiesatzes.

24. Satz: $G_\alpha(n) \leqslant G_\alpha(n+1)$.

Beweis: Durch Induktion nach α, unter Verwendung des Homomorphiesatzes, Satz 22 und Lemma 23.

25. Satz: Ist $\alpha < \beta$, so gibt es ein $c \in \boldsymbol{N}$, so daß für alle $n \geqslant c$:

$$G_\alpha(n) \leqslant G_\beta(n).$$

Beweis: Durch Induktion nach α, unter Verwendung des Homomorphiesatzes, Satz 22 und Lemma 23.

26. Bemerkung: Die Sätze 20, 22, 24 und 25 entsprechen gleichartigen Resultaten für die Funktionen der stark wachsenden Hierarchie in Schwichtenberg [7].

§ 3. Die schwach wachsende Hierarchie auf einem Ordinalzahlabschnitt.

Im folgenden soll die schwach wachsende Hierarchie auf einer Menge ON von Ordinalzahlen definiert werden. ON enthalte 0 und Ω, die kleinste überabzählbare Ordinalzahl. Die abzählbaren Ordinalzahlen in ON werden mit Hilfe der Bachmannschen Funktionen φ (vgl. Bachmann [2]) bezeichnet, so daß sich jedes $\alpha \in$ ON, $0 < \alpha < \Omega$ in eindeutiger Weise in der Form

$$\alpha = \varphi_{\alpha_1}(\beta_1) + \ldots + \varphi_{\alpha_n}(\beta_n), \tag{1}$$

mit $\alpha_i, \beta_i \in$ ON, $\beta_i < \Omega$, $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) \geqslant \ldots \geqslant \varphi_{\alpha_n}(\beta_n)$, $\varphi_{\alpha_i}(\beta_i) \neq \beta_i$ und $\varphi_{\alpha_i}(\beta_i) \neq \alpha_i$ falls $\beta_i = 0$ darstellen läßt. Die darin auftretenden Indices α_i besitzen die Darstellung

$$\alpha_i = \Omega^{\alpha_{i1}} \cdot \beta_{i1} + \ldots + \Omega^{\alpha_{ik}} \cdot \beta_{ik} \tag{2}$$

mit $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in$ ON, $0 < \beta_{ij} < \Omega$, $\alpha_{i1} > \alpha_{i2} > \ldots > \alpha_{ik}$. Die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen in ON bildet einen Ordinalzahlabschnitt, der mit $\varphi_{\varepsilon_{\Omega+1}} 0$ bezeichnet wird, der Bachmann/Howard-Zahl. Für die Definition der ausgezeichneten Hauptfolge einer Limeszahl in ON ist ihre Darstellung nach (1) oder (2) maßgeblich. Die Hauptfolgen von Termen $\varphi_\alpha \beta$ werden folgendermaßen definiert:

$$\varphi_0(\beta + 1)[n] := \varphi_0(\beta) \cdot n$$

$$\varphi_0(\lambda)[n] := \varphi_0(\lambda[n]) \quad \text{wenn } \lambda \text{ Limeszahl ist}$$

$$\varphi_{\alpha+1}(0)[n] := \varphi_\alpha^n(0), \quad \varphi_{\alpha+1}(\beta + 1)[n] = \varphi_\alpha^n(\varphi_{\alpha+1}(\beta) + 1)$$

$$\varphi_{\alpha+1}(\lambda)[n] := \varphi_{\alpha+1}(\lambda[n]) \quad \text{wenn } \lambda \text{ Limeszahl ist.}$$

Für Limeszahlen α vom Typ ω ist

$$\varphi_\alpha(0)[n] := \varphi_{\alpha[n]}(0), \quad \varphi_\alpha(\beta + 1)[n] := \varphi_{\alpha[n]}(\varphi_\alpha(\beta) + 1)$$

$$\varphi_\alpha(\lambda)[n] := \varphi_\alpha(\lambda[n]) \quad \text{wenn } \lambda \text{ Limeszahl ist.}$$

Für Limeszahlen α vom Typ Ω ist

$$\varphi_\alpha(0)[0] := 1 \qquad \varphi_\alpha(0)[n + 1] := \varphi_{\alpha[\varphi_\alpha(0)[n]]}(0)$$

$$\varphi_\alpha(\beta + 1)[0] := \varphi_\alpha(\beta) + 1 \quad \varphi_\alpha(\beta + 1)[n + 1] := \varphi_{\alpha[\varphi_\alpha(\beta+1)[n^2]]}(0)$$

$$\varphi_\alpha(\lambda)[n] := \varphi_\alpha(\lambda[n]) \quad \text{wenn } \lambda \text{ eine Limeszahl ist.}$$

Die Definition der Hauptfolgen vom Typ ω und Ω von Ordinalzahlen in der Darstellung (2) entspricht genau der von Definition 2, (9).

Auf der Menge ON können nunmehr völlig analog zu Definition 10 die schwach wachsenden Hierarchien G_α und $\bar{G}_\alpha$ definiert werden. Die Folgerungen 11 bleiben dann entsprechend gültig. Bei Ausdrücken $G_\alpha(n)$ oder $\bar{G}_\alpha(n)$ muß also künftig unterschieden werden bzw. aus dem Zusammenhang klar sein, ob es sich bei α um eine Ordinalzahl oder ein Aon handelt.

27. Definition: Das Aon $\bar{\alpha}$ einer Ordinalzahl $\alpha \in$ ON:

(1) $\bar{0} := 0, \quad \bar{\Omega} := \Omega$

(2) $\overline{\sum_i \alpha_i} := \sum_i \bar{\alpha}_i, \quad \overline{\Omega^\alpha \cdot \beta} := \Omega^{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\beta}$

(3) $\overline{\varphi_0(\beta)}$: β habe die Darstellung $\varphi_0^k(0)$ oder $\varphi_0^k(\beta_1 + \beta_2)$ mit $\beta_1 + \beta_2 = \beta_1 \# \beta_2$, β_1 additive Hauptzahl, $\beta_2 \neq 0$, $k \in \boldsymbol{N}$. Dann sei

$$\overline{\varphi_0^{k+1}(0)} := \underbrace{\omega \exp \omega \exp \ldots \omega \exp}_{k+1} 0$$

$$\varphi_0^{k+1}(\beta_1 + \beta_2) := \begin{cases} \overline{\varphi_0(\beta_1)} \cdot \overline{\varphi_0(\beta_2)} & \text{falls } k = 0 \\ \overline{\varphi_0^{k+1}(\beta_1)} \exp \overline{\varphi_0^k(\beta_1)} \ldots & \\ \ldots \exp \overline{\varphi_0^2(\beta_1)} \exp \varphi_0(\beta_2) & \text{sonst.} \end{cases}$$

(4) $\overline{\varphi_{\alpha+1}\beta}$: Sei $k \in \boldsymbol{N}$, $\gamma > \alpha + 1$ und $\delta < \Omega$. Dann ist

$$\overline{\varphi_{\alpha+1}(\beta)} := \begin{cases} f^{\overline{\omega\mu}}_{\bar{\alpha}+i}(f^{k+1}_{\bar{\alpha}+1+i}\omega) & \text{falls } \beta = \varphi^k_{\alpha+1}0 + \mu \text{ mit} \\ \mu < \varphi^{k+1}_{\alpha+1}0 & \\ f^{\overline{\omega\mu}}_{\bar{\alpha}+i}(\overline{\varphi_\gamma\delta}) & \text{falls } \beta = \varphi_\gamma\delta + \mu \text{ mit} \\ \mu < \varphi_\gamma\delta + \varphi_\gamma\delta & \\ f^{\overline{\omega\mu}}_{\bar{\alpha}+i}(f^{k+1}_{\bar{\alpha}+1+i}(\overline{\varphi_\gamma\delta})) & \text{falls } \beta = \varphi^k_{\alpha+1}(\varphi_\gamma\delta \cdot 2) + \\ \mu \text{ mit } \mu < \varphi^{k+1}_{\alpha+1}(\varphi_\gamma\delta \cdot 2) & \end{cases}$$

wobei $i = 0$ falls $\alpha < \omega$ ist und $i = 1$ sonst.

(5) $\overline{\varphi_\alpha(\beta)}$ für α Limeszahl vom Typ ω: Sei $k \in \boldsymbol{N}$, $\gamma > \alpha$ und $\delta < \Omega$.

$$\overline{\varphi_\alpha(\beta)} := \begin{cases} f_{\bar\alpha}^{1+\beta}(\omega) \text{ falls } \beta < \omega \\ f_{\bar\alpha}^{\overline{\omega\mu}}(f_{\bar\alpha+1}^{k+1}\omega) \text{ falls } \beta = \varphi_\alpha^k\omega + \mu \text{ mit } \mu < \varphi_\alpha^{k+1}\omega \\ f_{\bar\alpha}^{\overline{\omega\mu}}(\overline{\varphi_\gamma\delta}) \text{ falls } \beta = \varphi_\gamma\delta + \mu \text{ mit } \mu < \varphi_\gamma\delta \cdot 2 \\ f_{\bar\alpha}^{\overline{\omega\mu}}(f_{\bar\alpha+1}^{k+1}(\overline{\varphi_\gamma\delta})) \text{ falls } \beta = \varphi_\alpha^k(\varphi_\gamma\delta \cdot 2) + \mu \text{ mit} \\ \mu < \varphi_\alpha^{k+1}(\varphi_\gamma\delta \cdot 2) \end{cases}$$

(6) $\overline{\varphi_\alpha(\beta)}$ für α Limeszahl vom Typ Ω. Sei $k \in \boldsymbol{N}$, $\gamma > \alpha$, $\delta < \Omega$:

$$\overline{\varphi_\alpha(\beta)} := \begin{cases} f_{\bar\alpha}^{\overline{\omega\mu}}(f_{\bar\alpha+1}^{k+1}\omega) \text{ falls } \beta = \varphi_\alpha^k 0 + \mu,\ \mu < \varphi_\alpha^{k+1} 0 \\ f_{\bar\alpha}^{\overline{\omega\mu}}(\overline{\varphi_\gamma\delta}) \text{ falls } \beta = \varphi_\gamma\delta + \mu,\ \mu < \varphi_\gamma\delta \cdot 2 \\ f_{\alpha}^{\overline{\omega\mu}}(f_{\bar\alpha+1}^{k+1}(\varphi_\gamma\delta)) \text{ falls } \beta = \varphi_\alpha^k(\varphi_\gamma\delta \cdot 2) + \mu, \\ \mu < \varphi_\alpha^{k+1}\varphi_\gamma\delta \cdot 2) \end{cases}$$

(7) $\overline{\varphi_{\varepsilon_{\Omega+1}} 0} := f_{\varepsilon_{\Omega+1}}\,\omega.$

28. **Bemerkung:** Im folgenden werden mehrfach die in [7, S. 66] bewiesenen Monotonitätseigenschaften der Funktionen F_α, $\alpha < \varepsilon_0$, der stark wachsenden Hierarchie verwendet. Auch die Erweiterungsrelation $\ll$ wird von dort übernommen.

Zur Abkürzung schreiben wir $\Phi(\alpha)$ für

„α ist Limeszahl vom Typ $\omega \wedge n > 1 \rightarrow G_{\overline{\alpha[n+2]}}(n) > G_{\bar\alpha}(n) > 1$“

und $\Psi(\alpha)$ für

„α ist Limeszahl vom Typ $\omega \wedge n > 1 \rightarrow G_{\overline{\alpha[n]}}(n+1) < < G_{\bar\alpha}(n+1)$“.

29. **Lemma:** Sei $\alpha, \beta \in \mathrm{ON}$, $\alpha + \beta = \alpha \# \beta$, α additive Hauptzahl, $\beta \neq 0$. Dann gilt für alle $k \in \boldsymbol{N}$:

$$\Phi(\varphi_0^k(0)),\ \forall\, \delta < \varphi_0^k(\alpha+\beta)\, \Phi(\delta) \rightarrow \Phi_0^k(\varphi(\alpha+\beta))$$
$$\Psi(\varphi_0^k(0)),\ \forall\, \delta < \varphi_0^k(\alpha+\beta)\, \Psi(\delta) \rightarrow \Psi_0^k(\varphi(\alpha+\beta)).$$

Beweis: $\Phi(\overline{\varphi_0^k 0})$ und $\Psi(\overline{\varphi_0^k 0})$ folgen unmittelbar aus der Definition von $\overline{\varphi_0^k 0}$. Für $k = 0$ folgen $\Phi(\alpha + \beta)$ und $\Psi(\alpha + \beta)$ aus $\Phi(\beta)$ und $\Psi(\beta)$. Sei $k = 1$. Dann folgen $\Phi(\varphi_0(\alpha + \beta))$ und $\Psi(\varphi_0(\alpha + \beta))$ durch Induktion nach β:

$$G_{\overline{\varphi_0(\alpha+\beta+1)[n+2]}}(n) = G_{\overline{\varphi_0(\alpha+\beta)\cdot(n+2)}}(n) > G_{\overline{\varphi_0(\alpha+\beta)}}(n)\cdot n = \\ = G_{\overline{\varphi_0(\alpha+\beta+1)}}(n)$$

und für Limeszahlen β ist

$$G_{\overline{\varphi_0(\alpha+\beta)[n+2]}}(n) = G_{\overline{\varphi_0(\alpha)}}(n)\cdot G_{\overline{\varphi_0(\beta[n+2])}}(n), \text{ wobei}$$

$$G_{\overline{\varphi_0(\beta[n+2])}}(n) = \begin{cases} G_{\overline{\varphi_0^{n+4}(0)}}(n) & \text{falls } \beta = \varepsilon_0 \\ G_{\overline{\varphi_0^{3}(\varepsilon_\alpha+1)}}(n) & \text{falls } \beta = \varepsilon_{\alpha+1} \\ G_{\overline{\varphi_0(\beta)[n+2]}}(n) & \text{sonst.} \end{cases}$$

In den beiden ersten Fällen gilt wegen der Definition der $\bar{\alpha}$ $G_{\overline{\varphi_0^{n+4}(0)}}(n) > G_{\overline{\varepsilon_0}}(n) > 1$, $G_{\overline{\varphi_0^{n+3}(\varepsilon_\alpha+1)}}(n) > G_{\overline{\varepsilon_\alpha+1}}(n) > 1$ für $n > 1$, im letzten Fall folgt die Behauptung nach Induktionsvoraussetzung. $\Psi(\varphi_0(\alpha + \beta))$ wird genauso bewiesen.

Für $k = l + 2$ folgen $\Phi(\varphi_0^{l+2}(\alpha + \beta))$ und $\Psi(\varphi_0^{l+2}(\alpha + \beta))$ durch Induktion nach β; zur Abkürzung stehe (x, y) für x^y:

$$G_{\overline{\varphi_0^{l+2}(\alpha+\beta+1)[n+2]}}(n) = \Big(G_{\overline{\varphi_0^{l+2}(\alpha+\beta)}}(n), (\ldots,$$
$$\Big(G_{\overline{\varphi_0^{2}(\alpha+\beta)}}(n)^{n+1}\Big)\ldots\Big) > \Big(G_{\overline{\varphi_0^{l+2}(\alpha)}}(n), (\ldots, \Big(G_{\overline{\varphi_0^{2}(\alpha)}}(n),$$
$$G_{\overline{\varphi_0(\beta+1)}}(n)\Big)\ldots\Big) = G_{\overline{\varphi_0^{l+2}(\alpha+\beta+1)}}(n).$$

Nach Voraussetzung sind $G_{\overline{\varphi_0^{l+2}(\alpha)}}(n), \ldots, G_{\overline{\varphi_0^{2}(\alpha)}}(n) > 1$, also auch $G_{\overline{\varphi_0^{1\mp 2}(\alpha+\beta+1)}}(n)$. Für Limeszahlen β gilt:

$$G_{\overline{\varphi_0^{l+2}(\alpha+\beta)[n+2]}}(n) = G_{\overline{\varphi_0^{l+2}(\alpha+\beta[n+2])}}(n) =$$
$$\Big(G_{\overline{\varphi_0^{l+2}(\alpha)}}(n), (\ldots, \Big(G_{\overline{\varphi_0^{2}(\alpha)}}(n), G_{\overline{\varphi_0(\beta[n+2])}}(n)\Big)\ldots\Big) >$$
$$> G_{\overline{\varphi_0^{l+2}(\alpha+\beta)}}(n) > 1 \text{ aus den gleichen Gründen wie im Fall } k = 1.$$

Die Behauptung für Ψ wird analog bewiesen.

30. Lemma: (1) $\forall \beta \leqslant \alpha\, \Phi(\beta) \rightarrow \bar{G}_{\overline{\alpha[n+2]}}(n) \gg \bar{G}_{\bar{\alpha}}(n)$ und

$\forall \beta \leqslant \alpha\, \Psi(\beta) \rightarrow \bar{G}_{\overline{\alpha[n]}}(n+1) \ll \bar{G}_{\bar{\alpha}}(n+1)$.

(2) Sei α eine Limeszahl vom Typ Ω und sei $\beta < \Omega$. Dann ist

$$G_{\overline{\alpha[\beta]}}(n) = G_{\bar{\alpha}}(n)[G_{\bar{\beta}}(n)].$$

(3) Sei $\alpha < \varepsilon_0$, α Limeszahl und $f, g : \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$. Dann gilt für $n > 1$:

$$f(n) > g(n) \rightarrow F_\alpha(f(n)) < F_{\overline{\alpha[g(n)]}}(n)$$

Beweis: (1) Für $\alpha < \Omega$ folgen die Behauptungen aus $\Phi(\alpha)$ und $\Psi(\alpha)$, da dann $\bar{G}_{\overline{\alpha[n+2]}}(n)$, $\bar{G}_{\bar{\alpha}}(n)$ endlich sind und $<$, $\ll$ übereinstimmen. Sei also $\alpha = \alpha_0 + \Omega^{\alpha_1} \cdot \beta$ eine Limeszahl vom Typ ω. Dann ist β vom Typ ω oder $\beta = \beta_1 + 1$ und α_1 vom Typ ω. Im ersten Fall folgen die Behauptungen aus $\Phi(\beta)$, $\Psi(\beta)$, im zweiten Fall nach I. V. für α_1.

(2) wird durch Induktion nach der Länge von α bewiesen.

(3) Es ist $F_{\alpha[f(n)]}(n) > f(n)$; daraus folgt:

$$F_{\alpha[g(n)]}(n) \geqslant F_{\alpha[f(n)]+1}(n) \geqslant F^2_{\alpha[f(n)]}(n) > F_\alpha(f(n)),$$

weil $F_{\alpha[k+1]}(n) \geqslant F_{\alpha[k]+1}(n)$ für $n > 1$.

31. Lemma: $\forall \alpha \in \mathrm{ON}\ \ \Phi(\alpha), \Psi(\alpha)$.

Beweis: Trivialerweise gelten Φ und Ψ für 0, alle Nachfolgerzahlen und Limeszahlen vom Typ Ω. Sei also α eine Limeszahl vom Typ ω und gelte $\Phi(\beta)$, $\Psi(\beta)$ für alle $\beta < \alpha$. Wir treffen folgende Fallunterscheidungen:

1. $\alpha = \alpha_0 + \Omega^{\alpha_1} \cdot \delta$. Da α Limeszahl vom Typ ω ist, muß entweder auch δ eine solche sein oder aber δ ist Nachfolger und α_1 ist Limes vom Typ ω. Im ersten Fall folgen $\Phi(\alpha)$, $\Psi(\alpha)$ aus $\Phi(\delta)$, $\Psi(\delta)$, im zweiten Fall aus $\Phi(\alpha_1)$, $\Psi(\alpha_1)$.

2. $\alpha = \alpha_0 + \varphi_\gamma(\delta)$ mit $\varphi_\gamma(\delta) \neq \delta$, $\varphi_\gamma \delta \neq \gamma$ falls $\delta = 0$, $\alpha_0 = 0$ oder $\alpha_0 + \varphi_\gamma \delta = \alpha_0 \# \varphi_\gamma \delta$.

2.1. $\gamma = 0$. Dann ist $\delta \neq 0$, $\delta \neq \varphi_0(\delta)$ und es existiert $k \in \boldsymbol{N}$, δ_1, δ_2, so daß $\delta = \varphi_0^k(0)$ oder $\delta = \varphi_0^k(\delta_1 + \delta_2)$ mit δ_1 add. Hauptzahl und $\delta_2 \neq 0$. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 29.

2.2. $\gamma = \gamma_1 + 1$. Zunächst gelten Φ und Ψ für $\varphi_{\gamma_1+1}0$ und $\varphi_{\gamma_1+1}(\beta + 1)$, für alle β: dazu wird

$$G_{\overline{\varphi_{\gamma_1}^k + 2}\,\overline{0}}(n) > F^k_{\overline{G_{\overline{\gamma_1}}(n) + i}}(n),\ G_{\overline{\varphi_{\gamma_1}^k} + 2\overline{(\varphi_{\gamma_1+1}(\beta) + 1)}}(n) >$$

$$> F^k_{\overline{G_{\overline{\gamma_1}}(n) + i}}\left(G_{\overline{\varphi_{\gamma_1+1}(\beta)}}(n)\right),\ G_{\overline{\varphi_{\gamma_1}^k}\,\overline{\varphi}}(n+1) < F^{k+1}_{\overline{G_{\overline{\gamma_1}}\,(n+1) + i}}(n+1),$$

$$G_{\overline{\varphi_{\gamma_1}^k}\,\overline{(\varphi_{\gamma_1+1}(\beta) + 1)}}(n+1) < F^{k+1}_{\overline{G_{\overline{\gamma_1}}\,(n+1) + i}}\left(G_{\overline{\varphi_{\gamma_1+1}(\beta)}}(n+1)\right)$$

für alle k durch Fallunterscheidung nach $\gamma_1 = 0$, Nachfolger oder Limeszahl vom Typ ω oder Ω und durch vollständige Induktion nach k bewiesen. Sei nun δ eine Limeszahl. Dann gibt es eine natürliche Zahl k und $\mu \in ON$, μ Limeszahl oder 0, so daß einer der folgenden drei Fälle zutrifft: $\delta = \varphi_{\gamma_1+1}^k(0) + \mu \wedge \mu < \varphi_{\gamma_1+1}^{k+1}(0)$, $\delta = \varphi_\nu(\varepsilon) + \mu \wedge 0 < \mu < \varphi_\nu\varepsilon$, $\delta = \varphi_{\gamma_1+1}^k(\varphi_\nu\varepsilon \cdot 2) + \mu \wedge \mu < \varphi_{\gamma_1+1}^{k+1}(\varphi_\nu\varepsilon \cdot 2)$ für ein $\varphi_\nu\varepsilon$ mit $\nu > \gamma$. Für μ Limeszahl folgen dann die Behauptungen aus $\Phi(\mu)$ und $\Psi(\mu)$, für $\mu = 0$ durch vollständige Induktion nach k.

2.3. γ ist Limeszahl vom Typ ω. Für $\delta = 0$ (dann sei $\varphi_\gamma\delta \neq \gamma$) und $\delta = \delta_1 + 1$ folgen die Behauptungen aus $\Phi(\gamma)$, $\Psi(\gamma)$ und Lemma 30 (1). Für Limeszahlen δ geht der Beweis analog zum Fall 2.2.

2.4. γ ist Limeszahl vom Typ Ω. Durch vollständige Induktion nach k unter Verwendung von Lemma 30 (2) und (3) kann wieder gezeigt werden:

$$G_{\overline{\varphi_\gamma 0\,[k+2]}}(n) > F^k_{\overline{G_{\overline{\gamma}}(n)}}(n),\ G_{\overline{\varphi_\gamma(\beta+1)\,[k+2]}}(n) >$$

$$> F^k_{\overline{G_{\overline{\gamma}}(n)}}\left(G_{\overline{\varphi_\gamma\beta}}(n)\right),\ G_{\overline{\varphi_\gamma 0\,[k]}}(n+1) < F^{k+1}_{\overline{G_{\overline{\gamma}}(n+1)}}(n+1),$$

$$G_{\overline{\varphi_\gamma(\beta+1)\,[k]}}(n+1) < F^{k+1}_{\overline{G_{\overline{\gamma}}(n+1)}}\left(G_{\overline{\varphi_\gamma\beta}}(n+1)\right)$$

und somit Φ und Ψ für $\varphi_\gamma 0$ und $\varphi_\gamma(\beta + 1)$, für alle β. Für Limeszahlen δ geht der Beweis wieder analog zu 2.2.

32. Satz (Die schwach wachsende Hierarchie auf AON und auf ON):

Für alle $\alpha \in$ ON und $n > 1$ gilt:

$$G_\alpha(n+2) \geqslant G_{\bar{\alpha}}(n)$$
$$G_\alpha(n) \qquad \leqslant G_{\bar{\alpha}}(n+1).$$

Beweis: Durch transfinite Induktion nach α, unter Verwendung von Lemma 31.

33. Satz (Hierarchie-Vergleich auf ON):

(1) Für alle $0 < \alpha \in$ ON und $n > 1$ gilt:

$$G_{\varphi_\alpha 0}(n+2) \geqslant F_{\overline{G}_{\bar{\alpha}}(n)+i}(n)$$
$$G_{\varphi_\alpha 0}(n) \leqslant F_{\overline{G}_{\bar{\alpha}}(n+1)+i}(n+1),$$

wobei $i = 1$ für α Nachfolger $> \omega$ oder Limes vom Typ Ω und $i = 0$ sonst ist.

(2) Für $0 < \alpha < \varepsilon_0$ und $n > 1$ gilt:

$$G_{\varphi_{\hat{\alpha}} 0}(n+2) \geqslant F_{\alpha+i}(n), \qquad G_{\varphi_{\varepsilon_{\Omega+1}} 0}(n+2) \geqslant F_{\varepsilon_0}(n)$$
$$G_{\varphi_{\hat{\alpha}} 0}(n) \qquad \leqslant F_{\alpha+i}(n+1), \quad G_{\varphi_{\varepsilon_{\Omega+1}}}(n) \leqslant F_{\varepsilon_0}(n+1)$$

mit $i = 1$ für $\alpha \geqslant \omega$ und $i = 0$ sonst.

Beweis: Dies folgt sofort aus dem letzten Satz und Satz 19.

Literaturangaben

[1] P. Aczel, Another elementary treatment of Girard's result connecting the slow and the fast growing hierarchies of number theoretic functions, Manuskript, 1980.

[2] H. Bachmann, Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordinalzahlen, Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, XCV (1950), S. 5–37.

[3] W. Buchholz, Three contributions to the conference on "Recent Advances in Proof Theory", Manuskript, 1980.

[4] E. A. Cichon und S. S. Wainer, The slow-growing and the Grzegorczyk hierarchies, Manuskript, 1980.

[5] J.-Y. Girard, π_2^1-Logic, erscheint in Ann. Math. Logic.

[6] H. R. Jervell, Homogeneous Trees, Vorlesung gehalten in München, Sommersemester 1979.

[7] H. Schwichtenberg, Eine Klassifikation der ε_0-rekursiven Funktionen, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., Bd. 17 (1971), S. 61–74.

[8] H. Schwichtenberg, Homogene Bäume und subrekursive Hierarchien, Vortrag gehalten in Oberwolfach, April 1980.